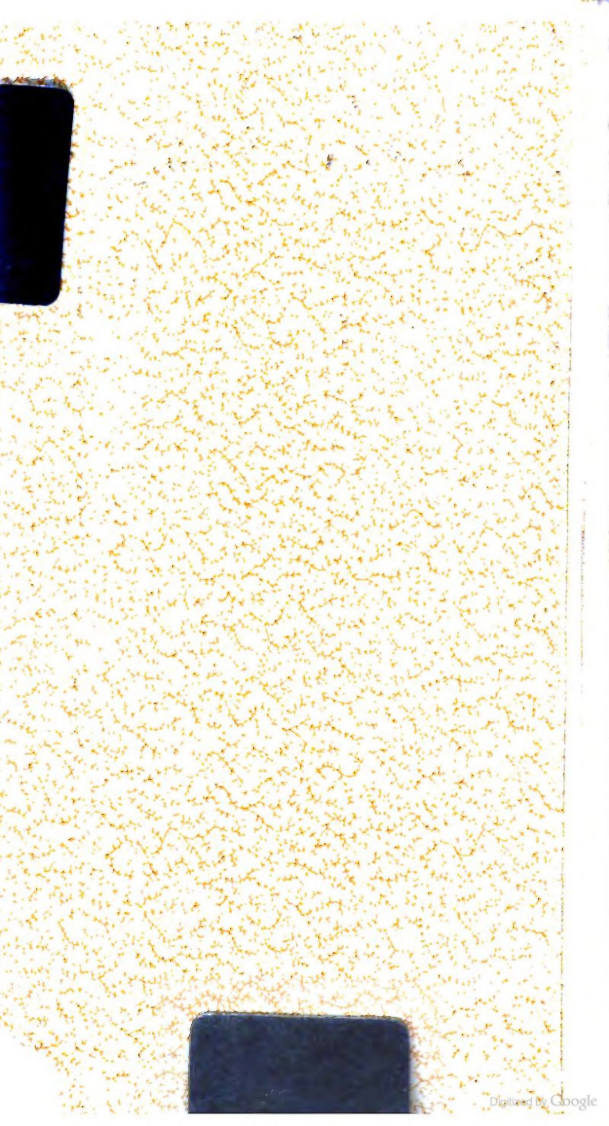
3 3433 06633882 7

Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

.atiſches Handbuch

der geſammten

Land- und Erd-Meſſung

mit

ebener und ſphäriſcher Trigonometrie

auch

Beſchreibung

der neuern brauchbaren Meßinſtrumente

von

Auguſt Schulze-Montanus

Doctor Philos., Math. et Phys.

Erſter Band.

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin,

bei Auguſt Rücker.

1819.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorrede.

Nur einige kurze Bemerkungen erlaube ich mir diesem Werke voraus zu schicken, da weitläufige Vorreden, meistens bloß captationes benevolentiae, den Lesern nichts nützen, und deshalb gewöhnlich von ihnen überschlagen werden.

Den Inhalt und die Tendenz dieses von mir mit Lust und Liebe ausgearbeiteten Werkes bezeichnet sein Titel. Nach mehrjährigen Meditationen und practischen Uebungen in geodätischen Arbeiten habe ich es unternommen, alle wirklich brauchbaren, — nicht bloß theoretischen, — Sätze und Aufgaben der Land- und Erd-Messung in ein wissenschaftliches wohlgeordnetes System zusammenzustellen, so weit dieser Gegenstand einer systematischen Darstellung empfänglich ist.

Seit Mayer's practischer Geometrie in 4 Bänden, einem trefflichen und in seiner Art einzigen Werke, ist in Deutschland kein ähnliches Buch erschienen, welches die ganze niedere und höhere Erd-

Digitized by Google

messungskunde umfaßte. Die vielen über ökonomische und militärische Feldmeßkunst geschriebenen, zum Theil recht brauchbaren Schriften haben insgesammt beschränktere Zwecke, können daher als geschlossene Systeme der ganzen Geodäsie durchaus nicht angesehen werden. Ueber einzelne Theile der höhern Erdmessung hat man zwar einige gute Werke, unter denen sich besonders die Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung von Bohnenberger auszeichnet; allein sie stehen isolirt da, und bilden, wie gesagt, kein Ganzes.

Selbst Mayer's sonst reichhaltigem Werke fehlt es sehr an systematischer leicht zu übersehender Anordnung. Auch enthält dasselbe viele Dinge, welche wohl im Allgemeinen zur practischen Geometrie, aber nicht zur Erdmessung streng genommen gehören, und selbst das Nöthige nicht in bündiger Kürze und Klarheit, nicht immer in der zweckmäßigsten Zusammenstellung. Ferner vermißt man darin viele Sätze, Aufgaben und Methoden der Meßkunde, welche heut zu Tage in einem wissenschaftlichen Werke der Art nicht mehr fehlen, und einem practischen Geometer, welcher Belehrung sucht, nicht mehr vorenthalten werden dürfen. Ich glaube, jeder unpartheiische competente Richter wird meinem Urtheil hierin beipflichten, und eine neuere Bearbeitung der Geodäsie im verbesserten Geiste für kein unnützes Unternehmen halten.

Ich habe bei dieser allerdings schwierigen Ar-

Digitized by Google

heit einen lange und reiflich erwogenen Plan befolgt, und den erwähnten Mängeln auszuweichen ernstlich getrachtet. Doch bezweifle ich, das mir vorschwebende Ideal, Kürze mit Vollständigkeit und Deutlichkeit zu verbinden, mit wenig Worten viel zu geben, das Unnütze zu übergehen, das Nützliche nirgends zu versäumen, und überall an seine rechte Stelle zu setzen, — vollständig erreicht zu haben. Jedes menschliche Werk ist unvollkommen, das meinige gewiß auch. Hätte ich aber den von mir beabsichtigten Zweck auch nur zur Hälfte erreicht, so würde ich mich selbst dadurch und durch den Beifall derer, die durch meine Belehrung auf rechte Wege geleitet worden, für meine Anstrengung genugsam belohnt finden.

Es ist dies Werk nicht bloß für Anfänger *bestimmt*, welche sich dadurch von den ersten Elementen der Feldmeßkunst allmählig bis zur höhern Erdmessung fortarbeiten können, sondern auch für solche junge Geometer, welche die gemeine Feldmeßkunst schon kennen, und ihr Wissen nicht bloß berichtigen und vervollständigen, sondern auch extensive bis zur höhern Erdmessung erweitern wollen.

In der Voraussetzung, daß alle, die sich dieses Buch anschaffen, eines oder einige der bessern bereits vorhandenen Lehrbücher der niedern Landmessung (Feldmeßkunst) schon besitzen, habe ich mehrere ganz leichte Gegenstände, z. B. die Anfertigung und den Gebrauch verjüngter Maaßstäbe, die An-

Digitized by Google

gabe der Meilen= und Flächen=Maße u. ſ. w. ganz übergangen, andere mit Hinweiſung auf einfache Aufgaben nur kurz angedeutet, z. B. die Ausmeſſung kleinerer Erdſtrecken zu ökonomiſchem oder militäriſchem Gebrauch. Damit habe ich mehr Platz gewonnen für das Schwierigere und weniger Bekannte. Mit dieſer nothwendigen Beſchränkung werden hoffentlich die meiſten meiner Leſer recht wohl zufrieden ſeyn.

Die ebene und ſphäriſche Trigonometrie durfte als Hauptfundament der Geodäſie hier nicht fehlen; die reine Geometrie und Arithmetik aber mußte ich bei allen meinen Leſern als bekannt vorausſetzen. Kenner werden wahrſcheinlich meine Darſtellung der ebenen, beſonders der ſphäriſchen Trigonometrie ihres Beifalls werth achten. Zu letzterer hat die Verlags=Buchhandlung eigne Modelle nach meiner Angabe anfertigen laſſen. Dieſe erleichtern das Verſtehen der allgemein für ſchwer geachteten und von den meiſten Schriftſtellern, ſelbſt Käſtner, Karſten u. a. ziemlich unverſtändlich behandelten, ſphäriſchen Trigonometrie ganz außerordentlich.

Von den Meßinſtrumenten habe ich nur die beſten und brauchbarſten beſchrieben. Wer dieſe kennt, und mit ihnen umzugehen verſteht, dem wird auch die Behandlung anderer älterer Inſtrumente nicht ſchwer fallen.

Der letzten, nemlich der ſechsten Abtheilung dieſes Werkes, welche von der höhern Erdmeſſung han-

Digitized by Google

delt, habe ich die große Ausdehnung nicht geben können, wie ich wohl gewünscht hätte. Aber auch das hier Beigebrachte wird den meisten Lesern zu einer allgemeinen Kenntniß des Gegenstandes völlig genügen, da doch nur Wenige Gelegenheit finden, höhere Erdmessungen wirklich practisch auszuführen.

Sollte indessen mein Werk den gewünschten und gehofften Beifall beim gelehrten Publikum finden, so würde ich diesen zwei Bänden noch einen dritten nachfolgen lassen, worin ich einige practische Vortheile der niedern und höhern Erdmessung ausführlicher mittheilen, und zugleich die verschiedenen Methoden der Chartenzeichnung auseinander setzen würde. Die Chartenzeichnung war kein integrirender nothwendiger Bestandtheil dieses Buches, welches bloß die Methoden der Messungen plangemäß behandeln sollte.

Ein Weiteres über die innere und äußere Oekonomie meines Buches wird der geehrte Leser aus der Ansicht desselben selbst wahrnehmen. Für vorzüglichen Druck, richtige Kupfertafeln ꝛc. hat die Verlagshandlung und die Buchdruckerei des Herrn Friedrich Vieweg in Braunschweig mit löblichem Eifer gesorgt. Der Sachkenntniß und gefälligen Aufmerksamkeit des Herrn Correctors — wegen Entfernung vom Druckort konnte ich die Correctur nicht selbst besorgen — habe ich die Reinheit des Ganzen von groben sinnentstellenden Druckfehlern zu verdanken; die wenigen noch gebliebenen sind insgesammt

§. 46 bis §. 47. Flächeninhalt sphär. Dreiecke und Polygone S. 137
§. 48 bis §. 51. Reductionen sphär. Dreiecke auf Sehnendreiecke und umgekehrt 140

Dritte Abtheilung.

Werkzeuge zur Land- und Erd-Messung. 148

§. 52. Meßkette und Maßstäbe 149
§. 53. Normallängenmaße, Fuß, mètre ꝛc. 159
§. 54. Vergleichung der Längenmaße 165
§. 55. Tabelle einiger Längenmaße 168
§. 56. Meßtisch, verschiedene Constructionen 171
§. 57. Diopterlineal ohne und mit Fernrohr 182
§. 58. Orientirboußole, Declinatorium 185
§. 59. Diopterkreuz, Feldmesserkreuz 186
§. 60. Verschiedene Gradeintheilungen 188
§. 61. Verschiedene Constructionen der Winkelmesser 191
§. 62. Geometrischer Begriff von der einfachen und doppelten Reflexion (Multiplication) einer Winkelmessung 198
§. 63. Vortheile der Repetition einer Winkelmessung 205
§. 64. Etwas von der Theilung, dem Nonius und der Genauigkeit eines Winkelmessers, Feinheit der Theilstriche 209
§. 65. Prüfung der Richtigkeit eines Winkelmessers 214
§. 66. Boußole zum Winkelmessen 222
§. 67. Schmalkalders kleine Handboußole 225
§. 68. Libellen mit Luftblase, zwei Arten 227
§. 69. Berichtigung einer Libelle 235
§. 70. Bergwaage, Clitometer 238
§. 71. Astrolabium nach der gewöhnlichen Bedeutung 240
§. 72. Repetirender Theodolit nach der neuesten Construction 244
§. 73. Mayer-Borda'scher Multiplicationskreis 249
§. 74. Theorie des Spiegelsextanten 257
§. 75. Construction des Sextanten 265
§. 76. Gebrauch desselben zu Winkelmessungen 270
§. 77. Messung der Verikalwinkel mittelst des Sextanten und eines künstlichen Horizonts 277
§. 78. Fehler und Berichtigungen eines Sextanten 285
§. 79. Historische Notiz von einigen andern Winkelmessern mit und ohne Spiegel 293

Instrumente zum Nivelliren: 297

§. 80. Nivellirwaage ohne Libelle, Kanalwaage 298
§. 81. Nivellirwaage mit Fernrohr und Libelle, Niveau 301
§. 82. Berichtigung, Verification des Niveau's 304
§. 83. Nivellirstäbe und Zielscheiben 307

Erſte Abtheilung.

Ebene Trigonometrie.

---

§. 1.

Allgemeine Begriffe.

Die meiſten Betrachtungen, Meſſungen und Berechnungen ebener Figuren gründen ſich auf die des ebenen geradlinigen Dreiecks, welches insgemein ſchlechtweg Dreieck genannt wird, zur Unterſcheidung vom ſphäriſchen Dreieck.

Das Dreieck iſt ein kleines Syſtem von ſechs zuſammengehörigen Größen, 3 Seiten und 3 Winkeln, die nach gewiſſen Geſetzen von einander abhängen, oder einander wechſelſeitig beſtimmen. Wenn in einem, der Größe und Geſtalt nach, gegebenen Dreieck ein Stück, es ſey eine Seite oder ein Winkel, ſich verändert, ſo hängt damit immer die Veränderung von einem oder mehreren andern Stücken des Dreiecks nach irgend einer Relation zuſammen, die ſich durch irgend eine

Funktion *) zusammengehöriger veränderlicher Größen ausdrücken läßt. Ein Beispiel der Art wird später bei Berechnung der Fehler vorkommen, die aus fehlerhaft gemessenen Stücken eines Dreiecks entspringen.

Ein Dreieck wird völlig bestimmt, d. h. die Größe seiner Seiten, Winkel, seines Perimeters und Flächenraums hängt ab von den gegebenen Größen dreier Stücke (Seiten, Winkel), worunter sich aber wenigstens eine Seite befinden muß. Sind nehmlich entweder

a) alle 3 Seiten, oder
b) zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel, oder
c) eine Seite und zwei Winkel in bestimmter Lage gegen die Seite, oder
d) zwei Seiten und ein anliegender stumpfer oder rechter Winkel, welcher nehmlich einer der Seiten gegenüberliegt, gegeben;

so ist das dazu gehörige Dreieck vollkommen bestimmt, oder es läßt sich sowohl durch geometrische Construction als auch durch Rechnung nur ein Dreieck, aber nicht zwei der Größe und Gestalt nach verschiedene Dreiecke, finden, das die gegebenen Stücke nach der gegebenen Bestimmung enthält. Zwei Seiten und ein anliegender spitzer Winkel bestimmen ein Dreieck nur dann, wenn die dem spitzen Winkel gegenüberliegende Seite größer ist, als die anliegende; im Gegentheil lassen sich

---

*) Unter Funktion hat man überhaupt eine Gleichung zu verstehen, welche eine veränderliche Größe durch eine andere veränderliche Größe, in Verbindung mit unveränderlichen Größen ausdrückt; z. B. $y = 2x + 1$ ist eine sehr einfache Funktion; y ist eine Funktion von x, d. h. der Werth von y hängt von dem Zahlenwerthe ab, den man x beliebig geben kann; man kann aber auch x eine Funktion von y nennen.

durch geometrische Construction und durch Berechnung zwei Dreiecke finden, die die gegebenen Eigenschaften besitzen. Drei gegebene Winkel bestimmen ein Dreieck bloß in Hinsicht seiner Aehnlichkeit mit andern Dreiecken und des Verhältnisses seiner Seiten, aber nicht in Hinsicht der Größe seiner Seiten oder seines Flächenraums; folglich bestimmen sie ein Dreieck nicht in der Art, wie es die Praxis verlangt, nehmlich seiner Größe nach. Die Beweise für das Gesagte sind durchaus elementarisch.

Wenn aus 3 in der angezeigten Art gegebenen Stücken eines Dreiecks ein viertes Stück durch Rechnung bestimmt werden soll, so geschieht dies immer nach einer gewissen Formel oder Gleichung, welche eine Funktion der veränderlichen gegebenen und gesuchten Größen ist, d. h. die gesuchte Größe hängt nach einem bestimmten Gesetz von der Quantität der drei gegebenen Größen ab. Verändern sich eine oder mehrere von diesen, so verändert sich auch die gesuchte. Die Unterschiede, welche sich hieraus für das gesuchte Stück und für das Dreieck überhaupt ergeben, lassen sich auf eine allgemeine Art durch Funktionen bezeichnen, welche in unsern mathematischen Lehrbüchern insgemein zu wenig beachtet oder ganz übergangen sind.

Derjenige Theil der analytischen Geometrie, welcher aus drei gegebenen Stücken eines ebenen Dreiecks die übrigen durch Zahlenberechnung finden lehrt, wird allgemein Trigonometrie genannt, und zwar ebene Trigonometrie, zur Unterscheidung von sphärischer Trigonometrie, welche von der Berechnung der Kugeldreiecke handelt, wovon wir in der zweiten Abtheilung sprechen.

Bei dieser Berechnung gebraucht man die sogenannten trigonometrischen Linien, welche den Winkeln des Dreieckes, als Centriwinkeln in irgend einem Kreise,

§. 3.

Größe der goniometrischen (trigonometr.) Linien. (Fig. 1.)

Es ist offenbar, daß die geometrische Länge eines Sinus, Cosinus ꝛc. für einen der Länge nach bestimmten Halbmesser oder Sinus totus CA, sich mit dem Winkel, wozu diese Linien gehören, verändern muß; daß ferner zu einem und demselben Winkel a für verschiedene Längen des Halbmessers oder Sinus totus jene Linien verschiedene Längen erhalten, aber im Verhältniß zu ihrem Sin. tot. sich nicht ändern; z. B. für den Halbmesser CB ist BD = Sin. a, für den Halbmesser CT aber wäre AT = Sin. a; da nun AT : CT = BD : CB, so muß, in welche Anzahl Theile man sich auch die Halbmesser oder Sin. tot. zerlegt denken mag, AT eben so viele Theile seines Sin. tot. CT, als BD seines Sin. tot. CB, enthalten. Eben dies gilt von den übrigen goniometrischen Linien: Cosinus, Tangenten u. s. w.

Da nun die Größe dieser Linien bloß nach aliquoten Theilen ihres Sinus totus bestimmt wird, so ist es ganz gleichgültig, wie groß man die Länge des Sin. tot. annimmt, und in wie viel aliquote Theile man sich diese Länge, als allgemeinen Maßstab, zerlegt denkt. Es ist aber natürlich, diese Theilzahl sehr groß anzunehmen, weil sich nur so die verschiedenen Maße der Linien für sehr kleine Fortschreitungen der Winkel angeben lassen. In den gewöhnlichen Sinustafeln wird der Sinus totus = 10000000 Theilen gesetzt, und nun für alle Winkel angegeben, wie viel solcher Theile die dazu gehörigen Sinus, Cosinus u. s. w. enthalten. In den Tafeln aber, welche die Logarithmen von den Zahlen dieser Linien enthalten, ist der Sinus totus =

10000 Millionen Theilen gesetzt, woraus sich die große Characteristik dieser Logarithmen erklärt.

Ein andrer, gehörig zu beachtender, Satz der Goniometrie ist dieser: daß zu jeder der Größe oder Zahl nach gegebenen goniometrischen (trigonometrischen) Linie in einem Kreise von irgend einem Halbmesser CA eigentlich 4 verschiedene Winkel gehören. BD sey ein Sinus von bestimmter Größe, so gehört derselbe 1) zum Bogen AB oder Winkel ACB = a, 2) zum Nebenwinkel von ACB, nehmlich zum Winkel BCM = 2R — a, 3) zu dem converen Winkel ACb = 2R + a, denn indem man den einen Schenkel des Winkels, AC verlängert, und auf diesen vom Endpunkt b des zweiten Schenkel Cb die Senkrechte bd fällt, so erhält man bd = sin. ACb = BD = sin. a, 4) zum converen Winkel ACE, dessen Bogen AHME = 4R — a ist, nehmlich die Senkrechte ED = sin. (4R — a) = BD = sin. a. Folglich gehört der sin. BD zu 4 Centriwinkeln im Kreise, nehmlich zu a, zu 2R — a, zu 2R + a, und zu 4R — a; z. B. sin. 30° = sin. 150° = sin. 210° = sin. 330°.

Benennt man, wie es mehrere Schriftsteller thun, den Halbkreis mit dem unschicklichen Buchstaben π, so ist:

sin. a = sin. (π — a) = sin. (π + a) = sin. (2π — a).

Was vom Sinus gilt, das gilt auch von jeder andern trigonometrischen, der Größe nach gegebenen Linie. So ist Cos. a = Cos. (2R — a) = Cos. 2R + a) = Cos. (4R — a) u. s. w.

Die weitere ausführlichere Betrachtung dieses ganz leichten Gegenstandes kann auch einem Anfänger nicht schwer fallen. Schwieriger aber, und von den meisten Schriftstellern nicht deutlich genug erläutert ist die Theorie von der positiven und negativen Bedeutung der trigonometrischen Linien, in sofern jede derselben

zu 4 verschiedenen Centriwinkeln gehören kann; daher wir diese Theorie hier so genau als möglich erörtern wollen.

§. 4.

Positive und negative Bedeutung der goniometrischen Linien. (Fig. 1.)

AHML sey ein Kreis über dem Durchmesser AM beschrieben; der Durchmesser HL sey senkrecht auf AM. Werden nun die Winkel vom Anfangspunkte A nach der Richtung AHG ꝛc. wachsend angenommen, und A als der Anfangspunkt der Winkel, so können die goniometrischen Linien in Beziehung auf die Durchmesser AM oder HL entgegengesetzte Lagen annehmen, folglich positive oder negative Zahlenwerthe bekommen.

α) Der Sin. 0^0 ist $= 0$, wächst bis 90^0, dessen Sinus = Sin. tot. ist; über 90^0 nimmt er in gleicher Progression wieder ab, bis er bei $180^0 = 0$; von 180^0 wächst er eben so wieder bis zu 270^0, wo er gleich dem Sin. tot. wird; von hier an bis 360^0 nimmt er wieder ab, so daß Sin. 360^0 wieder $= 0$ wird.

Die Sinus der Winkel von 0^0 bis 180^0 behalten gleiche Lagen gegen den Durchmesser AM: man kann AM als Abscissenlinie, die Sinus als Ordinaten, und A als den Anfangspunkt der Abscissenlinie betrachten; folglich sind die Zahlenwerthe der Sinus aller Winkel von 0^0 bis 180^0 positiv: z. B. sowohl BD = sin. BCA, und Gd = sin. ACG sind beide positiv u. s. w.

Die Sinus der Winkel von 180^0 bis 360^0 hingegen haben Lagen gegen den Durchmesser AM, welche den Lagen der Sinus der Winkel von 0^0 bis 180^0 entgegengesetzt sind; folglich sind ihre Zahlenwerthe in Beziehung auf die oberhalb AM fallenden Sinus negativ.

β) Der Cosinus von 0^0 = sin. tot., nimmt ab bis zu 90^0, wo er = 0 wird; über 90^0 nimmt er in gleicher Progreſſion wieder zu, bis er bei 180^0 = sin. tot. wird; von 180^0 bis 270^0 nimmt er eben ſo wieder ab bis zum Verſchwinden; von 270^0 wächſt er bis zu 360^0, wo er wieder = sin. tot. wird.

Die Cosinus ſind in Hinſicht ihrer Lage gegen den Durchmeſſer HL, auf welchem ſie als ſenkrechte Ordinaten ſtehen, gleichſam das Gegentheil von den Sinus. Die Cosinus, welche in den Halbkreis HAL fallen, ſind daher als poſitiv, die Cosinus hingegen, die auf die entgegengeſetzte Seite von HL oder in den Halbkreis HML fallen, als negativ zu betrachten. Nehmlich die Sinus von 0^0 — 90^0 ſind poſitiv, von 90^0 bis 180^0 negativ, von 180^0 — 270^0 negativ, von 270^0 bis 360^0 poſitiv; z. B. DC = BF = cos. BCA poſitiv, Cd = FG = cos. ACG negativ u. ſ. w.

γ) Die Tangente von 0^0 = 0, wächſt bis 90^0, wo ſie = ∞ (unendlich) wird, oder beſſer geſagt, wo ſie eigentlich aufhört, eine Größe zu ſeyn, wie aus der geometriſchen Conſtruction erhellt; über 90^0 hinaus wird ſie wieder eine endliche Größe, und nimmt ab, bis ſie bei $180^0 = 0^0$ wird; von 180^0 bis 270^0 nimmt ſie wieder zu, bis ſie bei 270^0 = ∞ wird; über 270^0 wird ſie wieder eine endliche Größe, und nimmt allmählig ab, bis tang. 360^0 = 0. Was die Lagen der Tangenten gegen den Durchmeſſer AM betrifft, ſo ſind diejenigen Tangenten poſitiv, welche auf AM oberhalb in der Richtung AT, diejenigen aber negativ, welche auf AM unterhalb in der Richtung At ſenkrecht ſtehen. Iſt A der Anfangspunkt der Winkel oder Bogen, ſo müſſen die Tangenten alle in A auf AM ſenkrecht ſtehen, und ſo weit verlängert werden, bis ſie vom zweiten Schenkel des Winkels CB oder CG u. ſ. w., wenn CA der erſte Schenkel iſt, vor-

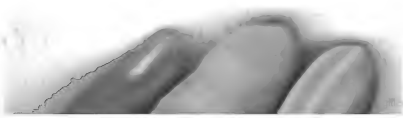
wärts oder rückwärts verlängert, geschnitten werden. Hält man diesen Begriff nicht fest, so kann man die positive und negative Bedeutung der Tangenten nicht wohl einsehen.

Es sey ACB ein spitzer Winkel oder kleiner als 90°, so ist seine Tangente AT positiv, und so sind alle Tangenten von Winkeln unter 90° positiv, die Tangente von 90° aber $= +\infty$.

Es sey ACG ein stumpfer Winkel zwischen 90° und 180°; um seine Tangente zu erhalten, muß man den zweiten Schenkel des Winkels GC rückwärts verlängern, bis er die Senkrechte auf AM in t schneidet; folglich At = tang. ACB negativ, weil sie gegen AM eine den positiven Tangenten z. B. AT entgegengesetzte Lage hat; auf diese Weise sind die Tangenten aller stumpfen Winkel, die größer als 90° und kleiner als 180° sind, negativ.

Es sey der Bogen AHMb oder der convere Winkel ACb größer als 180° und kleiner als 270° = 2R + a; seine Tangente AT wird erhalten, indem man den zweiten Schenkel des Winkels Cb rückwärts verlängert, bis er die Senkrechte auf AM in T schneidet; also ist AT = tang. ACb positiv, weil sie auf die Seite von AM fällt, die den positiven Tangenten entspricht; auf diese Weise sind die Tangenten aller Winkel von 180° bis 270° positiv.

Es sey der Bogen AHME oder der dazu gehörige convere Winkel ACE größer als 270° und kleiner als 360°, oder = 4R − a; so ist offenbar At die Tangente vom converen Winkel ACE; diese ist zwar an Größe = AT oder tang. a, aber in Hinsicht ihrer Lage gegen AM negativ, wenn AT positiv ist; demnach sind die Tangenten aller Winkel zwischen 270° und 360° negativ.



à) Die Cotangente von 0^0 = tang. $90^0 = \infty$, nimmt ab bis 90^0, wo sie gleich der tang. $0^0 = 0$ wird; über 90^0 hinaus nimmt sie wieder zu, und wird bei 180^0 wieder $= \infty$ u. s. w.

Die Cotangenten sind, wie man leicht erkennt, in Hinsicht ihrer Lagen gegen den Durchmesser HL, auf welchem sie senkrecht stehen, gleichsam das Gegentheil der Tangenten, welche auf dem Durchmesser AM senkrecht stehen, so wie wir dies vorher von den Cosinus und Sinus der Winkel bemerkten; der wahre positive Anfangspunkt oder Nullpunkt der Cotangenten ist eigentlich H, diejenigen, welche in die Richtung CA oder vielmehr HK fallen, müssen positiv, diejenigen aber, welche in die entgegengesetzte Richtung CM oder vielmehr Hk fallen, negativ seyn.

Der Winkel ACB = a sey ein spitzer, so ist seine Cotangente = der Tangente von b = HK, also positiv; dergestalt sind die Cotangenten aller Winkel zwischen 0^0 und 90^0 positiv.

Die Cotangente des stumpfen Winkels ACG = 2R — a = cot. a = tang. 90^0 — a ist, wie man leicht sieht, Hk, welche an Größe der cot. a zwar gleich, aber wegen ihrer entgegengesetzten Lage gegen den Durchmesser HL negativ ist; auf diese Weise sind die Cotangenten aller Winkel von 90^0 bis 180^0 negativ.

Der Bogen AHMb oder der convexe Winkel ACb = 2R + a liege zwischen 180^0 und 270^0, so ist dessen Tangente = AT, also seine Cotangente HK positiv; man kann sich auch statt cot. ACb für den Durchmesser AM die tang. ACb für den Durchmesser HL vorstellen, so wird diese, wie oben bei den Tangenten gezeigt wurde, = tang. b nehmlich HK als positiv; auf diese Weise sind die Cotangenten aller Winkel von 180^0 bis 270^0 positiv.

Der Bogen AHME oder der zugehörige convexe Winkel ACE = 4R — a falle zwischen 270° und 360°, so läßt sich durch eine ganz ähnliche Schlußfolge, wie vorher, zeigen, daß die hiezu gehörige Cotangente Hk ist, welche an Größe zwar = KH = cot. a ist, aber gegen den Durchmesser HL eine entgegengesetzte Lage hat, und also negativ genommen werden muß; dergestalt sind die Cotangenten aller Winkel von 270° bis 360° negativ.

ε) Die Secante von 0° = sin. tot., wächst bis 90°, wo sie = ∞ wird, oder aufhört, eine Größe zu seyn, — Secanten und Cosecanten können nicht, wie die übrigen goniometrischen Linien, als Null zum Verschwinden kommen —; über 90° hinaus wird sie wieder eine endliche Größe, und nimmt ab bis zu 180°, wo sie wieder = sin. tot. wird, u. s. w. durch den 3ten und 4ten Quadranten des Kreises.

Was die positive und negative Bedeutung der Secanten anlangt, so hat die Erklärung derselben aus ihrer Lage gegen eine gewisse Linie mehr Schwierigkeit. Nehmen wir A als den Anfangspunkt der Winkel, CE als den ersten Schenkel derselben an, so werden nach der Erklärung der bessern Schriftsteller diejenigen Secanten positiv, welche in der Richtung des zweiten Schenkels, vom Mittelpunkt des Kreises an gegen den Durchschnittspunkt in der Peripherie hin, oder vorwärts verlängert, die Tangente des Winkels schneiden, diejenigen hingegen negativ, welche in der Richtung des zweiten Schenkels, rückwärts verlängert, die Tangente des Winkels schneiden. Folglich geben hier die entgegengesetzten Richtungen des zweiten Schenkels der Winkel vom Mittelpunkt des Kreises aus genommen, den Grund für die positive und negative Bedeutung der Secanten.

Es sey ACB ein spitzer Winkel, so ist dessen Se-

cante CT, weil sie in die Richtung CB von C nach B hin fällt; dem zufolge sind die Secanten aller Winkel von 0^0 bis 90^0 positiv.

Es sey ACG ein stumpfer Winkel $= 2R - a$, so ist dessen Tangente At, also seine Secante Ct $=$ CT $=$ Sec. a; diese Secante Ct ist negativ, weil sie in die Richtung des rückwärts verlängerten Schenkels CG fällt; dem zufolge sind die Secanten aller Winkel von 90^0 bis 180^0 negativ.

Es sey der convexe Winkel ACb $= 2R + a$, kleiner als 3 Rechte, so ist seine Tangente AT, also seine Secante CT, also negativ, da CT in die rückwärts verlängerte bc fällt. Es ist also, wie man sieht, Sec. $(2R + a) =$ — Sec. a; demnach sind die Secanten aller Winkel von 180^0 bis 270^0 negativ u. s. w.

5) Da die Cosecanten der Winkel nichts anders sind, als die Secanten der Complemente oder Ergänzungswinkel jener Winkel zu 90^0, so schreiten sie in umgekehrter Folge der Secanten fort. So wie demnach sec. $0^0 =$ sin. tot., so ist cos. $0 = \infty$, sec. $90^0 = \infty$, cos. $90^0 =$ sin. tot. u. s. w.

Die positive und negative Bedeutung der Cosecanten kann eben so erklärt werden, wie die der Secanten.

Für den spitzen Winkel ACB ist die Cosecante CK positiv, so wie die Cosecanten aller Winkel von 0^0 bis 90^0.

Für einen stumpfen Winkel ACG $= 2R - a$ ist die Cosecante Ck ebenfalls positiv, so wie die Cosecanten aller Winkel von 90^0 bis 180^0.

Für einen converen Winkel ACb $= (2R + a) < 3R$ ist die Cosecante CK negativ, so wie die Cosecanten aller Winkel von 180^0 bis 360^0.

Für einen converen Winkel ACE $= (4R - a) > 3R$

wir wollen sie positiv heißen; geht diese Reihe durch o nach einer entgegengesetzten Richtung gegen die Größen der vorigen Reihe, wieder steigend und fallend bis auf o, so ist diese ganze zweite Reihe von o zu o in Beziehung auf die erste negativ. Im Allgemeinen ist es gleichgültig, welche Reihe man die positive nennen will; nimmt man die zweite Reihe als die positive an, so wird die erstere die negative; in einem bestimmten Falle aber, wie bei den goniometrischen Funktionen der Winkel bekommt die eine Reihe immer ihre bestimmte positive Bedeutung durch die bestimmte Lage der Winkel und ihren bestimmten Anfangspunkt. So oft nun eine Reihe durch o (Punkt des Verschwindens) nach einer entgegengesetzten Richtung fortläuft, so oft wechselt sie, wie leicht zu begreifen ist, ihre positive und negative Bedeutung. — Es kann aber auch ein Verschwinden der Größe im Unendlichen geben, d. h. eine wachsende Größenreihe kann so fortlaufen, daß die wachsende Größe zuletzt $= \infty$ (unendlich groß) wird, oder besser und bestimmter gesprochen, aufhört, eine wirkliche Größe zu seyn, wie z. B. tang. $90^0 = \infty$ ist. Streng genommen sind eine Größe $= \infty$ und eine andre Größe $= o$ als absolute Größen betrachtet, gleichbedeutend, nehmlich gar keine Größe. Eine Reihe kommt also zum Verschwinden, sie mag durch die Grenzen o oder ∞ nach entgegengesetzten Richtungen fortlaufen, und wird also in beiden Fällen, wenn sie nach einer der vorhergegangenen Reihe entgegengesetzten Richtung in endlichen Größen wachsend oder fallend weiter fortläuft, negativ, wenn die vorige Reihe positiv gesetzt wird. So oft also eine wachsende Größenreihe durch die Grenze $= \infty$ nach einer entgegengesetzten Richtung fallend fortschreitet, so oft wechselt sie als Zahlenreihe ihre positive und negative Bedeutung. Da hier Gesagte wird selbst ein Anfänger, dem die erste

Begriffe von den entgegengesetzten Größen nicht fremd sind, ohne Schwierigkeit begreifen.

Die Anwendung dieser unbezweifelt wahren Sätze, von der positiven und negativen Bedeutung der Größenreihen, auf die goniometrisch-trigonometrischen Linien ist sehr leicht.

α) Die Sinus der Winkel von 0^0 bis 180^0 stellen eine Zahlenreihe vor, welche vom Nullpunkt bis zur Größe des Sinus totus wächst, und von da wieder bis zu 0 abnimmt; diese ganze Reihe ist positiv. Die Sinus von 180^0 bis 360^0 bilden eine der vorigen in Zahlen völlig gleiche, von 0 bis 0 laufende, Reihe, die aber in Beziehung auf den Kreisdurchmesser A M eine Lage hat, die der Lage der obern Reihe entgegengesetzt ist; ist also diese positiv, so ist die letztere Reihe der Sinus von 180^0 bis 360^0 negativ.

β) Die Cosinus bilden zwei entgegengesetzte Reihen von senkrechten Ordinaten auf dem Durchmesser H L; ihre Durchgangspunkte in das Entgegengesetzte sind die Nullpunkte H, L; man kann diese Cosinus-Reihen als Sinus-Reihen für den Durchmesser H L ansehen, denn es ist z. B. cos. a eigentlich nicht C D sondern B F = sin. b für den Durchmesser H L als Abscissenlinie u. s. w. Heißt demnach diese Reihe im Halbkreis H A L positiv, so wird die zweite entgegengesetzte Reihe im Halbkreis H M L negativ. Daraus folgt, daß, wenn A als Anfangspunkt der Bogen oder Winkel und die Richtung der Bogen von A nach B, H u. s. w. gesetzt wird, die Cosinus von 0^0 bis 90^0 positiv sind; von 90^0 bis 270^0 negativ, von 270^0 bis 360^0 positiv.

γ) Die Tangentenreihen haben zwei verschiedene Durchgangspunkte in das Entgegengesetzte, zwei-

mahl verschwinden sie als Null, zweimahl als Unendlichgroß. — Unendlichgroß ist eigentlich ein falscher Ausdruck, weil ein sogenanntes Unendlichgroßes schlechterdings aufgehört hat, eine Größe zu seyn, also eben so wenig als Null groß heißen kann; wenn dessenungeachtet solche Nichtgrößen o und ∞ in Formeln der höhern Analysis vorkommen, so dienen sie hier mittelst der Form ihrer Entstehung bloß dazu, um Verhältnisse und Relationen endlicher Größen zu entwickeln. — Da die Tangentenreihe von 0^0 bis 90^0 eine steigende ist, deren letztes Glied bei 90^0 im Unendlichen verschwindet, so geht sie über 90^0 hinaus in das Entgegengesetzte. Sind also die Tangenten von 0^0 bis 90^0 positiv, so sind die Tangenten von 90^0 bis 180^0 negativ; bei 180^0 geht die Reihe durch o in das Entgegengesetzte bis 270^0, also sind die Tangenten von 180^0 bis 270^0 positiv; die Reihe geht bei 270^0 nochmals durch ∞ in das Entgegengesetzte bis 360^0, also sind die Tangenten von 270^0 bis 360^0 negativ.

Eben solche Betrachtungen lassen sich mit der positiven und negativen Bedeutung der Cotangenten, Secanten und Cosecanten anstellen. Die Cotangenten haben, wie die Tangenten, vier Durchgangspunkte in das Entgegengesetzte, zweimahl als o, zweimahl als ∞; die Secanten und Cosecanten hingegen haben, wie die Sinus und Cosinus, nur zwei solche Durchgangspunkte, beide als ∞, daher geben sie auch nur zwei entgegengesetzte Reihen oder Progressionen.

Nimmt man die beiden gegebenen Erklärungen zusammen, so muß jede Dunkelheit verschwinden, die so mancher Liebhaber der Mathematik in der Bedeutung der goniometrischen Linien finden mag; und wir zwei-

seln sehr, daß sich eine noch bessere Methode werde ausfindig machen lassen, diesen Gegenstand in ein helles Licht zu setzen.

Die Bedeutung der goniometrischen Linien für negative Winkel ist aus der vorhergehenden Erläuterung nun ganz leicht abzuleiten. Ein Bogen AE oder Winkel a' heißt bloß in Beziehung auf einen Bogen AB oder Winkel a negativ, wenn CA der erste Schenkel beider Winkel, oder A der Anfangspunkt beider Bogen oder Winkel ist, und der Winkel a positiv gesetzt wird; die Bogen AB und AE laufen nehmlich von A aus nach entgegengesetzten Richtungen, oder die Winkel a und a' haben gegen AC, deren Endpunkt A der Nullpunkt für beide Winkel ist, eine entgegengesetzte Lage. In der Theorie ist es gleichgültig, welchen Winkel nach entgegengesetzten Seiten von CA man positiv und welchen man negativ nennen will. In bestimmten Fällen und practischen Aufgaben wird die positive Lage der Winkel, also auch die negative, jederzeit gegeben; Beispiele von negativen Winkeln kommen übrigens in der Vermessungskunde häufig genug vor, wie wir weiterhin sehen werden.

Ist Sinus von a positiv, so ist Sinus von a' = Sin. — a negativ = — Sin. a, denn BD hat gegen DE in Beziehung auf AM eine entgegengesetzte Lage.

Zum positiven stumpfen Winkel ACG gehört der positive Sinus Gd, zu dem negativen stumpfen Winkel ACb oder Bogen Ab gehört der Sinus bd = — Gd = — Sin. ACb oder ACG. Zu einem negativen spitzen oder stumpfen Winkel gehört also ein negativer Sinus, an absoluter Größe aber = dem Sinus desselben Winkels positiv genommen.

Die Cosinus eines spitzen, positiven sowohl negativen, Winkels sind positiv, z. B. + Cos. a =

+ Cos. a′ = + Cos. — a, nehmlich ſowohl BF als Ef poſitiv; die Cosinus eines ſtumpfen poſitiven ſowohl als negativen Winkels ACG, oder ACb ſind negativ, nehmlich ſowohl FG als fb poſitiv.

Die Tangente eines negativen ſpitzen Winkel a′ = a iſt negativ, nehmlich At als Entgegenſetzung von AT = tang. a iſt negativ. Die Tangenſe eines negativen ſtumpfen Winkels ACb iſt gleich der Tangente eines poſitiven Winkels zwiſchen 180° und 270°, alſo poſitiv.

Eben ſo findet man, daß die Cotangente eines negativen ſpitzen Winkels negativ, eines negativen ſtumpfen poſitiv iſt; daß ferner die Secante eines negativen ſpitzen Winkels poſitiv, eines ſtumpfen negativ; die Coſecante eines negativen ſpitzen Winkels negativ, und eines ſtumpfen Winkels auch negativ iſt.

§. 5.

Einfache Hauptformeln zur Größenbeſtimmung und Vergleichung der goniometriſchen (oder trigonometriſchen) Linien. (Fig. 2.)

Mit einem beliebigen Halbmeſſer CA = r oder = 1 ſey ein Kreis beſchrieben, der Bogen AB oder der zu ihm gehörige Centriwinkel ſey = a, das Complement von a zu 90° = b; ſo iſt BD = sin. a DC oder vielmehr BG = cos. a, AT = tang. a EM = cot. a, CT = sec. a, CM = cosec. a, AD = sin. vers. a, EG = cos. vers. a. Nach Sätzen der Elementargeometrie finden unter dieſen Linien, als Funktionen eines Winkels a, folgende Gleichungen Statt man mag für den Halbmeſſer oder Sinus totus =

1 oder 10 oder 10000, oder welche Zahl man sonst will, setzen:

I) $\text{Sin.}^2 a + \text{Cos.}^2 a = r^2$ oder $= 1$ für $r = 1$.

Daraus folgt:

$$\sin. a = \sqrt{r^2 - \cos.^2 a} = \sqrt{1 - \cos.^2 a} \text{ für } r = 1.$$

$$\cos. a = \sqrt{r^2 - \sin.^2 a} = \sqrt{1 - \sin.^2 a}$$

II) $\text{Cos. a} : \sin. a = r : \text{tang. a}$, also

$$\text{tang. a} = \frac{r \,.\, \sin. a}{\cos. a} = \frac{\sin. a}{\cos. a} \text{ für } r = 1.$$

$$\sin. a = \frac{\cos. a \,.\, \text{tang. a}}{r} = \cos. a \,.\, \text{tang. a}$$

$$\cos. a = \frac{r \,.\, \sin. a}{\text{tang. a}} = \frac{\sin. a}{\text{tang. a}}$$

III) $\text{Sin. a} : \cos. a = r : \text{cot. a}$, weil $\triangle CDB = \triangle CBG \sim \triangle CEM$,

$$\text{also cot. a} = \frac{r \,.\, \cos. a}{\sin. a} = \frac{\cos. a}{\sin. a} \text{ für } r = 1.$$

$$\sin. a = \frac{r \,.\, \cos. a}{\text{cot. a}} = \frac{\cos. a}{\text{cot. a}}$$

$$\cos. a = \frac{\sin. a \,.\, \text{cot. a}}{r} = \sin. a \,.\, \text{cot. a}$$

Da auch $AT : AC = CE : EM$, so ist die Cotangente eines Winkels die dritte Proportionale zu der Tangente und dem Sinus totus.

nehmlich $\text{tang. a} : r = r : \text{cot. a}$ oder $\text{tang a} : 1 = 1 : \text{cot. a}$,

also $\text{tang. a} \,.\, \text{cot. a} = r^2 = 1$; da auch für einen andren Winkel b

$$\text{tang. b} \,.\, \text{cot. b} = r^2 = 1,$$

so folgt daraus: $\text{tang. a} \,.\, \text{cot. a} = \text{tang. b} \,.\, \text{cot. b} = 1$.

nehmlich das Product der Tangente und Cotangente eines Winkels, welcher Winkel es auch seyn mag, ist eine unveränderliche Größe.

IV) Cos. a : r = r : sec. a,

$$\text{also sec. a} = \frac{r^2}{\text{cos. a}} = \frac{1}{\text{cos. a}}, \text{ also auch}$$

$$\text{cos. a . sec. a} = 1.$$

Da auch cos. b . sec. b = 1, so sind auch die Producte der Cos. und Sec. für verschiedene Winkel eine unveränderliche Größe.

V) Sin. a : r = r : cosec. a,

$$\text{also cosec. a} = \frac{r^2}{\text{sin. a}} = \frac{1}{\text{sin a}}, \text{ also auch}$$

$$\text{sin. a . cosec. a} = 1.$$

Da auch sin. b . cosec. b = 1, so sind auch die Producte der Sin. und Cosec. für verschiedene Winkel eine unveränderliche Größe.

VI) Sin. vers. a = r — cos. a

cos. vers. a = r — sin. a.

Aus diesen Grundformeln lassen sich mehrere andere sehr leicht ableiten, z. B.

tang. a . cos. a = sin. a nach II)

$$\text{tang. a} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} = \frac{\text{sin. a}}{\sqrt{1 - \text{sin.}^2 a}}$$

$$\text{cot. a} = \frac{\text{cos. a}}{\text{sin. a}} = \frac{\text{cos. a}}{\sqrt{1 - \text{cos.}^2 a}}$$

$$\text{tang. a} = \frac{1}{\text{cot. a}} \text{ und cot. a} = \frac{1}{\text{tang. a}} \text{ u. s. w.}$$

Aus den angeführten Hauptformeln ersieht man deutlich, daß, wenn einmahl die Sinus und Cosinus

der Winkel berechnet sind, die übrigen Linien, als Zahlengrößen, sich aus jenen bestimmen lassen; noch leichter aber werden aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus die Logarithmen der übrigen Linien, nehmlich durch eine bloße Subtraction gefunden, wie man aus logarithmisch-trigonometrischen Tafeln ersehen kann. Die Sinus und Cosinus brauchten übrigens nur für alle Winkel von 0° bis 45° berechnet zu werden, um dieselben zugleich für alle übrigen Winkel zu haben, nach den oben angemerkten Sätzen, daß der Sinus eines spitzen Winkel gleich ist dem Cosinus seines Complements zu 90° und umgekehrt, und der Sinus und Cosinus eines Winkels zugleich noch 3 andern Winkeln im Kreise zugehört u. s. w.

§. 6.

Formeln zur Bestimmung zusammengesetzter Winkelfunktionen aus einfachen.

(Fig. 3.)

Es wird angenommen, die Sinus und Cosinus zweier Winkel a und b seyen in Zahlen, nach dem Einheitsmaß des Sinus totus = 1,000... oder = 10000 Mill., bestimmt; daraus sollen die Sinus und Cosinus von andern Winkeln gefunden werden, welche aus a und b durch Addition oder Subtraction entstehen, so wie daraus die Sinus und Cosinus für Vielfache eines Winkels a, oder Theile desselben u. s. w. Hierzu dienen folgende vier Fundamentalformeln, die gewissermaßen die Basis der ganzen Goniometrie, eine reiche Quelle zur Auffindung einer fast unzähligen Menge anderer Formeln sind, und welche die Möglichkeit einer wirklichen Zahlenberechnung der goniometrischen Linien erst deutlich machen.

Es wird angenommen, die Sinus und Cosinus zweier Winkel a und b seyen in Zahlen bestimmt, so ist:

I) $\text{Sin.}(a+b) = (\text{sin.a} \cdot \text{cos.b} + \text{sin.b} \cdot \text{cos.a}) : r$

II) $\text{Sin.}(a-b) = (\text{sin.a} \cdot \text{cos.b} - \text{sin.b} \cdot \text{cos.a}) : r$

III) $\text{Cos.}(a+b) = (\text{cos.a} \cdot \text{cos.b} - \text{sin.a} \cdot \text{sin.b}) : r$

IV) $\text{Cos.}(a-b) = (\text{cos.a} \cdot \text{cos.b} + \text{sin.a} \cdot \text{sin.b}) : r$

Setzt man $r = 1$, so fällt der Divisor r in diesen Formeln weg, und es wird z. B.

$\text{sin.}(a+b) = (\text{sin.a} \cdot \text{cos.b} + \text{sin.b} \cdot \text{cos.a})$ ꝛc.

Beweis: (Fig. 3.) Mit irgend einem Halbmesser CA, als Sinus totus betrachtet, sey ein Kreisbogen AD beschrieben, welcher der Summe zweier Bogen AB, BD gleich ist, und vom größern Bogen AB der kleinere BD = BE abgeschnitten. Ist nun Bogen AB oder sein Centriwinkel = a, BD = b, so ist AD = (a + b), und AE = (a — b); demnach ist (die Construction der Hauptlinien und Hülfslinien wird sehr leicht aus der Figur erkannt) BF = sin. a, FC = cos. a, DR = sin. b, CR = cos. b, DH = sin. (a + b), HC = cos. (a + b), EG = sin. (a — b), GC = cos. (a — b).

Nun ist $\triangle DNR \sim \triangle CKR$ wegen der Gleichheit ihrer Winkel, indem DRC = 1 R, und auch KRN = 1 R u. s. w., auch ist $\triangle CKR \sim \triangle CFB$.

Folglich ist CB : BF = CR : RK oder

$$r : \text{sin.a} = \text{cos.b} : HN, \text{ daher}$$

$$HN = \frac{\text{sin.a} \cdot \text{cos.b}}{r}$$

ferner CB : CF = DR : DN oder

$$r : \text{cos.a} = \text{sin.b} : DN, \text{ daher}$$

$$DN = \frac{\text{sin.b} \cdot \text{cos.a}}{r}$$

Digitized by Google

Also ist $HN + DN = DH$ oder $\sin.(a + b) = \frac{\sin. a \,.\, \cos. b + \sin. b \,.\, \cos. a}{r}$ (I)

Ferner ist $MN = DN$, weil $ER = DR$ u. s. w.,
also $EG = HM = HN - DN$ oder

$$\sin.(a - b) = \frac{\sin. a \,.\, \cos. b - \sin. b \,.\, \cos. a}{r} \quad \text{(II)}$$

Es ist ferner

$CB : CF = CR : CK$, oder

$r : \cos. a = \cos. b : CK$, also $CK = \frac{\cos. a \,.\, \cos. b}{r}$

und $CB : BF = DR : RN$ oder

$r : \sin. a = \sin. b : RN$, also $RN = \frac{\sin. a \,.\, \sin. b}{r}$

Da nun die Linien EG, RK, DH parallel sind, und $ER = DR$, so ist auch $KG = KH = RN$; daher $CH = CK - RN$ und $CG = CK + RN$, oder

$$\cos.(a + b) = \frac{\cos. a \,.\, \cos. b - \sin. a \,.\, \sin. b}{r} \quad \text{(III)}$$

und $$\cos.(a - b) = \frac{\cos. a \,.\, \cos. b + \sin. a \,.\, \sin. b}{r} \quad \text{(IV)}$$

Aus diesen vier zusammengesetzten Grundformeln lassen sich eine große Anzahl anderer ableiten, von welchen wir hier nur die wichtigsten anführen wollen, nehmlich diejenigen, welche entweder die Möglichkeit, die Hülfsmittel und den Gang der goniometrischen Berechnung erläutern, oder welche zu wirklichen trigonometrischen Formeln und Rechnungen, wovon wir später mehrere Beispiele sehen werden, nothwendig sind.

Man hat außer dem gegebenen Beweise der vier Formeln noch andere, die aber nicht allein nicht kürzer

und einfacher, sondern auch mit weniger wirklicher geometrischer Anschauung der verglichenen Größen verbunden sind. Einen solchen andern Beweis kann man in Klügels Math. Wörterb. II. 517 finden; — Klügel nennt ihn den leichtesten, welches ich bezweifle — noch einen andern in Kästner's Anfangsgr. d. Arithmetik u. Geom. I. Th. 512 ꝛc.

§. 7.

Abgeleitete goniometrische (trigonometrische) Formeln.

Mit den Buchstaben a und b in den vorerwähnten vier Grundformeln kann man alle Winkel vorstellen, folglich auch mit den Verbindungen $(a + b)$ und $(a - b)$ alle nur mögliche Winkel.

Setzt man $b = a$, so erhält man für $r = 1$.

1) Sin. $(a + a)$ oder $\sin. 2a = 2 \sin. a . \cos. a$, daraus auch $\sin. a . \cos. a = \frac{1}{2} \sin. 2a$ (nach Formel I.)

2) $\cos. 2a = \cos.^2 a - \sin.^2 a$, daher auch
$= [\cos.^2 a - (1 - \cos.^2 a)] = 2 \cos.^2 a - 1$;
daraus ergiebt sich ferner:
$2 \cos.^2 a = 1 + \cos. 2a$
$\cos. a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a}$; setzt man hier für a den Winkel $\frac{1}{2}a$, so ist:

3) $\cos. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. a}$; daraus folgt:
$2 \cos.^2 \frac{1}{2}a - 1 = \cos. a$;
und, da $\cos.^2 \frac{1}{2}a = 1 - \sin.^2 \frac{1}{2}a$ (nach den Hauptformeln)
so ist $\cos. a = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2}a$, also
$\sin.^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. a$, folglich:

4) $\text{Sin. } \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos. a}$

Nach 3) und 4) lassen sich also die Sinus und Cosinus eines halben Winkels aus dem Cosinus des ganzen Winkels finden.

Setzt man in den Grundformeln I) III), $b = 2a$, so erhält man vermittelst gehöriger Substitution aus 1) und 2)

5) $\text{Sin. } 3a = 3 \sin. a \,.\, \cos.^2 a - \sin.^3 a$, und
$\cos. 3a = \cos.^3 a - 3 \cos. a \,.\, \sin.^2 a$; u. s. w.

Die allgemeinen Formeln für die Sinus und Cosinus irgend eines Vielfachen von einem Winkel, nehmlich für sin. na und cos. na können hier nicht vorgetragen werden.

Durch Combination der vier Grundformeln erhält man leicht:

6) $\text{Sin. } (a + b) + \sin. (a - b) = 2 \sin. a \,.\, \cos. b.$

7) $\text{Sin. } (a + b) - \sin. (a - b) = 2 \sin. b \,.\, \cos. a.$

8) $\text{Cos. } (a + b) + \cos. (a - b) = 2 \cos. a \,.\, \cos. b.$

9) $\text{Cos. } (a - b) - \cos. (a + b) = 2 \sin. a \,.\, \sin. b.$

Setzt man, welches immer möglich ist, irgend einen Winkel $\alpha = a + b$ einen andern Winkel $\beta = a - b$, so ist $a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; also wird nach 6) und 7)

10) $\text{Sin. } \alpha + \sin. \beta = 2 \,.\, \sin. \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos. \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

11) $\text{Sin. } \alpha - \sin. \beta = 2 \,.\, \sin. \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \,.\, \cos. \frac{1}{2}(\alpha + \beta),$
eben so nach 8) und 9).

12) $\text{Cos. } \alpha + \cos. \beta = 2 \,.\, \cos. \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos. \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$

13) $\text{Cos. } \beta - \cos. \alpha = 2 \,.\, \sin. \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \sin. \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

Aus 10) und 11) folgt:

14) $\frac{\text{Sin. } \alpha + \text{sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha - \text{sin. } \beta} = \text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \text{cot. } \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$,

weil überhaupt $\frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} = \text{tang. a}$, und cot. a

$= \frac{1}{\text{tang. a}}$ ist.

Aus 12) und 13) folgt:

15) $\frac{\text{Cos. } \beta - \text{cos. } \alpha}{\text{Cos. } \beta + \text{cos. } \alpha} = \text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Aus 10) und 12) folgt:

16) $\frac{\text{Sin. } \alpha + \text{sin. } \beta}{\text{Cos. } \alpha + \text{cos. } \beta} = \text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Aus 11 und 13) folgt:

17) $\frac{\text{Sin. } \alpha - \text{sin. } \beta}{\text{Cos. } \beta - \text{cos. } \alpha} = \text{cot. } \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

Aus 6) und 8).

18) $\frac{\text{Sin. } (a + b) + \text{sin. } (a - b)}{\text{Cos. } (a - b) + \text{cos. } (a + b)} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} = \text{tang. a.}$

Aus 6) und 9).

19) $\frac{\text{Sin. } (a + b) + \text{sin. } (a - b)}{\text{Cos. } (a - b) - \text{cos. } (a + b)} = \frac{\text{cos. b}}{\text{sin. b}} = \text{cot. b.}$

20) $\text{Tang. a} \pm \text{tang. b} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} \pm \frac{\text{sin. b}}{\text{cos. b}}$

$= \frac{\text{sin. a . cos. b} \pm \text{sin. b . cos. a}}{\text{cos. a . cos. b}}$

$= \frac{\text{sin. } (a \pm b)}{\text{cos. a . cos. b}}$

21) $\text{Cot. b} \pm \text{cot. a} = \frac{\text{cos. b}}{\text{sin. b}} \pm \frac{\text{cos. a}}{\text{sin. a}} = \frac{\text{sin. (a} \pm \text{b)}}{\text{sin. a . sin. b}}$

Daraus folgt:

22) $\frac{\text{Tang. a} + \text{tang. b}}{\text{Tang. a} - \text{tang. b}} = \frac{\text{sin. (a} + \text{b)}}{\text{sin. (a} - \text{b)}}$.

23) $\frac{\text{Cot. b} + \text{cot. a}}{\text{Cot. b} - \text{cot. a}} = \frac{\text{sin. (a} + \text{b)}}{\text{sin. (a} - \text{b)}}$ u. s. w.

Ferner ist:

24) $\text{Tang. (a} \pm \text{b)} = \frac{\text{sin. (a} \pm \text{b)}}{\text{cos. (a} \pm \text{b)}}$

$$= \frac{\text{sin. a . cos. b} \pm \text{sin. b . cos. a}}{\text{cos. a . cos. b} \mp \text{sin. a . sin. b}}$$

$$= \frac{\frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} \pm \frac{\text{sin. b}}{\text{cos. b}}}{1 \pm \frac{\text{sin. a . sin. b}}{\text{cos. a . cos. b}}} = \frac{\text{tang. a} \pm \text{tang. b}}{1 \pm \text{tang. a . tang. b}}$$

25) $\text{Cot. (a} \pm \text{b)} = \frac{1}{\text{tang. (a} \pm \text{b)}}$

$$= \frac{1 \pm \text{tang. a . tang. b}}{\text{tang. a} \pm \text{tang. b}}.$$

Die Tangente von 45^0 ist = sin. tot. = 1, welches leicht aus der geometrischen Construction in einem Kreise erkannt wird.

Setzt man also in 24) den Winkel $a = 45^0$, so folgt:

26) $\text{Tang. (}45^0 + \text{b)} = \frac{1 + \text{tang. b}}{1 - \text{tang. b}}$

$\text{Tang. (}45^0 - \text{b)} = \frac{1 - \text{tang. b}}{1 + \text{tang. b}}$.

Eben so ist $\cot.(45^0 + b) = \frac{1 - \text{tang. b}}{1 + \text{tang. b}}$ u. s. w.

Diese Formel wird weiterhin bei einem etwas versteckten Beweis nützlich seyn.

27) $\text{Sin. a} = \sin.(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a) = 2 \sin.\frac{1}{2}a \,.\, \cos.\frac{1}{2}a$

28) $\text{Cos. a} = \cos.(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a) = \cos.^2\frac{1}{2}a - \sin.^2\frac{1}{2}a$;
daher

29) $1 + \cos.a = 2\cos.^2\frac{1}{2}a$, weil $1 - \sin.^2\frac{1}{2}a = \cos.^2\frac{1}{2}a$ ist.

30) $1 - \cos.a = 2\sin.^2\frac{1}{2}a$, weil $1 - \cos.^2\frac{1}{2}a = \sin.^2\frac{1}{2}a$ ist.

Aus diesen Formeln lassen sich noch eine große Menge anderer ableiten, z. B. aus 6) folgt: $\text{Sin. a} \,.\, \cos. b = \frac{1}{2}[\sin.(a + b) + \sin.(a - b)]$ u. s. w. Es mag und kann an den angeführten genug seyn, und selbst von diesen stehen mehrere nur darum hier, um weniger geübten aber denkenden Lesern die Methode der Entwickelung bemerkbar zu machen. Wie man sieht, ist diese Entwickelung durchaus sehr leicht, und selbst ein Anfänger wird nun in vorkommenden Fällen die Ableitung noch anderer etwa nothwendiger Formeln ohne besondere Anstrengung selbst bewerkstelligen können.

Unter diesen Ableitungen giebt es auch mehrere Curiosa, die zwar keinen practischen Werth haben, aber doch Liebhaber der Mathematik zu einer Uebung im Denken und Analysiren dienen können. Als ein Beispiel dieser Art stehe hier folgender Satz: Wenn die Summe dreier Winkel $a + b + c = 180^0$, oder wenn demnach a, b, c, die Winkel eines Dreiecks sind, so ist die Summe der Tangenten dieser Winkel gleich dem Product dieser Tangenten, nehmlich:

$\text{tang. a} + \text{tang. b} + \text{tang. c} = \text{tang. a} \,.\, \text{tang. b} \,.\, \text{tang. c.}$

Der Beweis dafür läßt sich auf zweierlei Art geben; ich will ihn so führen, wie er aus obigen Formeln am einfachsten hervorgeht:

Es ist $\text{tang.a} + \text{tang.b} + \text{tang.c}$

$$= \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}} + \frac{\text{sin. b}}{\text{cos. b}} + \frac{\text{sin. c}}{\text{cos. c}}$$

$$= \frac{\text{sin. a . cos. b . cos. c} + \text{sin. b . cos. a . cos. c} + \text{sin. c . cos. a . cos b}}{\text{cos. a . cos. b . cos. c}}$$

$$= \frac{\text{cos. c . sin. (a + b)} + \text{sin. c . cos. a . cos. b}}{\text{cos. a . cos. b . cos. c}}$$

$$= \frac{\text{cos. c . sin. c} + \text{sin. c . cos. a . cos. b}}{\text{cos. a . cos. b . cos. c}},$$ weil

(a + b) die Ergänzung von c zu 180^0, und also sin (a + b) = sin. c ist;

$$= \frac{\text{sin. c . (} - \text{cos. (a + b)} + \text{cos. a . cos. b)}}{\text{cos. a . cos. b . cos. c}},$$ weil

cos. c = — cos. (a + b),

$$= \frac{\text{sin. c. (} - \text{cos. a . cos. b} + \text{sin. a . sin. b} + \text{cos. a . cos. b)}}{\text{cos. a . cos. b . cos. c}}$$

$$= \frac{\text{sin. a . sin. b . sin. c}}{\text{cos. a . cos. b . cos. c}} = \text{tang. a . tang. b . tang. c,}$$

Nehmlich tang. a . tang. b . tang. c
= tang. a + tang. b + tang. c.

Dieser Satz gilt auch für a + b + c = 90^0, welches zu beweisen, auch weniger geübten Lesern gelingen wird.

Es wird nützlich seyn, die in den §§. 5, 6, 7 gefundenen Formeln, nehmlich die vorzüglichsten und brauchbarsten zur leichten Uebersicht und schnellen Auffindung in Fällen, die uns später vorkommen werden, in einem tabellarisch geordneten Schema hier beizufügen.

§. 8.

Tabelle goniometriſch = trigonometriſcher Formeln oder Gleichungen, für r oder Sin. tot. = 1.

Einfache:

1) $\text{Sin.}^2 a + \cos.^2 a = 1.$

2) $\text{Sin. } a = \sqrt{1 - \cos.^2 a}$

3) $\text{Cos. } a = \sqrt{1 - \sin.^2 a}$

4) $\text{Tang. } a = \frac{\sin. a}{\cos. a}$

5) $\text{Cotang. } a = \frac{\cos. a}{\sin. a}$

6) $\text{Sec. } a = \frac{1}{\cos. a}$

7) $\text{Cosec. } a = \frac{1}{\sin. a}$

8) $\text{Sin. vers. } a = 1 - \cos. a$

9) $\text{Cos. vers. } a = 1 - \sin. a$

10) $\text{Tang. } a \,.\, \text{cot. } a = 1$

11) $\text{Tang. } a = \frac{1}{\text{cot. } a}$

12) $\text{Cot. } a = \frac{1}{\text{tang. } a}$

Zuſammengeſetzte Grundformeln:

13) $\text{Sin. } (a+b) = \sin. a \,.\, \cos. b + \sin. b \,.\, \cos.$

14) $\text{Sin. } (a-b) = \sin. a \,.\, \cos. b - \sin. a \,.\, \cos.$

15) $\text{Cos. } (a + b) = \text{cos. } a \,.\, \text{cos. } b - \text{sin. } a \,.\, \text{sin. } b$

16) $\text{Cos. } (a - b) = \text{cos. } a \,.\, \text{cos. } b + \text{sin. } a \,.\, \text{sin. } b$

Abgeleitete:

17) $\text{Sin. } 2a = 2 \,\text{sin. } a \,.\, \text{cos. } a$

18) $\text{Cos. } 2a = \text{cos.}^2 a - \text{sin.}^2 a$

19) $\text{Sin. } \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ cos. } a}$

20) $\text{Cos. } \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ cos. } a}$

21) $\text{Sin. } a = 2 \,\text{sin. } \frac{1}{2}a \,.\, \text{cos. } \frac{1}{2}a$

22) $\text{Cos. } a = \text{cos.}^2 \frac{1}{2}a - \text{sin.}^2 \frac{1}{2}a$

23) $1 + \text{cos. } a = 2 \,\text{cos.}^2 \frac{1}{2}a$

24) $1 - \text{cos. } a = 2 \,\text{sin.}^2 \frac{1}{2}a$

25) $\text{Sin. } (a + b) + \text{sin. } (a - b) = 2 \,\text{sin. } a \,.\, \text{cos. } b$

26) $\text{Sin. } (a + b) - \text{sin. } (a - b) = 2 \,\text{sin. } b \,.\, \text{cos. } a$

27) $\text{Cos. } (a + b) + \text{cos. } (a - b) = 2 \,\text{cos. } a \,.\, \text{cos. } b$

28) $\text{Cos. } (a - b) - \text{cos. } (a + b) = 2 \,\text{sin. } a \,.\, \text{sin. } b$

29) $\text{Sin. } a + \text{sin. } b = 2 \,\text{sin. } \frac{1}{2}(a + b) \,.\, \text{cos. } \frac{1}{2}(a - b)$

30) $\text{Sin. } a - \text{sin. } b = 2 \,\text{sin. } \frac{1}{2}(a - b) \,.\, \text{cos. } \frac{1}{2}(a + b)$

31) $\text{Cos. } a + \text{cos. } b = 2 \,\text{cos. } \frac{1}{2}(a + b) \,.\, \text{cos. } \frac{1}{2}(a - b)$

32) $\text{Cos. } b - \text{cos. } a = 2 \,\text{sin. } \frac{1}{2}(b + b) \,.\, \text{sin. } \frac{1}{2}(a - b)$

33) $\dfrac{\text{Sin. } a + \text{sin. } b}{\text{Sin. } a - \text{sin. } b} = \dfrac{\text{tang. } \frac{1}{2}(a + b)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(a - b)}$

34) $\dfrac{\text{Cos. } b - \text{cos. } a}{\text{Cos. } b + \text{cos } a} = \text{tang. } \frac{1}{2}(a + b) \,.\, \text{tang. } \frac{1}{2}(a - b)$

35) $\dfrac{\text{Sin. } a + \text{sin. } b}{\text{Cos. } a + \text{cos. } b} = \text{tang. } \frac{1}{2}(a + b)$

36) $\dfrac{\text{Sin. } a - \text{sin. } b}{\text{Cos. } b - \text{cos. } a} = \text{cot} \quad (a + b)$

Digitized by Google

37) $\text{Tang. a} \pm \text{tang. b} = \frac{\text{sin. (a} \pm \text{b)}}{\text{cos. a . cos. b}}$

38) $\text{Cot. b} \pm \text{cot. a} = \frac{\text{sin. (a} \pm \text{b)}}{\text{sin. a . sin. b}}$

39) $\frac{\text{Tang. a} + \text{tang. b}}{\text{Tang. a} - \text{tang. b}} = \frac{\text{sin. (a} + \text{b)}}{\text{sin. (a} - \text{b)}}$

40) $\frac{\text{Cot. b} + \text{cot. a}}{\text{Cot. b} - \text{cot. a}} = \frac{\text{sin. (a} + \text{b)}}{\text{sin. (a} - \text{b)}}$

41) $\text{Tang. (a} \pm \text{b)} = \frac{\text{tang. a} \pm \text{tang. b}}{1 \mp \text{tang. a . tang. b}}$

42) $\text{Cotang. (a} \pm \text{b)} = \frac{1 \mp \text{tang. a . tang. b}}{\text{tang. a} \pm \text{tang. b}}$

43) $\text{Tang. (45}^0 + \text{b)} = \frac{1 + \text{tang. b}}{1 - \text{tang. b}}$

44) $\text{Tang. (45}^0 - \text{b)} = \frac{1 - \text{tang. b}}{1 + \text{tang. b}}$

§. 9.

Von der Berechnung der goniometrisch-trigonometrischen Linien.

Vermittelst der angeführten Formeln, aus welchen sich wieder mehrere andere für besondere Annahmen *)

---

*) Wenn man z. B. in der Formel 29) den Winkel $\text{b} = 90^0 - \text{a}$ annimmt, so wird $\frac{1}{2}(\text{a} + \text{b}) = 45^0$, dessen Sinus $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist, wie sich durch eine geometrische Construction im Kreise für den Halbmesser $= 1$, sehr

herleiten lassen, und einiger Lehrsätze, welche den Kreis und reguläre Vielecke im Kreise betreffen, wird die Berechnung der goniometrischen Linien als Zahlengrößen, welche das Verhältniß der Längen dieser Linien zum Sinus totus allgemein ausdrücken, möglich und begreiflich. Nimmt man bei dieser Berechnung den Sinus totus, welches jeder Kreishalbmesser seyn kann, als Einheit = 1 an, so erhält man die natürlichen Sinus, Cosinus u. s. w. der Winkel. Es ist sehr leicht einzusehen, daß man diese natürlichen Zahlen der goniometrischen Linien, welche in Decimalbrüchen vorgestellt werden, und die theils kleiner, theils größer als der Sin. tot. = 1 sind, für ein anderes System, worin der Sinus totus einer andern Zahl, z. B. 100 oder 1000 ꝛc., allgemein irgend einer Zahl r gleichgesetzt wird, ebenfalls mit dieser Zahl r multipliciren müsse, um das bestimmte Verhältniß dieser Linien gegen den Sinus totus unverändert zu erhalten. Zum logarithmischen Gebrauch wird Sin. tot. gewöhnlich = 10000 Millionen angenommen. Da die goniometrischen Linien schon berechnet sind, so kann unsern jüngern Lesern nur daran gelegen seyn, eine kurze Uebersicht dieser in jedem Fall sehr mühsamen weitläufigen Berechnung zu haben. Es wird hinreichen, die Hauptmomente und den einfachsten Gang derselben hier bemerklich zu machen.

---

leicht zeigen läßt; daraus folgt sin. a + cos. a = cos. $(45^0 - a) \cdot \sqrt{2}$; eben so wird dann nach Formel 30) sin. a — cos. a = sin. $(a - 45)\sqrt{2}$, oder cos. a — sin. a = sin. $(45^0 - a) \cdot \sqrt{2}$, welche Formeln dazu nützen können, aus den Sinus und Cosinus von 0^0 bis $22\frac{1}{2}^0$ die Sinus und Cosinus weiter bis 45^0 zu berechnen.

1) r oder Sin. tot. = 1,00... oder = 10000 Millionen.

2) Sin. $45^0 = \frac{1}{2}$ Sehne von $90^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2} = \frac{1}{2} r \sqrt{2}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$, weil nach der geometrischen Construction das Quadrat dieser Sehne $= 2r^2$ ist.

3) Cos. 45^0 = sin. $45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, nach der geometr. Constr.

4) Sin. $30^0 = \frac{1}{2}$ Sehne von $60^0 = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} = 5000$ Mill., wenn Sin. tot. = 10000 Mill.

5) Cos. $30^0 = \sqrt{1 - \text{sin.}^2\, 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ für $r = 1$.

6) Sin. $18^0 = \frac{1}{2}$ Sehne von 36^0 = der halben Seite eines regulären Zehnecks im Kreise $= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

Denn man denke sich mit irgend einem Halbmesser $CB = r$ einen Kreis beschrieben (C der Mittelpunkt), diesen Halbmesser in D im mittlern und äußern Verhältniß getheilt, und die Sehne AB = dem größern Abschnitt CD gemacht, so ist AB die Seite eines regulären Zehneckes in diesem Kreise, nach einem Satz der Elementargeometrie. Nun sey $AB = CD = x$ die gesuchte Größe, so ist der kleinere Abschnitt $BD = r - x$.

Nach der Construction ist:

$$BD : CD = CD \text{ oder } AB : CB \text{ oder}$$
$$(r - x) : x = x : r, \text{ also}$$
$$x^2 = r^2 - rx, \text{ und } x^2 + rx = r^2.$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf, so erhält man:

$$x = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1); \text{ also}$$

ist die Seite des Zehnecks

$$AB = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \text{ für } r = 1,$$

folglich Sin. $18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

7) Cos. $18^0 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$; denn es iſt:

Cos. $18^0 = \sqrt{1 - \sin.^2 18^0} = \sqrt{1 - \frac{(6 - 2\sqrt{5})}{16}}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$ durch Subſtitution des Werthes $\sin.^2 18^0$ in 6) und gehörige Reduction.

8) Sin. $15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; denn nach §. 8. Formel 19) iſt sin. $\frac{1}{2} \cdot 30^0$ oder sin. $15^0 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos. 30^0}$;

Da nun Cos. $30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ſo iſt:

Sin. $15^0 = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} =$

$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ *)

9) Cos. $15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; denn es iſt:

Cos. $15^0 = \sqrt{1 - \sin.^2 15^0} = \sqrt{1 - \frac{(8 - 2\sqrt{12})}{16}}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ durch eine ähnliche Reduction, wie in 8.)

10) Aus Sinus und Cosinus von 18^0 laſſen ſich nach den Formeln 17) 18) 19) 20) in §. 8. die Sinus und Cosinus von 36^0, von 9^0, von $4\frac{1}{2}^0$ u. ſ. w. berechnen; aus Sinus und Cosinus von 15^0 die Sin. und Cos. von $7\frac{1}{2}^0$ u. ſ. w.

11) Nach den Formeln 14) und 16) findet man:

---

*) Dieſe Reduction geſchieht alſo: $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$. Nun iſt $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6 + 2 - 2\sqrt{12}}$, alſo nach der gewöhnlichen Methode, die Quadratwurzel auszuziehen, $\sqrt{6 + 2 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$; alſo $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Digitized by Google

Sin. $(18^0 - 15^0)$ = sin. 3^0 =

$\frac{1}{16}[\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + 2\sqrt{(5+\sqrt{5})}]$

= 523359562,43 für r = 10000 Millionen

= 0,0523359562.. für r = 1,00 .....

Cos. $(18^0 - 15^0)$ Cos. 3^0 =

$\frac{1}{16}[\sqrt{30} + \sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{10} + 2\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + 2\sqrt{(5+\sqrt{5})}]$

= 9986295347,55 für r = 10000 Mill.

= 0,9986295..... für r = 1,00 ....

Diese Werthe sind zwar ihrer Entstehung nach irrational, also nicht genau, aber für die Praxis bis auf ein Billiontheilchen des Sinus totus annähernd richtig.

12) Aus Sin. und Cos. von 18^0, von 9^0, von 3^0 lassen sich weiter die Sin. und Cos. von 27^0, von 12^0, von 21^0 u. s. w. finden.

13) Aus Sin. und Cos. 3^0 lassen sich ferner die Sin. und Cos. der halben Winkel, nehmlich von $1\frac{1}{2}^0$, und daraus Sin. und Cos. $\frac{3}{4}^0$ herleiten;

14) Sodann aus Sin. und Cos. von $1\frac{1}{2}^0$ und $\frac{3}{4}$, nach den Formeln Sin. und Cos. (a + b) die Sin. und Cos. $2\frac{1}{4}^0$, von $3\frac{3}{4}^0$, $4\frac{1}{2}^0$, $5\frac{1}{4}^0$ u. s. w. So kann die Berechnung fortgehn von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}^0$ bis 45^0.

15) Es ist aber nicht nöthig, auf solchem Wege die Rechnung bis 45^0 fortzuführen, indem sich aus den berechneten Sinus und Cosinus der Winkel von 0^0 bis 30^0 die übrigen ganz leicht durch eine bloße Subtraction ergeben. Es ist nehmlich nach den obigen Formeln §. 8.

Sin. (a + b) = sin. a . cos. b + sin. b . cos. a

Sin. (a — b) = sin. a . cos. b — sin. b . cos. a

---

also Sin. (a + b) + sin. (a — b) = 2 sin. a . cos. b

Ferner $\cos.(a-b) = \cos.a \cdot \cos.b + \sin.a \cdot \sin.b$
$\cos.(a+b) = \cos.a \cdot \cos.b - \sin.a \cdot \sin.b$

also $\cos.(a-b) - \cos.(a+b) = 2\sin.a \cdot \sin b$

Nun sey Winkel $a = 30^0$, so ist $\sin.a = \frac{1}{2}$; also wird
$\sin.(30+b) + \sin.(30-b) = \cos.b$
$\cos.(30-b) - \cos.(30+b) = \sin.b$;
daraus folgt:
$\sin.(30+b) = \cos.b - \sin.(30-b)$
$\cos.(30+b) = \cos.(30-b) - \sin.b.$

Sollte also z. B. der $\sin. 38^0$ gefunden werden, so wäre $b = 8^0$, also $\sin.(30+8) = \sin.38^0 = \cos.8^0 - \sin.22^0$, d. h. um $\sin. 38^0$ zu erhalten, dürfte man nur von dem bereits berechneten $\cos. 8^0$ den berechneten $\sin. 22^0$ abziehen; eben so ist
$\cos. 38^0 = \cos. 22^0 - \sin. 8^0$

16) Selbst diese Berechnung der Sin. und Cos. bis 30^0 wird noch um ein sehr Beträchtliches abgekürzt und erleichtert, wenn einmahl die Sin. und Cos. von 0^0 bis $22\frac{1}{2}{}^0$ gefunden sind. Denn es ist nach der Note im Anfange dieses §.

$\sin. a + \cos. a$ der absoluten Größe nach $= \cos.(45^0 - a) \cdot \sqrt{2}$, und
$\cos. a - \sin. a$ der absoluten Größe nach $= \sin.(45^0 - a) \cdot \sqrt{2}$; daraus folgt:

$$\sin. a = \left\{\frac{\cos.(45^0-a) - \sin.(45^0-a)}{2}\right\} \cdot \sqrt{2}, \text{ u.}$$

$$\cos. a = \left\{\frac{\cos.(45^0-a) + \sin.(45^0-a)}{2}\right\} \cdot \sqrt{2}.$$

z. B. $\sin. 25^0 = \frac{(\cos. 20^0 - \sin. 20) \cdot \sqrt{2}}{2}$

$= \frac{(\cos. 20^0 - \sin. 20^0)}{\sqrt{2}}$ u. s. w.

$\cos. 25^0 = \frac{(\cos: 20 + \sin. 20)}{\sqrt{2}}$.

Man wird wohl thun, sich diese Operation an einem solchen Beispiel mit Zuziehung einer Sinus-Tafel, welche die Sinus und Cosinus für den Sin. tot. = 1 enthält, anschaulich zu machen.

17) Zur Berechnung der Sinus und Cosinus der Winkel von Minute zu Minute in der vorbemerkten Art ist Sin. 1′ nöthig. Dieser läßt sich so finden, daß man aus Sin. $\frac{3}{4}^0$ = Sin. 45′, daraus Sin. $\frac{45}{2}'$, und ferner die Sinus von $\frac{45}{4}'$, $\frac{45}{8}'$, $\frac{45}{16}'$, $\frac{45}{32}'$, $\frac{45}{64}'$ ableitet. Auf diesem Wege erhält man:

Sin. $\frac{45}{32}'$ = 4090615, 32 . . .

Sin. $\frac{45}{64}'$ = 2045307, 7 . . .

Bei so kleinen Winkeln, die nahe einer Minute sind, läßt sich daher ohne einen erheblichen Fehler — welcher nehmlich kein 10000-Millionstheilchen des Sinus totus mehr beträgt, — annehmen, daß die Sinus sich so gegen einander verhalten, wie die ihnen zugehörigen Winkel; daher

$\frac{45}{64}'$: 1′ = 2045307,7 : sin. 1′, also

Sin. 1′ = 2908882,06, bis auf diese Stelle annähernd richtig.

Aus Sin. 1′ läßt sich sodann Cos. 1′ finden.

18) Was die Sinus und Cosinus eines Winkels anlangt, der bloß um Sekunden von zwei andern bis auf Minuten gegebenen Winkeln differirt, so nimmt man mit Recht an, daß die Differenzen der Winkelfunktionen in diesem Falle sich sehr nahe wie die Sekundendifferenzen der Winkel selbst verhalten. Für Sekunden ist also keine besondere Berechnung nöthig gewesen.

19) Aus den Sinus und Cosinus der Winkel lassen sich die übrigen goniometrischen Größen, Tangen-

ten, Cotangenten ꝛc. nach den obigen Formeln berechnen, aber auf eine beschwerliche Art: z. B.

$$\text{tang. a} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}}.$$

Um vieles leichter ist es aber, aus den gegebenen Logarithmen der Sinus und Cosinus die Logarithmen der übrigen Linien zu finden.

Auf einem Wege, den wir hier nur kurz angedeutet haben, oder wenigstens auf eine ähnliche Weise mit einigen Abänderungen, sind in frühern Zeiten von unermüdlichen Rechnern die goniometrischen Größen wirklich berechnet, und in besondern Tafeln zusammengetragen worden. Die erste Arbeit dieser Art, nehmlich eine Tafel der Sehnen der Winkel, von halben zu halben Graden, nach Sexagesimaltheilchen des Sin. tot., findet sich schon in Ptolemäus Astronomie 1. B., wobei auch, des Interpolirens wegen, für jede Sehne die Differenz (Wachsthum) auf eine Minute, gegeben wird; Ptolemäus bediente sich aber einer andern als der oben angedeuteten Methode.

Was in spätern bis auf unsere Zeiten von andern Mathematikern zur vollkommeneren Ausbildung und Berichtigung der trigonometrischen Tafeln geschehen ist, namentlich von Purbach, Regiomontanus, Rhaeticus (dieser nahm den Sin. tot. = 10000 Mill. an), Valentin Otho, Neper (dieser erfand die Logarithmen, wodurch die höchst schwierige Multiplication und Division mit den sehr großen trigonometrischen Zahlen in eine ganz leichte Addition und Subtraction verwandelt wird), Briggs, Adrian Vlacq (er schrieb zwei große schätzbare Werke: Arithmetica logarithmica und Trigonometria artificialis s. magnus Canon triangulorum logarithmicus), u. a. m., dies ausführlicher anzuzeigen, gehört in eine Geschichte

der Mathematik, aber nicht hieher. Wir müssen uns begnügen, bloß zu erinnern, daß in den neueren Zeiten die Wege zur Berechnung der goniometrischen Größen durch die Bemühungen scharfsinniger Mathematiker um vieles erleichtert und abgekürzt worden sind. Insbesondere hat sich der verdienstvolle Euler, der in allen seinen Werken das Schwerste wie das Leichteste mit gleicher Einfachheit, Klarheit und Gründlichkeit vorzutragen verstand, sich durch Erfindung besonderer analytischer Formeln oder Reihen zu goniometrischem Gebrauch verdient gemacht. Solche Reihen sollen einen kurzen, sichern und bequemen Weg anzeigen, entweder aus den numerischen Sinus, Cosinus, Tangenten ꝛc. eines einfachen Winkels, die Sinus, Cosinus ꝛc. eines Vielfachen dieses Winkels — aus Sin. a, Cos. a die Sin. na, Cos. na — zu berechnen, oder die Sinus, Cosinus ꝛc. irgend eines Winkels unmittelbar, ohne Zuziehung anderer Sinus, Cosinus ꝛc., durch das Maß des zugehörigen Bogens in Theilen des Sinus totus, die sich aus der Verhältnißzahl π beim Kreise und der Gradzahl des Bogens sehr leicht ergeben, nach einem gewissen unveränderlichen Gesetz der Reihen auszudrükken, oder endlich dadurch, daß man diese für die goniometrischen Linien, besonders für die Sinus und Cosinus gefundenen Reihen in Factoren zerfällt, zur unmittelbaren Berechnung der Logarithmen dienen, welche den Sinus und Cosinus als Zahlengrößen, für den Sin. tot. = 10,000 Millionen, zugehören. Aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus ergeben sich offenbar die Logarithmen der übrigen Linien fast von selbst, nehmlich durch eine bloße gemeine Subtraction,

z. B. da $\text{tang. a} = \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}}$

so ist log. tang a = log. sin. a — log. cor

Die höhere Analysis der neuern Zeiten hat also auch der Goniometrie sehr wichtige Dienste geleistet. Da indessen die Sinustafeln und die Logarithmen der trigonometrischen Linien schon vorher, mit einem weit größern Aufwand von Zeit und Geduld, auf viel weitläufigeren Wegen, berechnet worden sind, so können die erwähnten analytischen Reihenformeln in unserer Zeit nur noch dazu dienen, die berechneten Tafeln in zweifelhaften zu prüfen und zu berichtigen, oder auch nöthigenfalls die Zahlengrößen der trigonometrischen Linien mit mehr Stellen, also genauer, auszudrücken.

Die Reihen selbst, um deren bequeme Gestaltung sich außer Euler auch noch andere Mathematiker, z. B. Bernoulli ꝛc. verdient gemacht haben, kann der junge wißbegierige Leser, der seine Kenntniß von der Goniometrie erweitern will, sehr gut und deutlich dargestellt finden in *Euleri* Introduct. in Analys. Infin. Tom. I., ferner mit einigen Modificationen in Klügels analytischer Trigonometrie, so wie in dessen reichhaltigem Mathem. Wörterbuch unter den Artikeln: Goniometrie, Cyclometrie, Cyclotechnie, — vorzüglich kurz, deutlich und gründlich auch in Pasquich's trefflichem Werke über die Mathem. Analysis, 1r B. S. 532 ꝛc.

Die Einrichtung und den Gebrauch der Sinustafeln und der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln muß man aus solchen Tafeln selbst, welche gewöhnlich in einer vorgängigen Einleitung die nöthigen Erläuterungen enthalten, kennen lernen; wir dürfen übrigens diese Kenntniß bei unsern Lesern voraussetzen. Vorzüglich richtig und brauchbar sind die Tafeln von Vega, nehmlich die kleinern in einem Bande, die mittlern mit 7 Decimalstellen in 2 Bänden für die Praxis in den meisten Fällen hinlänglich, und dessen großes kostbares Werk: Thesaurus Logarithmorum com-

pletus in Fol., mit 10 Decimalſtellen, zu ſehr feinen Berechnungen geeignet, jedoch ohne beſondere Tafeln für die natürlichen Sinus ꝛc. ein wahrer Schatz, auf dem Grund der ältern Vlacqſchen Werke erbaut, jedoch mit Zuſätzen und Berichtigungen.

Von den in andern Ländern erſchienenen Tafeln ſind beſonders brauchbar und beliebt die Tables portatives de Logarithmes, par *Callet*, Paris; dieſe enthalten die Logarithmen der trig. Linien ſowohl für die alte, gebräuchliche, als auch für die in Frankreich vorgeſchlagene Centeſimal-Eintheilung des Quadranten.

Die Centeſimal-Abtheilung des Quadranten und die dafür berechneten Tafeln ſind außer Frankreich nicht in Gebrauch gekommen, aus leicht zu erachtenden Gründen. Solche Tafeln wurden in Frankreich von Borda und Delambre, und früher ſchon in Deutſchland von Hobert und Ideler mit der größten Genauigkeit berechnet und herausgegeben.

Von den ganz kleinen logarithmiſch-trigonometriſchen Tafeln, die nur auf 5 Decimalſtellen ꝛc. gehen, wie man ſolche von La Lande in Frankreich, und in Deutſchland von Praſſe hat, läßt ſich ſagen, daß ihr Gebrauch ſehr unbedeutend und beſchränkt iſt, und daß ſie für die Praxis ungefähr einen ſolchen Werth haben, als die Verhältnißzahl π von Archimedes für die Kreisberechnungen; man kann ſie ganz entbehren.

Trigonometrische Lehrsätze
zur
Berechnung ebener Dreiecke,
mittelst der goniometrischen Größen.

§. 10.

Lehrsatz. (Fig. 4.)

Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich an Größe, nach irgend einem Längenmaß, gegen einander so, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, z. B. im Dreieck ABC ist:

$$BC : AC = \sin. A : \sin. B.$$

Beweis. Sind BC und AC gleich, so ist $\angle A = \angle B$, also auch $\sin. A = \sin. B$. Sind die Seiten ungleich, so schneide man auf der größern BC ein Stück BD ab, welches der kleinern Seite AC gleich ist, und fälle von C und D auf AB die Senkrechten CM, DN. Nun kann man offenbar die Winkel A und B als Centriwinkel eines Kreises betrachten, dessen Halbmesser $AC = BD$ ist; folglich ist für den Sinus totus $AC = BD$, die Senkrechte $CM = \sin. A$ und die Senkrechte $DN = \sin. B$. Es ist aber nach der Construction $\triangle BCM \sim \triangle BDN$, folglich $BC : BD = CM : DN$ oder

$$BC : AC = \sin. A : \sin. B.$$

Dieser Satz gilt auch für ein Dreieck ABC welches einen stumpfen Winkel C enthält, $B : AC = \sin. C : \sin. B$.

Digitized by Google

Denn man verlängere BC, mache BM = AC, und fälle man von A und M auf BC und ihre Verlängerung die Senkrechten AD, MN, so ist hier für den Sin. tot. = AC = MB, die Senkrechte AD = sin. ACD oder sin. ACB, weil ein stumpfer und sein spitzer Nebenwinkel gleichen Sinus haben, und die Senkrechte MN = sin. B. Da nun △ABD ∼ MBN, so ist AB : MB = AD : MN oder

AB : AC = sin. C : sin. B

Der Satz gilt auch für ein rechtwinklichtes Dreieck ABC (Fig. 6.), nehmlich:

BC : AC = sin. tot. : sin. B (oder cos. C)
BC : AB = sin. tot. : sin. C (oder cos. B)
AC : AB = sin. B : sin. C (oder cos. B),

welche Proportionen sich sehr leicht ergeben, wenn man die Hypothenuse BC = sin. tot. annimmt.

Man hat für diesen Satz noch einen andern weniger einfachen Beweis, welchen hier anzuführen, wohl unnöthig ist.

§. 11.

Lehrsatz. (Fig. 6.)

In einem rechtwinklichten Dreieck ABC verhält sich an Größe eine Cathete zur andern, wie der Sinus totus zur Tangente des an der ersten Cathete anliegenden spitzen Winkels, z. B.

AB : AC = sin. tot. : tang. B.

Beweis: Man denke sich mit dem Halbmesser AB aus B einen Kreis beschrieben, so ist für AB = sin. tot., die Cathete AC = tang. B; also offenbar die Länge AB zur Länge AC in demselben Verhältniß wie der numerische Sin. tot. zur numerischen Tangente des Winkels B.

Man kann dieſen Satz ſtatt des folgenden brauchen, um aus den Catheten eines rechtwinklichten Dreieckes die ſpitzen Winkel B und C zu berechnen.

§. 12.

Lehrſatz (Fig. 7.)

In jedem Dreieck verhält ſich die Summe zweier Seiten (nach irgend einem Längenmaß) zur Differenz dieſer Seiten ſo, wie die Tangente von der halben Summe der denſelben Seiten gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Differenz dieſer Winkel, z. B.

$$(AC+AB):(AC-AB)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(x+y):\text{tang.}\tfrac{1}{2}(x-y).$$

Beweis: Man mache der kleinern Seite AB = AB = AD (Verlängerung von AC), ziehe DB, FB und von C auf die Verlängerung von DB die Gerade CE # FB.

Da AD = AB = AB, ſo geht ein Halbkreis über DF durch B, alſo iſt ∠ DBF = 1R, alſo FB und mithin auch CE ſenkrecht auf DE.

Nimmt man nun CE als Sin. tot. an, ſo iſt BE = tang. t, DE = tang. (t + y). Es iſt, wie man leicht erkennt,

$$\angle u = \angle y + \angle t, \text{ weil } EC \# BF,$$
$$\angle u = \angle q,$$
$$\angle n = \angle x + \angle y = \angle u + \angle q = 2\angle u,$$

alſo $\angle u = \frac{x+y}{2} = y + t,$

daher auch $\frac{x+y}{2} - y$ oder $\frac{x-y}{2} = t.$

Nun ist $\triangle DCE \sim \triangle DFB$, folglich $DC : FC = DE : BE$, oder $(AC + AB) : (AC - AB) = \text{tang.} \frac{1}{2}(x + y) : \text{tang.} \frac{1}{2}(x - y)$.

§. 13.

Lehrsatz (Fig. 8.)

Wenn von einer Winkelspitze C eines Dreieckes ABC eine Senkrechte CD auf die gegenüberliegende Seite AB gefällt wird, (wir nehmen hier an, daß D zwischen A und B falle), so werden die Abschnitte AD und BD durch die gegebenen Seiten des Dreieckes a, b, c nach folgenden Gleichungen bestimmt:

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ und umgekehrt}$$

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

Beweis: Es sey das gesuchte Stück $AD = x$, so ist das zweite $BD = c - x$.

Nun ist $CD^2 = b^2 - x^2$

$$CD^2 = a^2 - (c-x)^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2,$$

also ist $b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$, also

$$AD \text{ oder } x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Eben so läßt sich zeigen,

daß $BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$ ist.

Dieser Satz gehört eigentlich nicht zu den trigonometrischen Sätzen; er muß aber als ein Hülfssatz zu andern trigonometrischen Rechnungen hier Platz finden.

Mit Hülfe der eben vorgetragenen vier Lehrsätze

von §. 11 — §. 13. lassen sich alle Dreiecke, in Hinsicht ihrer Seiten, Winkel und Flächenräume, nach einem bestimmten Längen- und Flächen-Maß, berechnen; bei dieser Berechnung bedient man sich der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln; größtentheils wird die Rechnung mit den Logarithmen der Zahlen und der goniometrischen Größen geführt, dadurch aber sehr abgekürzt und erleichtert. Wir lassen nun diese Aufgaben für sich in einer Reihe, die uns die natürlichste und zweckmäßigste scheint, folgen, und belegen jede derselben mit einem oder mehreren Zahlenbeispielen, um Anfängern Gelegenheit zu geben, sich in dieser nützlichen, für die practische Vermessungskunde höchst wichtigen, Rechnungsweise zu üben.

Trigonometrische Berechnung

der ebenen Dreiecke.

A) Seiten und Winkel.

§. 14.

Aufgabe. (Fig. 8.)

Von einem Dreieck ABC sind eine Seite und zwei Winkel in bestimmter Lage, z. B. die Seite AB = C und die Winkel A, C gegeben; daraus sollen die drei übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Aus A und C findet man leicht

$$B = 2R - A - C.$$

Sodann ist $b : c = \sin. B : \sin. C$,

$$\text{also} \qquad b = \frac{c \,.\, \sin. B}{\sin. C}.$$

Folglich $\log. b = \log. c + \log. \sin. B. - \log. \sin. C.$

$$b = \text{num.} : (\log. c + \log. \sin. B - \log. \sin. C).$$

Man suche nehmlich den Logarithmus von b, der aus den Logarithmen von c, sin. B und sin. C zusammengesetzt ist, unter den gemeinen Zahlenlogarithmen auf, so giebt die ihm entsprechende Zahl die Länge von b nach demselben Maßstab, nach welchem die Länge von c gegeben wird. Die großen Characteristikzahlen der Sinus heben sich, wie man sieht, durch Subtraction auf, welches immer geschieht, wenn eine Seitenlänge bestimmt wird. Ein Winkel hingegen wird, wie wir

weiter sehen werden, jederzeit durch einen einfachern oder zusammengesetztern Ausdruck (Gleichung) gegeben, der im Zähler eine Winkelfunktion als trigonometrischen Factor, mehr enthält, als im Nenner, daher der Logarithmus des gesuchten Winkels immer eine große Characteristik behält, den großen numerischen Werthen der Winkelfunktionen gemäß, für Sin. tot. = 10000 Millionen.

Beispiel: Es sind gegeben, $c = 3751'$, $\angle A = 43^0\,17'$, $\angle C = 57^0\,21'$,

also ist $\angle B = 180^0 - 100^0\,38' = 79^0\,22'$.

Hier ist: $b : 3751' = \sin. 79^0\,22' : \sin. 57^0\,21'$, also

$+ \log. 3751 = 3{,}5741471$
$+ \log. \sin. 79^0\,22' = 9{,}9924776$
$+ \quad + \quad 13{,}5066247$
$- \log. \sin. 57^0\,21' = 9{,}9253028$

also ist $\lg. b = 3{,}6413219$

daher $b = 4378{,}466'$.

Anm.: Will man die trigonometrischen Logarithmen für den Sin. tot. = 1 nehmen, so muß man, weil dann jede trigonometrische Zahl durch 10000 Mill. zu dividiren ist, von jedem dazu gehörigen Tafellogarithmus 10 ganze Einheiten (als Characteristik) subtrahiren; der Logarithmus der gesuchten Größe b erleidet dadurch, wie sich leicht beurtheilen läßt, keine Veränderung. Demnach würde sich der vorige Ansatz also umgestalten:

$+ \log. 3751 = 3{,}5741471$
$+ \log. \sin. 79^0\,22' = 0{,}9924776 - 1$ (eigentlich 9,..... $- 10$)
$+ \quad 4{,}5666247 - 1$
$- \log. \sin. 57^0\,21' = 0{,}9253028 - 1$

also $\log. b = 3{,}6413219$

Man berechne ferner $a = \frac{3751' \,.\, \sin. 43^0\,17'}{\sin. 57^0\,21'}$,

wobei sich die schon angesetzten Logarithmen von 3751 und sin. 57° 21′ benutzen lassen.

Es sey gegeben:

$$c = 240', \angle A = 103°, \angle B = 40°;$$

Gesucht $a = 388{,}572' \ldots$, wie groß ist b?

Es sey gegeben:

$$a = 738', \angle C = 24°16'13'', \angle B = 31°5';$$

Gesucht $c = 368{,}734' \ldots$, wie groß ist b?

§. 15.

Aufgabe. (Fig. 8.)

Von einem Dreieck ABC sind zwei Seiten und ein anliegender Winkel, welcher nehmlich einer dieser Seiten gegenüberliegt, gegeben, z. B. b, a und $\angle A$, gegeben; daraus sollen die drei übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung. Es ist offenbar, daß zuerst vermittelst der drei gegebenen Stücke der zweite anliegende Winkel berechnet werden muß, um darnach den Winkel C und die Seite c zu berechnen.

Nun ist $a : b = \sin. A : \sin. B$, also $\sin B = \frac{b \,.\, \sin. A}{a}$

folglich $\log. \sin. B = \log. b + \log. \sin. A - \log. a.$

Diesen Logarithmus suche man unter den Tafellogarithmen der Sinus auf; der dazu gehörige Winkel ist zweideutig, d. h. der Sin. B und also auch sein Logarithmus gehört sowohl zu dem gefundenen spitzen Winkel als auch zu dem stumpfen Nebenwinkel desselben, und zwar ist der Sinus und Log. sin. B für beide Winkel positiv. Daher kann man nach dieser Rechnung sowohl den spitzen Winkel B oder seinen stumpfen Nebenwinkel nehmen, wodurch auch der dritte Winkel C

einen doppelten Werth erlangt; dieſe Zweideutigkeit der Winkel macht die Conſtruction von zwei verſchiedenen Dreiecken möglich, die die gegebenen Stücke enthalten, und doch der Größe und Geſtalt nach verſchieden ſind.

Die Zweideutigkeit verſchwindet, nehmlich der geſuchte Winkel B muß ein ſpitzer ſeyn, wenn $\angle A = 1R$ oder größer als $1R$ iſt, weil die Summe der drei Winkel $= 2R$ iſt, oder wenn, im Fall A ein ſpitzer Winkel iſt, die demſelben anliegende Seite b kleiner als die gegenüberliegende a iſt, weil der größern Seite der größere Winkel und der kleinern Seite der kleinere Winkel gegenüberliegt, und alſo für $A < 1R$, noch mehr $B < 1R$ ſeyn muß.

Die Zweideutigkeit findet aber immer Statt, wenn $\angle A$ ein ſpitzer und die ihm anliegende Seite b größer als die gegenüberliegende a iſt. Dies zeigt auch die geometriſche Conſtruction in unſrer Figur, nehmlich in dem letztern Falle kann CB auch in die Lage CB′ kommen, ohne daß die gegebenen Stücke a, b, A ſich ändern. Ob nun in dieſem zweideutigen Falle der ſpitze Winkel CBA oder ſein ſtumpfer Nebenwinkel CB′A zu nehmen ſey, müſſen in der Praxis die Beſtimmungen oder bekannten Umſtände einer Aufgabe entſcheiden.

Beiſpiele: $a = 73625'$, $b = 67241'$ $\angle A = 43^0 55'$.

Hier iſt $73625 : 67241 = \sin. 43^0 55' : \sin. B.$

$$\text{Alſo } \sin. B = \frac{67241 \cdot \sin. 43^0 55'}{73625}$$

Der Ausdruck für Sin. B behält nach der Diviſion durch den Nenner einen trigonometriſchen Factor, oder, wie wir vorher ſagten, ſein Zähler enthält einen trigonometriſchen Factor mehr, als ſein Nenner, welches bei Winkelbeſtimmungen immer der Fall iſt, dahingegen

bei Längenbestimmungen die einfachern oder zusammengesetztern Ausdrücke dafür im Zähler und Nenner gleichviel trigonometrische Factoren enthalten, wodurch bei der trigonometrischen Bearbeitung die großen Characteristikzahlen sich heben. In allen Fällen, wo im Zähler oder Nenner solcher Ausdrücke für Längen oder Winkel ein oder auch zwei ꝛc. trigonometrische Factoren zu fehlen scheinen, müssen dieselben durch den Factor Sinus totus oder die zweite Potenz ꝛc. desselben ergänzt werden, wie sich aus der Entstehung der trigonometrischen Gleichung immer leicht erweisen läßt. Wir werden weiterhin Gelegenheit finden, dies an mehreren Beispielen zu zeigen.

Der Winkel B wird nach obiger Gleichung logarithmisch also bestimmt:

+	log. 67241	=	4,8276342
+	log. sin. 43° 55′	=	9,8411162
		+	14,6687504
—	log. 73625	=	4,8670253
	Log. sin. B	=	9,8017251

Dazu gehört unter den Sinus-Logarithmen der Winkel 39° 18′ 23″ sehr nahe, nehmlich ungefähr um $\frac{4}{10}$ einer Sekunde zu wenig. Durch solche Berechnung entstehen bei wirklichen Dreiecksbestimmungen die Angaben der Winkel bis auf Zehntel, Hundertel, selbst Tausendtheilchen einer Sekunde. Man muß ja nicht glauben, daß auch mit den größten und vollkommensten Winkelmessern die Messung der Winkel bis zu diesem Grad zuverläßiger Genauigkeit sich erheben könne. Dagegen streiten außer der in jedem Fall begrenzten Genauigkeit der Instrumente — selbst die vollkommensten astronomischen Kreise, Bordaische Kreise, Quadranten, große Sectoren nicht ausgenommen — noch manche andere Umstände, z. B. die Unvollkommenheit unserer Augen.

Der gesuchte Winkel B ist nach der trigonometrischen Rechnung nicht allein $39^0\ 18'\ 23''$, sondern auch dessen stumpfer Nebenwinkel $140^0\ 41'\ 37''$, und demnach würde auch der Winkel C auf doppelte Weise bestimmt werden können. Indessen wird die Zweideutigkeit durch den bekannten Umstand gehoben, daß $b < a$, mithin auch $\angle B < \angle A$ seyn muß. Also ist in unserm Beispiel $\angle B = 39^0\ 18'\ 23''$ sehr nahe, daher der dritte Winkel $C = 96^0\ 46'\ 37''$ sehr nahe.

Ferner $a : c = \sin. A : \sin. C$, also $c = \frac{a \,.\, \sin. C}{\sin. A}$

$$\log. c = \log. a + \log. \sin. C - \log. \sin. A.$$

So findet man die dritte Seite des Dreiecks c. Wie groß ist c in dem gegebenen Beispiele?

Es werde hier nochmahls, und dann nicht wieder erinnert, daß die logarithmische Bearbeitung dieser Aufgabe, wie der im §. 14, sich ebenfalls für den Sin. tot. = 1 gesetzt, verrichten läßt, wodurch der obige Ansatz sich also gestaltet:

	log. 67241 =	4,8276342
log.	sin. $43^0\ 55'$ =	0,8411162 — 1
	+	5,6687504 — 1
—	log. 73625 =	4,8670253
	log. sin. B =	0,8017251 — 1 für sin. tot. = 1

Will man diesen Logarithmus in den Tafeln, wo sin. tot. = 10000 Mill. und dessen Logarithmus = 10 ganze Einheiten ist, aufsuchen, so muß man seiner Characteristik 10 Einheiten zusetzen, oder wegen 10 — 1 = 9 der Characteristik die Zahl 9 geben; somit wird wie oben log. sin. B = 9,8017251 u. s. w. quod bene notandum.

Beispiel eines zweideutigen Falls:

Es sey gegeben $b = 49$, $a = 36$, $\angle A = 35^0\,7'$

Gesucht $\angle B = 51^0\,32'$ oder $= 128^0\,28'$.

Hier kann B sowohl $51^0\,32'$ als auch $128^0\,28'$ seyn.

Für $B = 51^0\,32'$ wird gefunden $c = 62{,}476$.

Wie groß wird aber c für $B = 128^0\,28'$.

§. 16.

Aufgabe. (Fig. 6.)

Von einem rechtwinklichten Dreieck sind die beiden Catheten b, c gegeben; daraus sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung. Außer b, c ist auch $\angle A = 90^0$ gegeben. Man muß zuerst einen der beiden spitzen Winkel berechnen, z. B. B.

Es ist c : b = sin. tot. : tang. B. (nach d. Lehrs. §. 11)

also $\text{tang. } B = \frac{b \,.\, \text{sin. tot.}}{c}$

oder für sin. tot. = 1, $\text{tang. } B = \frac{b}{c}$

$\log. \text{täng. } B = \log. b - \log. c + 10.$

Diesen Logarithmus suche man unter den Logarithmen der Tangenten auf, so ist der dazu gehörige Winkel dem gesuchten Winkel B gleich. Aus B ergiebt sich $C = 90^0 - B$.

Die Hypothenuse a ergiebt sich aus dieser Proportion:

a : b = sin. tot. : sin. B oder a : c = sin. tot. : cos. B.

also $\log. a = \log. b + 10 - \log. \text{sin. } B$ u. s. w.

Beispiel: b = 362, c = 549.

+	log. 362 =	2,5587086
+	log. sin. t. =	10,.....
		+ 12,5587086
—	log. 549 =	2,7395723
	log. tang. B =	9,8191363, also

$\angle B = 33^0\ 24'\ 0,3''$ sehr nahe,

daher $\angle C = 56^0\ 35'\ 59,7''$ sehr nahe.

Wie groß ist nun die Hypothenuse a?

Die Berechnung der rechtwinklichten Dreiecke wird dadurch sehr erleichtert, daß der log. sin. tot. = 10 kein Aufsuchen in den Tafeln nöthig macht, überdies auch leicht zu addiren und zu subtrahiren ist.

§. 17.

Aufgabe. (Fig. 6.)

Von einem rechtwinklichten Dreieck ABC sind die Hypothenuse a und eine Cathete c gegeben; daraus sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Es ist a : c = sin. tot. : sin. C
oder a : c = sin. tot. : cos. B.

also log. sin. C = log. c + 10 — log. a
log. cos. B = log. c + 10 — log. a.

Sucht man so in den Tafeln $\angle C$, so erhält man nach einer zweckmäßigen Einrichtung der Tafeln sogleich auch den Complementswinkel B in der Columne der Cosinus.

Ferner ist a : b = sin. tot. : sin. B oder cos. C, oder
c : b = sin. tot. : tang B.

So findet man ganz leicht die Größe b.

Beispiel: Gegeben a = 5, c = 4.
Wie groß sind B, C und b?

Auf solche Weise erhält man einen Begriff von dem Verhältniß der Seiten und Winkel in einem rechtwinklichten Dreieck, welches in der Praxis bisweilen seinen Nutzen hat.

§. 18.

Aufgabe. (Fig. 6.)

Von einem rechtwinklichten Dreieck ABC sind eine Cathete c und der an ihr liegende spitze Winkel B gegeben; daraus sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Aus B ergiebt sich $\angle C = 90^0 - B$.
Ferner ist c : b = sin. tot. : tang. B,

also $b = \frac{c \,.\, \text{tang. B}}{\text{sin. tot.}}$ oder = c . tang. B für sin. tot. = 1.

Rechnet man logarithmisch nach der Formel b = c . tang. B, so muß dem trigonometrischen Factor tang. B ein anderer als Divisor oder Nenner entgegengesetzt werden; dieser fehlende Factor ist hier offenbar der Sin. totus; also muß die logarithmische Bearbeitung des Ausdrucks b = c . tang. B folgendergestalt verrichtet werden:

log. b = log. c + log. tang. B — 10 für das gewöhnliche logarithmisch-trigonometrische System. So erhellt die in §. 15 gemachte Bemerkung, und eine ganz gleiche Bewandniß hat es mit allen trigonometrischen Gleichungen worin ein oder auch mehrere trigonometrische Factoren dem Anschein nach fehlen.

Die Hypothenuse a erhält man, wie vorher gezeigt wurde, durch diese Proportion:

$$a : c = \text{sin. tot.} : \text{cos. B, also } a = \frac{c \cdot \text{sin. tot.}}{\text{cos. B}} \text{ u.s.w.}$$

Man könnte auch setzen: a : c = sec. B : sin. tot. Man kann aber hier, so wie in den meisten Fällen, die Secante entbehren. Darum stehen auch die Logarithmen der Secanten nicht in den Tafeln, sind aber nöthigenfalls sehr leicht zu erhalten, indem man den logarithmischen Cosinus eines Winkels vom doppelten Logarithmus des Sin. tot., nehmlich von 20, subtrahirt. Denn nach den obigen goniometrischen Grundformeln ist für irgend einen Winkel a

$$\text{sec. a} = \frac{1}{\text{cos. a}} \text{ eigentlich } = \frac{\text{sin. tot.} \times \text{sin. tot.}}{\text{cos. a}},$$

also log. sec. a = 20 — log. cos. a.

Beispiel: Es sey gegeben c = 5637′, ∠ B = 57° 13′;
Gesucht b.

Hier ist 5637 : b = sin. tot. : tang. 57° 13′

Also + log. 5637 =	3,7510480
+ log. tang. 57°13′ =	10,1910842
— log. sin. tot. =	10, ...
log. b =	3,9421322,

folglich b = 8752,5′.

Wie groß ist a?

§. 19.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind zwei Seiten b, c und der Winkel A, welchen sie bilden (einschließen), gegeben; daraus sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung: Man berechne die Winkel B, C nach dem trigonometrischen Lehrsatz in §. 12. Diesem zufolge ist, wenn c die größere, b die kleinere Seite:

$(c+b):(c-b) = \text{tang.}\frac{1}{2}(C+B):\text{tang.}\frac{1}{2}(C-B)$, also

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(C-B) = \frac{(c-b)}{(c+b)} \cdot \text{tang.}\frac{1}{2}(C+B).$$

Da $(C + B + A) = 180^0$ oder $2R$, so ist $\frac{1}{2}(C + B + A) = 1R = 90^0$, oder $\frac{1}{2}(C + B)$ und $\frac{1}{2}A$ ergänzen einander zu 90^0, und $\frac{1}{2}A$ ist das Complement von $\frac{1}{2}(C + B)$; also ist die Tangente von $\frac{1}{2}(C + B) =$ der Cotangente von $\frac{1}{2}A$. Demnach kann man jene Gleichung einfacher auch so ansetzen:

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(C - B) = \frac{(c - b)}{(c + b)} \cdot \text{cot.}\frac{1}{2}A.$$

Folglich $\log.\text{tang.}\frac{1}{2}(C - B) =$

$$\log.(c-b) + \log.\text{cot.}\frac{1}{2}A - \log.(c+b)$$

Das Aggregat der bekannten Größenlogarithmen im zweiten Theile der Gleichung giebt den Logarithmus von $\text{tang.}\frac{1}{2}(C - B)$. Diesen Logarithmus suche man unter den Logarithmen der Tangenten auf, so ist der entsprechende Winkel $= \frac{1}{2}(C - B)$. Da A bekannt ist, so ist auch $B + C$, also auch $\frac{1}{2}(C + B)$ leicht zu bestimmen.

Nun sey $\frac{1}{2}(C+B) = S$ bekannt,

$\frac{1}{2}(C-B) = D$ berechnet, wie eben gezeigt worden;

so ist $C+B = 2S$

$C-B = 2D$, also, wie man leicht sieht,

$C = S + D$, und $B = S - D$.

Sind die Winkel C und B einmahl bestimmt, so ergiebt sich die dritte unbekannte Seite a durch die bekannte Proportion:

a : c = sin. A : sin. C, alſo

log. a = log. c + log. sin. A — log. sin. C u. ſ. w.

Man könnte einen unbekannten Winkel B, und daraus ſodann den zweiten C auch noch auf andre Art beſtimmen, wobei jedoch nichts gewonnen wird. Man denke ſich z. B. die Senkrechte CD auf AB; ſo iſt:

b : AD = sin. tot. : cos. A, ſo fände man logarithmiſch AD, alſo auch BD = c — AD

ferner b : CD = sin. tot. : sin. A, ſo fände man CD;

dann iſt BD : CD = sin. tot. : tang. B: ſo fände man endlich ∠ B.

Eine andre Formel oder Gleichung für den Winkel B, die ſich auf eben ſolche Weiſe aus b, c, A ableiten läßt, übergehen wir, da ſie nicht einmahl eine logarithmiſche Bearbeitung geſtattet.

Zuſatz: Man kann auch aus zwei Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel eines Dreiecks, als z. B. die dritte Seite unmittelbar berechnen, nehmlich ohne vorher die Winkel B, C beſtimmt zu haben. Da dieſe Forderung in der Ausübung oft vorkommt, ſo darf die Methode einer ſolchen Berechnung hier nicht vergeſſen werden. Es ſeyen alſo die Seiten b, c und der Winkel A gegeben, die Seite a werde hieraus berechnet.

Auflöſung: CD [illegible] auf die Seite c,

ſo iſt AD = $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ [illegible]

Auch iſt b : AD = sin. tot. : cos. A, alſo

AD = b . cos. A für sin. tot. = 1

Daraus folgt: $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ = b . cos. A, [illegible]

daraus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos. A$, alſo

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos. A}$. Hierbei muß

man nicht vergeſſen, daß, wenn der Winkel A ein [illegible]

pfer ist, der Cosinus von A negativ wird; folglich wird in diesem Falle: $a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \,.\, \cos. A}$

Diese Berechnung von a läßt sich nicht ganz, aber doch großentheils logarithmisch bewirken, und ist eben nicht sehr beschwerlich. Man berechne zuerst $2bc \,.\, \cos. A$ logarithmisch, der Logarithmus dieses Products ist $=$ log. 2 + log. b + log. c + log. cos. A — 10, (da der trigonometrische Factor Cos. A für logar. Bearbeitung $\frac{\cos. A}{\text{sin. tot.}}$ ist, so muß vom log. cos. A die ganze Zahl 10 subtrahirt werden); zu dem Aggregat dieser Logarithmen suche man die entsprechende Zahl, subtrahire diese von $(b^2 + c^2)$, wenn $A < 90$, hingegen addire man sie dazu, wenn $A > 90^0$ ist; die so gefundene Zahl: $b^2 + c^2 \mp 2bc \,.\, \cos. A$ sey $= S$; so ist $a = \sqrt{S}$, $\log. a = \frac{\log. S}{2}$ also

$$a = \text{num}: \left\{\frac{\log. S}{2}\right\}.$$

Wollte man die Formel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos. A$ so umformen, daß sie eine vollständige Bearbeitung durch Logarithmen zuließe, so könnte dies vermittelst der Einführung eines sogenannten Hülfswinkels φ nehmlich durch folgenden besondern Kunstgriff geschehen der späterhin noch mehrmahls gebraucht werden wird und den ich meine Leser wohl zu bedenken und zu behalten bitte.

Es ist nehmlich

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - 2bc + c^2 + 2bc - 2bc \,.\, \cos. A \\ &= (c - b)^2 + 2bc - 2bc \,.\, \cos. A \\ &= (c - b)^2 + 2bc\,(1 - \cos. A.) \end{aligned}$$

Da nun (nach der Formel 24 im §. 8), $1 - \cos. A = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A$,

so ist $a^2 = (c - b)^2 + 2bc \cdot (2 \sin.^2 \frac{1}{2} A)$, oder

$$a^2 = (c - b)^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{4bc \cdot \sin.^2 \frac{1}{2} A}{(c-b)^3} \right\}.$$

Nun setze man $\frac{4bc \cdot \sin.^2 \frac{1}{2} A}{(c-b)^2} = \text{tang.}^2 \varphi$, oder

$$\text{tang. } \varphi = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} A}{(c-b)} \cdot \sqrt{bc}$$, und suche nach

dieser Gleichung logarithmisch, wie gewöhnlich, den Hülfswinkel φ, welches immer möglich ist, da die Tangenten jede Größe haben können. Ist der Winkel φ gefunden, so wird die obige Gleichung für a^2 in diese verwandelt:

$a^2 = (c-b)^2 \cdot (1 + \text{tang.}^2 \varphi)$, also

$a = (c-b) \cdot \sqrt{1 + \text{tang.}^2 \varphi}$, oder weil

$$\sqrt{1 + \text{tang.}^2 \varphi} = \text{sec. } \varphi,$$

$a = (c-b) \cdot \text{sec. } \varphi$, oder weil $\text{sec. } \varphi = \frac{1}{\cos. \varphi}$,

$a = \frac{(c-b)}{\cos. \varphi}$ eigentlich aber $= \frac{\text{sin. tot.} \times (c-b)}{\cos. \varphi}$,

also endlich $\log. a = 10 + \log. (c-b) - \log. \cos. \varphi$ ꝛc.

Beispiele: Es seyen gegeben: $c = 317'$, $b = 295'$, $\angle A$ $32^0\,17$;

Gesucht C, B und a.

Auflösung: Sollen die Winkel C, B berechnet werden, so ist hier $(c + b) = 612$, $(c - b) = 22$, $\frac{1}{2}(C + B) = 73^0\,51'\,30''$, $\frac{1}{2} A = 16^0\,8'\,30''$.

Folglich ist nach obiger Formel:

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (C - B) = \frac{22 \cdot \text{cot. } 16^0\,8'\,30''}{612}.$$

Nun ist + log. 22 = 1,3424227
+ log. cot. $16^0\,8'\,30''$ = 10,5384668

\+ 11,8808895
— log. 612 = 2,7867514

Also log. tang. $\frac{1}{2}(C-B)$ = 9,0941381,
folglich $\angle \frac{1}{2}(C-B) = 7^0\,4'\,49''$ sehr nahe,
und da $\angle \frac{1}{2}(C+B) = 73^0\,51'\,30''$

so ist der größere Winkel $C = 80^0\,56'\,19''$
der kleinere $B = 66^0\,46'\,41''$
der gegebene Winkel A ist $= 32^0\,17'$

Summe der drei Winkel $A+B+C = 180^0$, wie es seyn muß.

Sind die Winkel einmahl berechnet, so ist die Seite a leicht zu berechnen, nehmlich:

$a : 317 = \sin. 32^0\,17' : \sin. 80^0\,56'\,19''$.

Logarithmisch berechnet wird a = 171,451 ....

Zweite Methode der Berechnung der Seite a, wenn bloß die Seiten b, c und der Winkel A hierzu gebraucht werden sollen. Der Hülfswinkel φ wird hier durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\text{tang. } \varphi = \frac{2 \,.\, \sin. 16^0\,8'\,30'' \,.\, \sqrt{295 \,.\, 317}}{22}.$$

Also log. tang. φ

$$= 2 + \log. \sin. 16^0\,8'\,30'' + \frac{\log. 295 + \log. 317}{2} - \log. 22.$$

Es ist + log. 2 = 0,3010300
+ log. sin. $16^0\,8'\,30''$ = 9,4440635
+ log. $\sqrt{295 \,.\, 317}$ = 2,4854403 $\left(= \frac{\log. 295 + \log. 317}{2}\right)$

\+ 12,2305338
— log. 22 = 1,3424227

log. tang. φ = 10,8881111

Dazu gehört unter den Logarithmen der Tangenten, der Winkel:

$$\varphi = 82^0\,37'\,39,5''$$ sehr nahe.

Ferner ist in unserm Beispiel:

$$a = \frac{\text{sin. tot.} \times 22}{\text{cos. } 82^0\,37'\,39,5''}$$

Es ist $+$ log. sin. tot. $+$ log. 22 $=$ 11,3424227
$-$ log. cos. $82^0\,37'\,39,5''$ $=$ 9,1082845

Also log. a $=$ 2,2341382

Also a $=$ 171,451..... wie vorher. Man kann auch nach der Formel:

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos. A)}$$

die Rechnung führen, um die Resultate nach verschiedenen Methoden zu vergleichen.

Aufmerksame und geschickte Rechner werden nach einem solchen Beispiele nun selbst beurtheilen können, welche von den verschiedenen Auflösungsarten die kürzeste und bequemste ist, also in der Praxis den Vorzug verdient.

§. 20.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind die drei Seiten a, b, c nach irgend einem Längenmaß (oder auch nur im Verhältniß ihrer Längen, z.B. $a:b:c = 5:8:11$) gegeben; es sollen daraus die Winkel A, B, C berechnet werden.

Auflösung: Es ist $AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ (nach dem Lehrsatz im §. 13.)

Auch $b : AD = \text{sin. tot.} : \cos. A$, also

$$AD = \frac{b \,.\, \cos. A}{\text{sin. tot.}} \text{ oder } b \,.\, \cos. A \text{ für sin. tot.} = 1.$$

Folglich ist $b \,.\, \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$

$$\text{und } \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

für den sin. tot. = 1. So fände sich die Größe von cos. A und also der Winkel A nach den natürlichen (nicht logarithmischen) Sinustafeln.

Diese Gleichung für den Winkel A hat aber auch die Unbequemlichkeit, daß sie sich nicht ganz logarithmisch behandeln läßt. Sie läßt sich aber zu diesem Zweck also umformen:

Es ist $\text{sin.}^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} (1 - \cos. A)$, nach Formel 24) in §. 8.

Setzt man in dieser Gleichung $\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

so wird:

$$\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} - \left\{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc}\right\} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc} \quad [\text{oder weil allgemein } m^2 - n^2 = (m + n) \,.\, (m - n)]$$

$$= \frac{(a + b - c) \,.\, (a - b + c)}{4bc}, \text{ also}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \text{sin. tot.} \times \sqrt{\left\{\frac{(a + c - b) \,.\, (a + b - c)}{4bc.}\right\}}$$

Nimmt man nun den bekannten Perimeter des Dreiecks, nehmlich

$(a + b + c) = 2P$, an, so wird

$(a + c - b) = 2P - 2b$ und $(a + b - c) = 2P - 2c$;

Daher wird offenbar:

I) $\text{Sin.}\frac{1}{2}A = \text{sin. tot.}\sqrt{\left\{\frac{(P-b).(P-c)}{bc}\right\}}$, folglich

$$\log.\text{sin.}\frac{1}{2}A = 10 + \frac{\log.(P-b) + \log.(P-c) - (\log.b + \log.c)}{2}$$

So findet man logarithmisch den Winkel $\frac{1}{2}A$ und daraus den ganzen Winkel A. Eine Zweideutigkeit des durch seinen Sinus gegebenen Winkels $\frac{1}{2}A$ kann hier darum gar nicht Statt finden, weil offenbar A kleiner als 180^0 und demnach $\frac{1}{2}A$ kleiner als 90^0 seyn muß.

Der Winkel $\frac{1}{2}A$ läßt sich auch durch seinen Cosinus logarithmisch bestimmen. Nach der Formel 23) im §. 8. ist nehmlich:

$$2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = 1 + \cos. A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ durch}$$

Substitution des oben gefundenen Werthes für cos. A;

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ also}$$

$$\text{Cos}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a).(b+c-a)}{4bc}$$

$$= \frac{P.(P-a)}{bc}, \text{ durch eine ähnliche Reduction für } a+b+c = 2P, \text{ wie vorher;}$$

also II) $\text{Cos.}\frac{1}{2}A = \text{sin. tot.}\sqrt{\frac{P.(P-a)}{bc}}$ u. s. w.

Zur Berechnung des Winkels $\frac{1}{2}A$ bedient man sich am besten der ersten Formel, wenn der Winkel sehr klein ist, der zweiten hingegen, wenn der Winkel $\frac{1}{2}A$ nahe an 90^0 ist, indem die Sinus der Winkel nahe an 90^0 und die Cosinus der Winkel nahe an 0^0 nur geringe Differenzen in der Fortschreitung der Winkel um kleine Theile haben.

Digitized by Google

Auf demselben Wege, wie ∠ A, läßt sich auch durch gehörige Versetzung der gegebenen Größen, der ∠ B logarithmisch berechnen, z. B.

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} B = \text{sin. tot. } \sqrt{\frac{P \cdot (P - b)}{b\,c}} \text{ u. s. w.}$$

Aus den berechneten Winkeln A, B wird der dritte C = 180 — (A + B) durch gemeine Rechnung gefunden. Eine bessere und kürzere Methode, als die angezeigte, die Winkel eines Dreiecks aus seinen Seiten zu bestimmen, kann es wohl nicht geben.

Beispiel: Es seyen gegeben: b = 150′, c = 140′, a = 130, oder welches offenbar gleichgültig ist, das Zahlenverhältniß der Seiten a : b : c = 13 : 15 : 14 (13, 15, 14 können jedes Längenmaß oder jedes Gleichvielfache eines solchen Maßes vorstellen); es soll z. B. der Winkel A berechnet werden.

Auflösung: Hier ist $P = \frac{+20}{2} = 210$, P — b = 60, P — c = 70, also

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \text{sin. tot. } \sqrt{\frac{60 \cdot 70}{150 \cdot 140}}$$

$$\text{oder} = \sqrt{\frac{\text{sin. tot.} \times \text{sin. tot.} \times 60 \cdot 70}{150 \cdot 140}}$$

Es ist log. 60 = 1,7781513
2 log. sin. tot. + log. 70 = 21,8450980
Summe = 23,6232493
— log. 150 = 2,1760913
— log. 140 = 2,1461280
— Summe = 4,3222193
Differenz = 19,3010300, durch 2 dividirt, giebt:
log. sin. $\frac{1}{2}$ A = 9,6505150; dazu gehört der Winkel
$\frac{1}{2}$ A = 26° 33′ 54″ sehr nahe, also
∠ A = 53° 7′ 48″

Wie groß wird der Winkel B nach der ersten oder zweiten Formel berechnet?

Hätte man bei obiger Berechnung statt der Zahlen 60, 70, 150, 140 die abgekürzten Verhältnißzahlen 6, 7, 15, 14 gebraucht, so hätte man, wie leicht zu beurtheilen ist, dasselbe Endresultat erhalten. Es ist also zur Berechnung der Winkel eines Dreiecks schon völlig hinreichend, wenn im Allgemeinen das Verhältniß ihrer Seiten in bestimmten Zahlen,

$$a : b : c = m : n : r$$

gegeben wird. Dies folgt schon aus der Elementargeometrie.

Gesetzt $a : b : c = 13 : 19 : 7$; wie groß sind die Winkel A, B, C?

B. Flächenräume der Dreiecke.

---

§. 21.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind eine Seite und zwei Winkel (also auch der dritte) in bestimmter Lage, z. B. c, A, B gegeben; daraus soll der Flächeninhalt des Dreiecks nach irgend einem quadratischen Flächenmaß berechnet werden, das sich auf das Längenmaß der Seite c bezieht, z. B. in Quadratfußen, wenn das Maß der Seite c in Fußen gegeben ist.

Auflösung: Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird bekanntlich durch das halbe Product aus seiner

Grundlinie und ſeiner Höhe (als Zahlenfactoren betrachtet) beſtimmt. Man kann zur Grundlinie (Baſis) des Dreiecks nehmen, welche Seite deſſelben man will. Betrachten wir nun in unſerem Falle c als die Grundlinie, ſo wird CD die Höhe des Dreiecks, und es kommt nur darauf an, durch eine trigonometriſche Gleichung (Funktion) die Höhe CD nach den gegebenen Größen c, A, B, C zu beſtimmen.

Es iſt $c : b = \sin. C : \sin. B$; alſo

$$b = \frac{c \,.\, \sin. B}{\sin. C}, \text{ ferner iſt}$$

$b : CD = \sin. tot. : \sin. A$; alſo

$$CD = \frac{b \,.\, \sin. A}{\sin. tot.}, \text{ oder durch gehörige Subſtitution des Werthes von b}$$

$$= \frac{c \,.\, \sin. A \,.\, \sin. B}{\sin C \times \sin. tot.}$$

Folglich iſt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$= \frac{c \,.\, CD}{2} \text{ oder nach gehöriger Subſtitution des gefundenen Werthes für CD,}$$

$$= \frac{c^2 \,.\, \sin. A \,.\, \sin. B}{2 \,.\, \sin. C \times \sin. tot.}$$

$$= \frac{c^2 \,.\, \sin. A \,.\, \sin. B}{2 \,.\, \sin. C} \text{ für } \sin. tot. = 1.$$

Wollte man nach dem zweiten Ausdruck die Rechnung trigonometriſch führen, ſo dürfte man nicht vergeſſen, daß im Nenner ein trigonometriſcher Factor fehlt, welches hier ganz offenbar Sin. tot. iſt, wie in allen andern Fällen, wo ein ſolcher Factor entweder im Zähler bei Winkelbeſtimmungen, oder bei andern Größenbeſtimmungen (von Längen, Flächen) im Nenner zu

fehlen scheint. Man kann aber auch, ohne den Sinus totus in Betrachtung zu ziehen, indem man nehmlich die goniometrischen Größen für den Sin. tot. = 1 berechnet nimmt, bei der logarithmischen Bearbeitung jenes Ausdrucks von dem Tafellogarithmus jedes trigonometrischen Factors 10 ganze Einheiten abziehen, wodurch, wie man leicht begreift, ein ganz gleiches Resultat erhalten wird. Es heiße in unserm Falle der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks F, so

$$\text{ist } F = \frac{c^2 \,.\, \sin.A \,.\, \sin.B}{2 \,.\, \sin.C \,.\, \sin.tot.}, \quad \text{also}$$

$$\log.F = 2\log.c + \log.\sin.A + \log.\sin.B - \log.2 - \log.\sin.C - 10$$

$$\text{oder } F = \frac{c^2 \,.\, \sin.A \,.\, \sin.B}{2 \sin.C} \text{ für sin. tot.} = 1, \text{ also}$$

$$\log.F = 2\log.c + \log.\sin.A - 10 + \log.\sin.B - 10 - (\log.2 + \log.\sin.C - 10)$$
$$= 2\log.c + \log.\sin.A + \log.\sin.B - \log.2 - \log.\sin.C - 10.$$

Ich glaube nun in der Folge bei allen ähnlichen Fällen, wo nehmlich fehlende trigonometrische Factoren zu ergänzen seyn werden, eine Wiederholung der hierüber schon einige Mahle gemachten Bemerkung nicht mehr nöthig zu haben.

Beispiel: Es seyen gegeben; $c = 135$ Ruthen, $\angle A = 128^0\,25'$, $\angle B = 24^0\,30'$, also $\angle C = 27^0\,5'$.

Logarithmische Auflösung:

$$+ 2 \,.\, \log.135 = 4{,}2606676$$
$$\tfrac{1}{2}\log.\sin.128^0\,25' \text{ od. } 51^0\,35' = 0{,}8940461 - 1 \quad (\text{eigentlich } 9, -10,)$$
$$+ \log.\sin.24^0\,30' = 0{,}6177270 - 1$$
$$+ \quad 5{,}7724407 - 2$$
$$- \log.2 = 0{,}3010300$$
$$- \log.\sin.27^0\,5' = 0{,}6582842 - 1$$
$$- \quad 0{,}9593142 - 1$$

Also $\log.F = 4{,}8131265 - 1 = 3{,}8131265$

Folglich ist der Flächenraum des Dreiecks F = 6503,19 Quadratruthen = 6503 □Ruthen 19 □Fuß nach der Decimaltheilung.

Den logarithmischen Ansatz habe ich absichtlich für sin. tot. = 1 gemacht, damit weniger geübte Rechner sehen, wie sie sich hierbei zu verhalten haben, und diese Methode des Ansatzes, als die kürzeste, leicht handhaben lernen. Dieselbe soll in der Folge öfter angewendet werden.

Zusatz: Es kann sich ereignen, daß zwei Winkel des Dreiecks gleich sind; dann wird die Berechnung des Flächeninhalts etwas kürzer.

1) Es sey $\angle C = \angle B$; so ist

$$F = \frac{c^2 \,.\, \sin. A \,.\, \sin. B}{2 \,.\, \sin. B} = \frac{c^2 \,.\, \sin. A}{2}$$

2) Es sey $\angle A = \angle B$; so ist

$$\text{Sin } C = \sin. 2A = 2 \sin. A \,.\, \cos. A, \text{ also}$$

$$F = \frac{c^2 \,.\, \sin. A \,.\, \sin. A}{2 \,.\, 2 \sin. A \,.\, \cos. A}$$

$$= \frac{c^2 \,.\, \sin. A}{4 \,.\, \cos. A} = \frac{c^2 \,.\, \text{tang. } A}{4}$$

Beispiele: Es sey für den ersten Fall, c = 135 Ruthen (wie vorher), $\angle A = 128^0 25'$, der $\angle B = \angle C = 25^0 47' 30''$;

so ist 2 . log. 135 = 4,2606676

log. sin. $128^0 25'$ = 0,8940461 — 1

+ 5,1547137 — 1

— log. 2 = 0,3010300

log. F = 3,8536837

F = 7139,76 □Ruthen.

Es sey für den zweiten Fall, $c = 135$, $\angle = A = \angle B = 24^0 30'$,

so ist 2 log. 135 = 4,2606676
log. tang. $24^0 30'$ = 0,6587041 — 1
+ 4,9193717 — 1
— log. 4 = 0,6020600
also log. F = 3,3173117, daher
F = 2076 □Ruthen 40,3 □Fuß.

§. 22.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck ABC sind zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel, z. B. b, c, A gegeben; daraus werde der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet.

Auflösung: Auch hier kömmt es nur auf die trigonometrische Bestimmung der Höhe CD an, indem man c als Basis betrachtet.

Nun ist $b : CD = 1 : \sin. A$, also $CD = b . \sin. A$;

Folglich der Flächeninhalt $F = \frac{c . CD}{2} = \frac{bc . \sin. A}{2}$

Zusatz: Ist $b = c$, so ist $F = \frac{c^2 . \sin. A}{2}$, wie im Zusatz der vorigen Aufgabe.

Beispiel: Es sey gegeben: b = 863 Fuß, c = 376 Fuß, und $\angle A = 157^0 13'$; gesucht: F.

Hier ist + log. 863 = 2,9360108
+ log. 376 = 2,5751878
log. $157^0 13'$ od. log. $22^0 47'$ = 0,5879885 — 1 (eigentlich 9, —10.)
log. F = 6,0991871 — 1 = 5,0991871
also F = 12565,71 □Fuß = 12565 □Fuß 71 □Zoll.

Anmerkung. Es könnte auch nach obiger Formel aus dem Flächeninhalt, einer Seite und einem anliegenden Winkel die zweite anliegende Seite, oder aus dem Flächeninhalt und zweien Seiten der von denselben eingeschlossene Winkel (dieser jedoch zweideutig) berechnet werden; solche Fälle kommen jedoch in der Praxis schwerlich jemahls vor.

§. 23.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Von einem Dreieck A B C sind alle drei Seiten a, b, c, nach irgend einem Längenmaß in Zahlen gegeben; daraus soll der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden.

Auflösung: Es kommt hier darauf an, für eine Seite des Dreiecks c als Basis betrachtet, die zugehörige Höhe CD durch eine Gleichung (Funktion) der Größen a, b, c so auszudrücken, daß die Berechnung der Größe $\frac{c \cdot CD}{2}$ sich einer rein logarithmischen Behandlung unterwerfen läßt.

Nennen wir den Fächeninhalt des Dreiecks F, die Summe der bekannten drei Seiten, nehmlich $a + b + c = S$; so ist die analytische, jedoch nicht trigonometrische, Gleichung oder Funktion zwischen diesen veränderlichen Größen folgende:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[S \cdot (S-2a) \cdot (S-2b) \cdot (S-2c)}$$

oder auch

$$= \sqrt{[\tfrac{S}{2} \cdot (\tfrac{S}{2}-a) \cdot (\tfrac{S}{2}-b) \cdot (\tfrac{S}{2}-c)]}$$

Beweis: Es ist der Abschnitt $BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$

(nach dem Lehrsatz im §. 13),

$$CD^2 = a^2 - BD^2 = a^2 - \left\{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right\}^2,$$

oder weil sich die Differenz zweier Quadrate immer in zwei Factoren von dieser Gestalt zerlegen läßt: $m^2 - n^2 = (m+n).(m-n)$,

$$CD^2 = \left\{a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right\} \times \left\{a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right\}$$

$$= \left\{\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right\} \times \left\{\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2c}\right\}$$

$$= \left\{\frac{(a+c)^2 - b^2}{2c}\right\} \times \left\{\frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}\right\}$$

$$= \frac{(a+c+b).(a+c-b)}{2c} \times \frac{(b+a-c).(b-a+c)}{2c}$$

$$\text{Also } CD = \sqrt{\left\{\frac{(a+b+c).(b+c-a).(a+c-b).(a+b-c)}{4c^2}\right\}}$$

$$= \tfrac{1}{2c}\sqrt{[S . (S-2a) . (S-2b) . S - 2c]} \quad \text{für } a + b + c = S.$$

Da nun der Flächeninhalt des Dreiecks $F = \frac{c . CD}{2}$, so ist nach gehöriger Substitution des für CD gefundenen Werthes:

1) $F = \frac{1}{4}\sqrt{[S . (S-2a) . (S-2b) . (S-2c)]}$ oder, wenn man den Nenner 4 unter das Wurzelzeichen als $16 = 2.2.2.2$ bringt,

2) $F = \sqrt{[(\frac{S}{2}) . (\frac{S}{2} - a) . (\frac{S}{2} - b) . (\frac{S}{2} - c)]}$.

Diese zweite Formel ist zu wirklichen Berechnun=

gen die brauchbarste, wenn $\frac{s}{2}$ eine ganze Zahl giebt; wiedrigenfalls ist die erste vorzuziehen.

Die vier Factoren unter dem Wurzelzeichen sind durch gemeine Addition und Subtraction sehr schnell zu erhalten; dann aber geht, wie man leicht erkennt, die Rechnung logarithmisch weiter.

Diese Methode, aus den Seiten eines Dreiecks seinen Flächeninhalt zu berechnen, ist sehr nützlich und anwendbar, indem dadurch die Winkel und Senkrechten, so wie in der Ausübung eine verjüngte Zeichnung der großen Dreiecke im Felde, auf Papier ganz entbehrlich gemacht werden. Der Satz ist übrigens in der Geschichte der Mathematik berühmt; *Montucla* (Histoire des Mathematiques etc.) setzt seine Erfindung in frühere Zeiten, etwa ins 8te Jahrhundert; mit Beweis in einer gedruckten Schrift kommt der Satz zuerst gegen das Ende des 15ten Jahrh. vor; er wird von Einigen vielleicht ohne Grund dem Tartalea zugeschrieben, welcher ihn ebenfalls mit Beweis in seinem Buche: Trattato de numeri e misure, vorträgt.

Die Formel selbst enthält keine goniometrische Funktion, und ist also nicht trigonometrisch, wenn das Wort Trigonometrie in der gewöhnlichen beschränkten Bedeutung genommen wird; sie gehört aber als ein rein analytischer Ausdruck allerdings hieher. Der Beweis für die gefundene Formel läßt sich übrigens auch theilweise goniometrisch = trigonometrisch finden.

Es ist nehmlich

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ (Siehe §. 20), also}$$

$$1 + \cos. A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a) \cdot (b+c-a)}{2bc}$$

$$1 - \cos. A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c) \cdot (a-b+c)}{2bc}$$

Die erste Gleichung mit der zweiten multiplicirt giebt:

$$1 - \cos.^2 A = \sin.^2 A$$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}{4b^2c^2}$$

daher $\sin. A = \frac{1}{2} bc \sqrt{S \cdot (S-2a) \cdot (S-2b) \cdot (S-2c)}$.

Nun ist $F = \frac{bc \cdot \sin. A}{2}$ (nach der Aufgabe im §. 22),

also $F = \frac{1}{4}\sqrt{S \cdot (S-2a) \cdot (S-2b) \cdot (S-2c)}$, wie vorher.

Sind die Seiten a, b, c in kleinen Zahlen gegeben, so berechnet man das Product unter dem Wurzelzeichen auf gewöhnliche Art; im Gegentheil verrichtet man lieber die ganze Rechnung durch Logarithmen.

Beispiel: Es seyen gegeben a = 317 Fuß, b = 523 F., c = 267 F.; gesucht F. Hier wird

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{1107 \cdot 473 \cdot 61 \cdot 573} = \sqrt{\frac{1107 \cdot 473 \cdot 61 \cdot 573}{16}}$$

Nun ist + log. 1107 = 3,0441476
+ log. 473 = 2,6748611
+ log. 61 = 1,7853298
+ log. 573 = 2,7581546
+ 10,2624931
— log. 16 = 1,2041200
+ 9,0583731, durch 2 dividirt, giebt:
log. F = + 4,5291865 nahe.
also F = 33821,01 □Fuß äußerst nahe.

Zuſatz. Bisweilen findet es ſich, daß zwei oder au
alle drei Seiten des Dreiecks einander glei
ſind; dann wird die Berechnung etwas kürze

1) Wenn zwei Seiten gleich ſind, z. B. $b = c$
ſo wird:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + 2b) \cdot (2b - a) \cdot a^2}$$
$$= \tfrac{a}{4}\sqrt{(2b + a) \cdot (2b - a)}$$

2) Wenn alle drei Seiten gleich ſind, $a = b =$
ſo wird:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a \cdot a \cdot a \cdot a} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a^4} = \tfrac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}.$$
$$\log. F = 2 \log. a + \tfrac{1}{2} \log. 3 - \log. 4, \text{ u. ſ. w.}$$

§. 24.

Abgeleitete Aufgaben. (Fig. 10.)

Auf die Berechnungen der ebenen Dreiecke, w
ſie in den vorgetragenen Aufgaben gelehrt worden ſin
gründen ſich die Berechnungen aller ebenen geradlinig
Figuren, die ſich in Dreiecke zerlegen laſſen. Es wür
zu weit führen, wenn wir alle Aufgaben der Art hi
anführen wollten. Größtentheils hat die Anwendu
der vorhergegangenen trigonometriſchen Sätze auf z
ſammengeſetztere Probleme keine Schwierigkeit; üb
gens ſollen in der Folge, wo geodätiſche Aufgaben
verlangen, die Wege und Methoden der trigonomet
ſchen oder analytiſchen Rechnung überall angezeigt w
den. Beiſpielshalber mögen indeſſen ein paar Auf
ben zuſammengeſetzter Art hier Platz finden.

Aufgabe.

Von einem Viereck ABCD ſind die Diagona
AD, BC, und einer oder der andere Winkel, we
dieſe an ihrem Durchſchnittspunkte M bilden, gegeb

daraus ſoll der Flächeninhalt des Vierecks berechnet werden.

Auflöſung: Man nehme BC als die Baſis der beiden Dreiecke ABC, BCD an, ſo iſt AE die Höhe des einen, DF die Höhe des andern Dreiecks.

Es iſt AM : AE = 1 : sin. M; (M kann der ſtumpfe oder ſpitze Nebenwinkel bei M ſeyn); alſo AE = AM . sin. M.

Eben iſt DF = DM . sin. M.

Alſo iſt $\triangle$ ABC = $\frac{BC \cdot AM \cdot \sin. M}{2}$

$$\triangle BCD = \frac{BC \cdot DM \cdot \sin. M}{2};$$

folglich die Fläche von ABCD = $\frac{BC \cdot AD}{2}$. sin. M.

Aufgabe. (Fig. 11.)

Von einem Viereck ABCD ſind drei zuſammenſtoßende (nach einander folgende) Seiten, a,b,c und die Winkel A, B, welche je zwei dieſer Seiten bilden, gegeben; daraus werde der Flächenraum des Vierecks berechnet.

Auflöſung: Wir wollen annehmen, die zwei Seiten a, c ſchneiden ſich verlängert in E; dadurch entſtehen zwei Dreiecke, die ſich in folgender Art berechnen laſſen. Es iſt $\angle$ E = 180 — (A + B) bekannt; ferner iſt:

BE : b = sin. A : sin. E, alſo BE = $\frac{b \cdot \sin. A.}{\sin. E}$

AE : b = sin. B : sin. E, alſo AE = $\frac{b \cdot \sin. B.}{\sin. E}$

die Fläche des $\triangle ABE = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 \cdot \sin. A \cdot \sin. B}{\sin. E}$

(nach §. 21.)

$$CE = BE - a = \frac{b \cdot \sin. A}{\sin. E} - a,$$

$$DE = AE - c = \frac{b \cdot \sin. B}{\sin. E} - c.$$

Die Fläche des Dreiecks $CDE = \frac{1}{2} . CE . DE . \sin. E$; ſubſtituirt man für CE, DE die dafür gefundenen Werthe, ſo wird nach gehöriger Reduction

Fläche $\triangle CDE =$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{b . \sin. A . \sin. B}{\sin. E} - ab . \sin. B - bc . \sin. A + ac . \sin. E\right]$$

Alſo der Flächeninhalt des Vierecks

$ABCD = \triangle ABE - \triangle DCE$

$= \frac{1}{2}$ [ab . sin. B + bc . sin. A — ac . sin. E]

Sind die Seiten a, c parallel, ſo wird $\sin. E = \sin. (A + B) = o$, und $\sin. A = \sin. B$; dann wird offenbar der Flächeninhalt des Vierecks nach der angeführten Formel $= \frac{1}{2} . (ab + bc) . \sin. A = \frac{1}{2} b (a + c) . \sin. A.$

Die Berechnung für den Fall, wo a, b, c, A, B gegeben ſind, aber die zwei Seiten a, c verlängert nicht in E ſondern in einer entgegengeſetzten Richtung in Beziehung auf b zuſammenlaufen, kann jedem Leſer überlaſſen bleiben.

Zweite Abtheilung.

Sphärische Trigonometrie.

Allgemeine Vorkenntnisse.

§. 25.

Die sphärische Trigonometrie lehrt die Formeln oder goniometrischen Gleichungen, vermittelst deren solche Dreiecke berechnet werden, welche durch drei einander schneidende Bogen größter Kreise auf einer Kugeloberfläche gebildet werden. Sie beruhet ganz und gar auf den in der zweiten Abtheilung vorgetragenen Sätzen und Gleichungen der ebenen Trigonometrie, so wie auf einigen Lehrsätzen der Elementargeometrie, die wir hier als bekannt voraussetzen, und ohne deren richtige, ganz anschauliche Erkenntniß die sphärische Trigonometrie durchaus nicht deutlich begriffen wird.

Diese Sätze der Elementargeometrie, mit denen man zuvörderst aufs Reine gekommen seyn muß, will ich hier nur kurz ohne eine vollständige Auseinandersetzung andeuten, weil ich annehmen darf, daß bei weitem den meisten Lesern dieselben schon hinlänglich bekannt sind.

Wenn eine Kugel durch eine unbegrenzte Ebene durchschnitten wird, so muß die ebene Durchschnitts-

fläche an der Kugel ein Kreis seyn. Der Beweis ist ganz elementarisch und selbst für Anfänger leicht genug.

Kugelschnittsflächen sind gleich an Flächenraum und Peripherie, wenn sie vom Mittelpunkt der Kugel gleich weit abstehen; dieser Abstand wird bestimmt durch eine Senkrechte vom Mittelpunkt der Kugel auf die Kreisfläche des Durchschnitts. Die Kugelschnittsflächen sind um so größer, je näher sie dem Mittelpunkt der Kugel sind, und umgekehrt. Kugelschnitte, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind also die größten, und ihre Peripherieen geben auf der Kugeloberfläche, nach dem gebräuchlichen Ausdruck, **größte Kreise**.

Zwei **größte Kreise**, deren Ebenen nehmlich durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, halbiren einander wechselseitig; denn die Durchschnittslinie beider Kreisebenen geht durch den Mittelpunkt der Kugel, ist folglich ein Durchmesser für beide größte Kreise u. s. w.

Gedenkt man sich einen Durchmesser der Kugel, der durch den Mittelpunkt derselben läuft, senkrecht auf eine größte Kreisfläche (Durchschnittsebene) der Kugel, so heißt jener senkrechte Durchmesser eine **Achse der Kugel**, aber nur in Beziehung auf diese größte Kreisfläche und ihre Peripherie. Für eine andre größte Kreisfläche der Kugel findet auch eine andre Achse Statt; es kann unzählige größte Kreise, also auch unzählige Achsen nach verschiedenen Lagen in einer Kugel geben. Gewöhnlich nimmt man aber einen bestimmten größten Kreis an, dann giebt es für diesen auch nur eine **Achse**; in Beziehung auf diese Achse in bestimmter Lage kann allgemein die Peripherie des dazu gehörigen größten Kreises der **Aequator** (Gleicher) der Kugel heißen, weil die Fläche dieses größten Kreises die ganze Kugel in zwei gleiche congruente Theile zerlegt.

Die Endpunkte irgend einer bestimmt angenommenen Achse, welche ein Durchmesser der Kugel ist, heißen die Pole dieser Achse oder des dazu gehörigen Aequators, und in dieser Verbindung auch die Pole der Kugel selbst.

Der eine oder andre Pol einer Kugel (in der erwähnten Bedeutung) ist von jedem Punkt seines Aequators (als Peripherie auf der Kugeloberfläche betrachtet) gleich weit entfernt, sowohl in gerader Linie (Sehne) als auch im Bogen eines größten Kreises; dieser Bogen beträgt nehmlich immer $1\,R = 90^0$. Es läßt sich dieser Satz sehr leicht anschaulich machen und erweisen.

Ein größter Kreis, der durch die Pole eines andern bestimmten größten Kreises geht, steht senkrecht auf diesem, weil offenbar der Neigungswinkel der beiden einander schneidenden größten Kreisebenen gleich $1\,R = 90^0$ ist. Der Neigungswinkel zweier einander schneidenden Ebenen wird bekanntlich bestimmt durch zwei Senkrechte, welche in und von beiden Ebenen nach irgend einem gemeinschaftlichen Punkt der geraden Durchschnittslinie gezogen werden, und mit dieser Durchschnittslinie einen rechten Winkel bilden.

Umgekehrt, wenn ein größter Kreis in einer Kugel auf einem andern senkrecht steht, oder diesen unter einem Neigungswinkel $= 90^0$ schneidet, so geht dieser zweite Kreis durch die Pole des ersten.

Stehen daher zwei einander schneidende größte Kreise der Kugel beide senkrecht auf einem dritten größten Kreise, so müssen die Durchschnittspunkte jener die beiden Pole des dritten größten Kreises seyn.

Der Diedrische Winkel (Neigungswinkel) von zwei größten einander schneidenden Kreisflächen einer Kugel heißt ein sphärischer Winkel. Es ist ganz klar, daß dieser sphärische Winkel sich durch das Gradmaß des Bogens bestimmen läßt, welcher am Aequator

durch die zwei einander ſchneidenden größten Kreiſe b
grenzt (abgeſchnitten) wird, wenn man ſich zu dieſe
Aequator die Durchſchnittspunkte der zwei größt
Kreiſe als Pole gedenkt. Jener ſphäriſche Winkel wi
geometriſch auch beſtimmt (conſtruirt) durch zwei Ta
genten, welche man ſich an die beiden einander ſchn
denden Kreisebenen in ihrem Durchſchnittspunkte v
ſtellen muß, weil dieſe Tangenten zwei Senkrechte fü
die von beiden Ebenen nach einem gemeinſchaftlich
Durchſchnittspunkte derſelben gehen, und dadurch i
mer die Größe eines Diedriſchen Winkels geometri
beſtimmt wird, wie in der Elementargeometrie von
Lage der Ebenen gezeigt wird.

Zwei ſphäriſche Nebenwinkel ſind zuſammen
$2R = 180^0$, auch ſind zwei ſphäriſche Scheitelwin
einander gleich. Dies läßt ſich eben ſo beweiſen, d
von den Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln in ein
Ebene; man darf ſich nur zum Durchſchnittspun
zweier größten Kreiſe, als einem Pol, die zugehör
Aequator-Kreisebene gedenken, ſo entſtehen in die
Ebene durch die zwei einander ſchneidenden größten Kre
der ſphäriſchen Nebenwinkel und Scheitelwinkel e
Winkel in einer Ebene.

Wenn zwei größte Kreiſe einander ſchneiden,
liegen die beiden Durchſchnittspunkte, als Pole in e
ner Bogenentfernung von 180^0 von einander, wie ob
erinnert wurde. Werden ſolche nun, ehe ſie im zwe
ten Durchſchnittspunkt (Pol) zuſammenkommen, v
einem dritten größten Kreiſe, der nicht durch die Po
jener geht, geſchnitten, ſo entſteht ein ſogenannt
ſphäriſches Dreieck, welches alſo ein Stück der Ku
geloberfläche iſt, das von Bogenſtücken dreier größte
Kreiſe begrenzt wird, deren jeder kleiner als 180 iſt.

Wenn man alſo annimmt, daß jede Seite eine
ſphäriſchen Dreiecks kleiner als ein halber größter Krei

…nlich kleiner als 180°, so ist die Summe der
…mlingen der drei Seiten im Grade immer …
…ht rechte Winkel.

Rechtwinklicht heißt ein sphärisches Dreieck,
…n es einen oder auch mehrere rechte Winkel, …
…härische oder stumpfe Winkel enthalten. Man sieht
…cht ein, daß die Summe der drei sphärischen Winkel
…ichte beträgt, wie bei ebenen Dreiecken, sondern
…nderlich ist; es läßt sich daraus auch keine allgemeine
…sphärischen Winkeln allein, der dritte oder jeder …

Die Seiten (Bogen) eines sphärischen Dreiecks
…nd Maße (in Graden ꝛc.) jener Bogen größter Kreise
…Mittelpunkte der Kugel, welche man durch die
…den Mittelpunkt der Kugel nach den Ecken des …
…Bogen gezogen, gebildet werden; auch diese Seiten
…ieren Winkel sind Maße der zugehörigen Bogen. Es
…n des sphärischen Dreiecks. Es können also …
…chtung solcher Dreiecke nur Winkel, ebenso auch
…sphärische (sphärische Neigungswinkel) nur …
…eine Längenmaße, wie bei ebenen Dreiecken, …
…Seiten gerade Linien sind. Hieraus erhellt, daß in …
…Berechnung sphärischer Dreiecke nur goniometrische …
…sen oder Winkelfunktionen eingehen; dadurch wird …
…hen der Kalkul der sphärischen Neigungswinkel …
…leitet und schwieriger.

Die drei einander schneidenden Ebenen …
…Kugel (Kreissectoren), welche sich im Mittelpunkte …
…drei Bogen (Seiten(begrenzt werden, bilden eine …
…ondre Art dreiseitiger Pyramide, deren Basis die …
…m Oberfläche des sphärischen Dreiecks ist, und …
…Spitze in den Mittelpunkt der Kugel fällt; der …
…die Winkel dieser Pyramide, aus drei ebenen Winkeln …
…n Kreissectoren bestehend, muß immer weniger als …
…chte Winkel betragen, wie dies in der …

metrie von jedem körperlichen Winkel gezeigt wird; daher sind auch die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks weniger als 4 rechte; auch müssen zwei Seiten desselben zusammengenommen größer als die dritte Seite seyn.

Daß die Summe der diedrischen oder sphärischen Winkel eines sphärischen Dreiecks immer weniger als sechs rechte, aber auch mehr als zwei rechte Winkel betragen müsse, wird aus nachfolgendem Hülfssatz erwiesen werden.

Die sphärische Trigonometrie, als eine mathematische Wissenschaft, enthält die allgemeinen goniometrischen Gleichungen (Funktionen) zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks, und zeigt die Methoden, vermittelst jener Gleichungen, die man auch Lehrsätze nennen kann, aus drei-gegebenen Stücken eines solchen Dreiecks die übrigen trigonometrisch zu berechnen. Bevor wir die eigentlichen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie vornehmen, muß folgender Satz vorausgeschickt werden.

§. 26.

Hülfssatz. (Fig. 12.)

Man stelle sich vor *), durch drei einander schneidende Bogen größter Kreise sey auf einer Kugelober-

---

*) Wer sich die Sätze der sphärischen Trigonometrie ganz deutlich machen will, muß schlechterdings Modelle hierzu brauchen, nehmlich eine nicht allzu kleine Kugel (etwa 4 bis 5 Zoll im Durchmesser) von hartem Holz, worauf sich sphärische Dreiecke von verschiedener Gestalt ohne Schwierigkeit verzeichnen lassen; man zeichnet sie jedoch mit einem Stoff,

fläche das sphärische Dreieck A B C gebildet; die sphärischen (diedrischen) Neigungswinkel mögen hier und weiterhin immer A, B, C, die gegenüberliegenden Seiten oder Bogen aber um der Gleichförmigkeit der Bezeichnung willen, immer a, b, c heißen; man nehme ferner die Winkelspitzen A, B, C als die Pole (§. 25.) von drei andern größten Kreisen an, oder denke sich aus A, B, C in einer Bogenentfernung von 90° größte Kreisbogen beschrieben, welche einander auf der Kugeloberfläche in E, D, F schneiden, so ist auch E D F ein sphärisches Dreieck. Dieses Dreieck E D F steht mit dem Dreieck A B C in einem solchen Verhältniß (wechselseitigen Relation), daß die Seiten (Bogen) des erstern die gegenüberliegenden Winkel des andern zu 2 R = 180° ergänzen, und umgekehrt die Seiten des Dreiecks A B C die gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks D E F zu 180° ergänzen, z. B. E F + A = 180° u. s. w. In dieser Beziehung wird das Dreieck D E F das Ergänzungsdreieck (franz. triangle supplémentaire) vom Dreieck A B C genannt. Die Construction der Figuren auf einer Kugel hat keine Schwierigkeit, und kommt einer klaren evidenten Einsicht des Satzes sehr zu Hülfe.

Beweis: Der Bogen E F ist aus A in einer Bogenentfernung von 90° beschrieben, also ist A der Pol des Bogens E F, der in dieser Verbindung Aequator heißen kann; daher muß auch der Bogen eines größten Kreises von A

---

der sich leicht von der Kugeloberfläche wieder vertilgen läßt, um für andere Fälle andere sphärische Dreiecke auf die Kugeloberfläche zeichnen zu können; außerdem braucht man hohle Kugelpyramiden aus drei Kreissectoren von gleichem Halbmesser, zusammengefügt. Ein Weiteres hierüber sage ich im folgenden §. 27.

nach E, nehmlich Bogen AE = 90° seyn (nach §. 25.).

Eben so hat der Bogen DE den Punkt C zu seinem Pol, also ist auch der Bogen CE (eines größten Kreises) = 90°.

Da nun die Bogen AE und CE = 90° sind, so ist offenbar E ein Pol des Bogens AC oder auch GI (Aequator). Daraus folgt (nach §. 25), daß der Aequatorbogen AC (in Graden) das Maß des sphärischen Winkels AEC, und der Aequatorbogen GI das Maß des Winkels GEI = E ist.

Auf ganz gleiche Weise läßt sich zeigen, daß F der Pol des Bogens PR, und D der Pol des Bogens HQ ist;

also der Bogen PR das Maß des Winkels F,
" " " HQ " " " " D.

Da E der Pol des Bogens GI und
F " " " PR, so ist
Bog. EI = 90°, auch Bogen FR = 90°;
also EI + FR = 180° oder
EI + IF + IR = 180°, also auch
EF + IR = 180°.

Nun ist IR das Maß (in Graden) des sphärischen Winkels A.

Daraus folgt, daß EF + A = 180° ist, nehmlich der sphärische Winkel A wird durch die gegenliegende Seite EF des sphärischen Ergänzungsdreiecks zu 180° ergänzt.

Eben so kann man beweisen, daß B + DF = 180° und C + ED = 180° ist.

Ferner ist HC = 90°, BQ = 90°, also
HC + BQ = 180°, also auch
HQ + BC = 180°.

Nun ist HQ das Maß des sphärischen Winkels D,
folglich D + BC = 180°;

nehmlich die Seite BC ergänzt den gegenüberliegenden Winkel D des Ergänzungsdreiecks zu 180°. Eben so erhellt, daß E + AC und F + AB = 180° ist.

Schlußfolge: Da A + EF + B + DF + C + ED = 6R; und die Bogen oder Seiten des sphärischen Dreiecks EDF, nehmlich EF+DF+ED kleiner als 4R. (in Gradmaß) sind, so müssen die sphärischen Winkel A + B + C zum wenigsten größer als 2R, jedoch in jedem Fall kleiner als 6R seyn.

Hauptlehrsätze der sphärischen Trigonometrie,

oder

goniometrische Gleichungen

zur Auflösung aller sphärischen Dreiecke.

Diese gründen sich insgesammt auf die früher vorgetragenen Sätze der ebenen Trigonometrie und die dabei gegebenen goniometrischen Formeln.

§. 27.

Lehrsatz. (Fig. 13 und 14.)

In jedem sphärischen Dreieck ABC (dessen Winkel mit den Buchstaben A, B, C und die denselben gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet werden) verhalten sich die Sinus der Seiten (in Gradmaß) so gegen einander, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Ister Fall: Das sphärische Dreieck ABC (Fig. 13.) sey bei B rechtwinklicht; so ist sin. a : sin. c = sin. A : sin. C u. s. w.

Beweis: Man denke sich den Mittelpunkt M

der Kugel, auf welcher das sphärische Dreieck ABC beschrieben ist, die Halbmesser der Kugel AM, BM, CM, und durch ABM, BCM, ACM Ebenen gelegt, welche offenbar Kreissectoren sind, deren Halbmesser der Kugelhalbmesser ist. Auf solche Weise erhält man eine hohle dreiseitige Pyramide, deren Basis die krumme Oberfläche des sphärischen Dreiecks und deren Spitze M der Mittelpunkt der Kugel ist. Der Neigungswinkel der Kreissectoren (Ebenen) ACM und ABM ist in Graden gleich dem sphärischen Winkel A u. s. w.; der ebene Winkel CMB des Kreissectors BMC ist in Graden gleich der Seite (Bogen) a u. s. w. Ist nun der Neigungswinkel der Ebenen ABM und BCM $= 1R = 90^0$, so ist der sphärische Winkel $B = 1R = 90^0$. Das sphärische Dreieck ABC heißt in diesem Falle ein rechtwinklichtes, die Seite b, welche dem rechten Winkel B gegenüberliegt, heißt (wie in der ebenen Trigonometrie) die Hypotenuse, die beiden andern Seiten a, c aber heißen die Catheten des sphärischen Dreiecks, wenn nehmlich die Winkel A und C nicht auch rechte Winkel sind, welcher Fall auch möglich ist.

In der hohlen sphärischen Pyramide ABCM gedenke man sich CF senkrecht auf BM in der Ebene BCM, ferner FE senkrecht auf AM in der Ebene ABM; durch CFE stelle man sich eine Ebene gelegt vor, welche die Ebene ACM in der geraden Linie CE schneidet, so ist auch CE senkrecht auf AM in der Ebene ACM (nach der Lehre von den Ebenen in der Elementargeometrie).

Dieser Construction zufolge ist:

der diedrische Neigungswinkel $CEF = A$

" " " $CFE = B = 90^0$.

$CE = \sin. CMA = \sin. b$, für Sin. tot. den Halbmesser der Kugel gesetzt,

$CF = \sin. CMB = \sin. a$ " " " " "

Das ebene Dreieck CFE ist bei F rechtwinklicht, folglich ist:

CE : CF = sin. CFE : CEF oder

sin. b : sin. a = sin. B : sin. A = sin. tot. : sin. A.

Eben so ist sin. b : sin. c = sin. B : sin. C = sin. tot. : sin. C.

Daraus folgt auch:

sin. a . sin. c. = sin. A : sin. C, oder durch Versetzung

sin. a : sin. A = sin. c : sin. C.

IIter Fall: Das Dreieck ABC (Fig. 14.) sey schiefwinklicht; d. h. keiner seiner Winkel A, B, C sey = 90°. Auch hier verhalten sich die Sinus zweier Seiten gegen einander, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, z. B. sin. a : sin. b = sin. A : sin. B u. s. w.

Beweis: ABC sey ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel, deren Mittelpunkt M ist; AM, BM, CM Halbmesser der Kugel; ABCM eine hohle Kugelpyramide, deren Seitenflächen die Kreissectoren ABM, ACM, BCM sind. Von der Winkelspitze C sey auf die gegenüberliegende Seitenfläche ABM eine Senkrechte CD gefällt, DE in der Ebene ABM sey senkrecht auf AM und DF senkrecht auf BM; durch CDE und CDF denke man sich Ebenen gelegt, so stehen die graden Durchschnittslinien CE und CF senkrecht auf AM und BM.

Der Halbmesser der Kugel AM = BM = CM sey = 1.

Der Neigungswinkel CED ist = dem sphärischen Winkel A;

der Neigungswinkel CFD ist = dem sphärischen Winkel B;

CE = sin. AMC = sin. b; ME = cos. b,

CF = sin. BMC = sin. a; MF = cos. a.

Nun sind die ebenen Dreiecke CDE, CDF bei D rechtwinklicht;

also ist in dem ersten: $CE : CD = 1 : \sin. A$,
in dem zweiten: $CF : CD = 1 : \sin. B$.

---

also $CE : CF = \sin. B : \sin. A$, oder
$\sin. b : \sin. a = \sin. B : \sin. A$, oder
$\sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B$.

Daraus folgt auch $\sin. a . \sin. B = \sin. b . \sin. A$ u.s.w.

Durch eine ganz ähnliche Construction und ähnliche Proportionen zweier ebenen Dreiecke läßt sich darthun, daß auch ist:

$\sin. a : \sin. c = \sin. A : \sin. C$ und
$\sin. b : \sin. c = \sin. B : \sin. C$.

Der Satz behält seine Richtigkeit, wenn auch die Senkrechte CD nicht auf die Ebene des Kreissectors ABM selbst, sondern auf ihre Erweiterung (Verlängerung) über BM oder AM hinaus fällt, welches geschieht, wenn der sphärische Winkel B oder A größer als 90^0 ist; der Beweis wird in diesem Falle auf ganz gleiche Art geführt.

§. 28.

Modelle hierzu.

Es ist unglaublich, wie sehr durch zweckmäßig eingerichtete Modelle die deutliche evidente Einsicht der Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie erleichtert wird, selbst für weniger gute Köpfe. Eines Theils ist es wohl der dunkle, unsystematische Vortrag dieser Sätze in den meisten Lehrbüchern, andern Theils auch das ganz Unanschauliche in den zu den Sätzen gehörigen geometrischen Figuren, wenn sie auf einer Ebene construirt werden, wodurch sich so viele junge Leute von

dem ernſtlichen Studium der ſphäriſchen Trigonometrie, in dem falſchen Wahn, ſie ſey ſchwülſtig oder gehöre zur höhern Mathematik, zurückſchrecken laſſen; viele andere junge Leute, die dieſe Wiſſenſchaft erlernt zu haben vorgeben, verſtehen ſie aus dieſem Grunde wohl nur halb, und können daher eine ſtrengere Prüfung nicht beſtehen, wie mich mehrjährige Erfahrungen an meinen Zuhörern haben bemerken laſſen.

Es iſt wahr, daß die ſphäriſche Trigonometrie verwickelter und weitläufiger als die ebene iſt; ich behaupte aber, daß das Verſtehen jener nicht viel ſchwerer iſt, als das der andern, wenn ein gründliches Studium dieſer letztern vorausgeht, und die Anleitung zu jener, mündlich oder ſchriftlich, auf einem möglichſt einfachen ſyſtematiſchen Wege ohne viele Worte, mit Beihülfe guter Modelle, geſchieht. So behandelt, wird die ſphäriſche Trigonometrie nicht anders als die ebene ein Theil der niedern Mathematik, und kann auch von Anfängern, die ſich bis zur eigentlich höhern Mathematik nicht erheben wollen, oder um ihres Berufes willen nicht zu erheben brauchen, füglich mit erlernt werden können; dies um ſo mehr, da die ſphäriſche Trigonometrie auch der niedern Feldmeßkunſt und der populären Aſtronomie ſehr hülfreiche Dienſte leiſtet.

Außer einer Kugel von etwa 4 bis 5 Zoll im Durchmeſſer, worauf ſich leicht größte Kreiſe nach allen Lagen und demnach ſphäriſche Dreiecke von jeder Art und Geſtalt mit einem Stoff, der ſich wieder von der Kugel abwiſchen läßt, — ich lackire meine Kugeln und zeichne dann die größten Kreiſe mit Tuſche — vorzeichnen laſſen, bediene ich mich zur Erläuterung meiner Vorträge eines eigenen Modells, welches ſich ein Jeder ohne beſondre Kunſtgriffe ſelbſt anfertigen kann.

Aus guter, mäßig ſtarker, ſo eben als möglich geſchlagener und mit weißem Papier überzogener Pappe

mache man (Fig. 13 und 14) drei Kreisſectoren von gleichem Halbmeſſer etwa 4 bis 5 Zoll lang, nehmlich BCM, ABM, ACM; die zugehörigen Bogen a, b, c können eine verſchiedene Größe erhalten, nach der Angabe des zu erweiſenden Satzes; um dieſe Sectoren zu erhalten, kann man auf der gehörig zugerichteten Pappe einen Kreis beſchreiben, durch gezogene Halbmeſſer die Kreisſectoren (Ausſchnitte) begrenzen, und nun mit einem ſcharfen Meſſer genau ausſchneiden. Dieſe drei Kreisſectoren mit ihren Kanten zuſammengefügt, geben die ſphäriſche Pyramide ABCM; die Zuſammenfügung an den Kanten AM, BM, CM kann mittelſt eines feinen Kleiſters und ſchmaler weißer Papierſtreifen geſchehen; vor dieſer Zuſammenfügung beſtimmt man verſuchsweiſe den Punkt D, in welchen die Senkrechte von C auf die Ebene AMB (oder deren Erweiterung, Verlängerung) fällt, ziehet mit Tuſche DE und DF ſenkrecht auf AM und BM, ſodann von den ſo beſtimmten Punkten E, F gerade Linien nach C in den Ebenen ACM, BCM; zur Erläuterung des folgenden Lehrſatzes zieht man noch in der Ebene ABM die geraden Linien EG ∦ DF und DH ∦ BM; hierauf fügt man die Kreisſectoren an ihren Kanten feſt zuſammen, und ſpannt endlich zwiſchen C und D auf eine leicht zu erachtende Weiſe einen Faden von ſchwarzer feiner Seide aus, welcher die gerade ſenkrechte Linie CD anſchaulich macht. So erhält man ein Modell, welches die ebenen und diedriſchen Winkel des Dreiecks ABC, ihre goniometriſchen Funktionen, den Halbmeſſer der Kugel, die Lage der ebenen Dreiecke, welche zum Beweiſe dienen, uno die trigonometriſchen Proportionen dieſer Dreiecke ſehr anſchaulich vorſtellt, und dadurch das Verſtehen der Lehrſätze und Gleichungen ſelbſt ganz ungemein erleichtert. Es verſteht ſich übrigens von ſelbſt, daß man in das Modell die nöthigen Buch-

ſtaben ſchreibt, wie ſie in unſerer Figur ſtehen. Die geraden Linien CE, CF ꝛc. kann man zum Ueberfluß an die innern und äußern Seitenflächen der hohlen Kugelpyramide zugleich zeichnen; doch wird es hinreichen, wenn ſie an den innern Flächen ſtehen. Soll das ſphäriſche Dreieck bei B rechtwinklicht werden, wozu der Bogen AC verſuchsweiſe leicht gefunden wird ꝛc., ſo fällt die Senkrechte CD (Fig. 14) in die Lage CF (Fig. 13), nehmlich in die Ebene des Kreisſectors BCM, folglich fällt hier die Senkrechte DF (Fig. 14) weg, ſo wie auch DH ∥ BM.

Sollte ein Winkel z. B. B ein ſtumpfer ſeyn, ſo würde die Senkrechte CD (durch einen Faden vorgeſtellt) in die Erweiterung der Ebene ABM über BM hinausfallen. Die Conſtruction des Modells für dieſen Fall bedarf nach dem Geſagten keiner beſondern Erläuterung.

Außer dieſer Art Modelle und einer Kugel bedarf man zur Erläuterung der ſphäriſchen Trigonometrie eines andern Hülfsmittels. Will man einen ſphäriſchen Winkel, z. B. C noch auf eine andere Art anſchaulich machen, ſo ſtelle man durch irgend eine Vorrichtung zwei Tangenten an die Kreisſectoren ACM, BCM in ihrem Durchſchnittspunkte C vor; der Winkel, welchen dieſe Tangenten an C einſchließen, iſt in Gradmaß gleich dem ſphäriſchen Winkel (diedriſchen Neigungswinkel) C.

Mit Hülfe ſolcher Modelle, und nach einer Methode, wie man hier die ſphäriſche Trigonometrie abgehandelt findet, wird es jedem Lehrer, ſo gut wie mir, gelingen, ihren Zuhörern dieſe, faſt allgemein für ſehr ſchwer und ſchwülſtig geachtete, mathematiſche Disciplin eben ſo klar, leicht und angenehm zu machen, wie die ebene Trigonometrie, welche jene begründet. Auf eine

einfache, zweckmäßige Methode kommt allerdings sehr viel an.

§. 29.

Lehrsatz. (Fig. 13 und 14.)

In einem sphärischen Dreiecke A B C findet allgemein zwischen irgend einer Seite und den beiden andern Seiten, nebst dem von diesen eingeschlossenen Winkel, folgende Gleichung (Relation, Funktoin) Statt: *)

Der Cosinus einer Seite ist immer, in Beziehung auf den Sinus totus = 1, gleich dem Product aus den Cosinus der beiden andern Seiten nebst dem Product aus den Sinus dieser Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels, z. B.

$$\text{Cos. a} = \text{cos. b . cos. c} + \text{sin. b . sin. c . cos. A}$$

Beweis: Die Construction sey wie in §. 27. (Fig. 13. 14.), außerdem noch in der Ebene A M die Gerade EG ∥ DF und DH ∥ BM gezogen.

Es ist im rechtwinklichten Dreieck C D E

$\text{CE} : \text{ED} = 1 : \text{cos.CED (A)}$, also $\text{ED} = \text{sin.b} : \text{cos.A}$.

im rechtwinklichten Dreieck C D F ist

$\text{CF} : \text{FD} = 1 : \text{cos. CFD (B)}$, also $\text{FD} = \text{sin. a . cos. B}$.

Ferner ist $\angle \text{MED} = 1\text{R} = \angle \text{MGE}$, also

$\angle \text{HED} = \angle \text{GME}$ (weil $\text{GME} + \text{MEG} = 1\text{R}$, auch $\text{MEG} + \text{HED} = 1\text{R}$.)

also ist $\angle \text{HED} = c$ (in Gradmaß)

auch ist $\angle \text{DEH} = \angle \text{EGM} = 1\text{R}$.

---

*) Der Satz ist leicht in Worten auszudrücken, wird aber in Buchstabenformel, seiner Bedeutung nach, dem Gedächtniß leicht zu behalten.

folglich im rechtwinklichten Dreieck DfHE

ED : HD = 1 : sin. c; also HD = ED . sin. c = cos. A . sin. b . sin. c

wenn man ſtatt ED den dafür gefundenen Werth ſubſtituirt.

Im rechtwinklichten Dreieck EMG iſt

EM : MG = 1 : cos. EMG (c), alſo MG = EM . cos. c,

oder (weil EM = cos. b für den Halbmeſſer der Kugel = 1) = cos. b . cos. c

Nun iſt MF = MG + GF = MG + HD, oder

cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c . cos. A

(nach gehöriger Subſtitution der für MG u. HD gefundenen Werthe.)

Auf eine ganz gleiche Weiſe, vermittelſt einer ähnlichen Conſtruction, läßt ſich auch beweiſen, daß

cos. b = cos. a . cos. c + sin. a . sin. c . Cos. B und

cos. c = cos. a . cos. b + sin. a . sin. b . Cos. C iſt.

Dieſer Satz gilt auch für ein rechtwinklichtes ſphäriſches Dreieck ABC (Fig. 13.). Der Winkel B ſey = 90°, ſo fällt die Senkrechte von C auf die Ebene ABM zugleich in die Ebene BCM, man ziehe EG ſenkrecht auf BM.

Auch hier iſt ∠ GEF = ∠ GME = c (in Graden).

Im rechtwinklichten Dreieck CEF iſt

CE : EF = 1 : cos. A, alſo EF = sin. b . cos. A

Im rechtwinklichten Dreieck GEF iſt

EF : FG = 1 : sin. GEF (c) alſo FG = EF . sin. c = sin. b . sin. c . cos. A

Im rechtwinklichten Dreieck EGM iſt

EM : GM = 1 : cos. c, alſo GM = EM . cos. c = cos. b . cos. c.

Nun iſt FM = GM + FG und FM = cos. a, alſo

cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c . cos. A.

Anm.: Ein Modell nach der im §. 28 beschriebenen Art wird die deutliche Einsicht dieses ganzen Satzes außerordentlich erleichtern.

§. 30.

Lehrsatz.

In einem sphärischen Dreieck ABC findet allgemein zwischen einem Winkel und den beiden andern Winkeln, nebst der zwischen diesen beiden Winkeln liegenden Seite folgende Gleichung (Relation, Funktion) Statt:

Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Product aus den Sinus der beiden andern Winkel und dem Cosinus der dazwischen liegenden Seite, weniger dem Product aus den Cosinus der beiden andern Winkel.

z. B. cos. A = sin. B . sin. C . cos. a — cos. B . cos. C.

Beweis: Zu dem Dreieck ABC giebt es (nach §. 26.) ein Ergänzungsdreieck (triangle supplémentaire), dessen Winkel wir A′, B′, C′ und dessen gegenüberliegende Seiten a′, b′, c′ nennen wollen. Die Seiten des einen Dreiecks ergänzen (nach §. 26.) die gegenüberliegenden Winkel, deren Spitzen oder Eckpunkte die Pole jener Seiten sind, zu 180^0, und umgekehrt.

Setzt man also im Ergänzungsdreieck A′ B′ C′

$a' = 180^0 - A$, $b' = 180^0 - B$, $c' = 180^0 - C$ und

$A' = 180^0 - a$, $B' = 180^0 - b$, $C' = 180^0 - c$;

so ist, wenn cos. a′ positiv genommen wird, cos. A negativ, weil A der Nebenwinkel von a′ ist; als absolute Größe betrachtet sind aber beide gleich; es ist nehmlich + cos. a′ = — cos. A; eben so + cos. b′ = — cos. B u. s. w.

Im Ergänzungsdreieck A′ B′ C′ ist (nach §. 29.)

$$\cos. a' = \cos. b' \,.\, \cos. c' + \sin. b' \,.\, \sin. c' \,.\, \cos. A',$$

also im Dreieck ABC,

$$-\cos. A = \cos. B \,.\, \cos. C - \sin. B \,.\, \sin. C \,.\, \cos. a, \text{ oder}$$

$$+\cos. A = \sin. B \,.\, \sin. C \,.\, \cos. a - \cos. B \,.\, \cos. C.$$

§. 31.

Lehrsatz.

In einem sphärischen Dreieck ABC finden zwischen den drei Seiten a, b, c und zwei an einer Seite a liegenden Winkeln B, C folgende Gleichungen (Relationen, Funktionen) Statt: *)

1) $\sin. a \,.\, \cos. c = \cos. a \,.\, \sin. c \,.\, \cos. B + \sin. b \,.\, \cos. C.$

2) $\sin. a \,.\, \cot. c = \cos. a \,.\, \cos. B + \sin. B \,.\, \cot. C.$

Beweis: Nach §. 29 ist

$$\cos. b = \cos. a \,.\, \cos. c + \sin. a \,.\, \sin. c \,.\, \cos. B \text{ und}$$

$$\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C$$

Substituirt man nun den Werth cos. b der obern Gleichung in die untere, so erhält man:

$$\cos. c = \cos.^2 a \,.\, \cos. c + \cos. a \,.\, \sin. a \,.\, \sin. c \,.\, \cos. B + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C.$$

Setzt man statt $\cos.^2 a$ den gleichen Werth $1 - \sin.^2 a$, so wird

$$\cos. c = \cos. c - \cos. c \,.\, \sin.^2 a + \cos. a \,.\, \sin. a \,.\, \sin. c \,.\, \cos. B + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C,$$

also $\sin.^2 a \,.\, \cos. c$

$$= \sin. a \,.\, \cos. a \,.\, \sin. c \,.\, \cos. B + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C,$$

---

*) Der Wortausdruck für diesen Satz ist schwülstig, der Buchstabenausdruck hingegen leicht zu behalten, weshalb ich hier bloß die Formel gebe.

folglich wird, wenn man die Glieder der Gleichung durch sin. a dividirt:

1) $\sin. a . \cos. c = \cos. a . \sin. c . \cos. B + \sin. b . \cos. C.$

Nach §. 27. ist: $\sin. b = \frac{\sin. B . \sin. c}{\sin. C}$

also $\sin. a . \cos. c$

$= \cos. a . \sin. c . \cos. B + \frac{\sin. B . \sin. c . \cos. C}{\sin. C}$ (α.)

Dividirt man durch sin. c, und setzt man $\frac{\cos. c}{\sin. c}$

$= \cot. c$, so erhält man:

2) $\sin. a . \cot. c = \cos. a . \cos. B + \sin. B . \cot. C.$

Aus der Gleichung (α.) folgt auch diese:

$\sin. c . \sin. B . \cot. C = \sin. a . \cos. c - \cos. B . \sin. c . \cos. a$

u. s. w.

§. 32.

Die in den vier vorhergehenden Lehrsätzen aufgestellten Gleichungen reichen zur Auflösung oder Berechnung aller sphärischen Dreiecke aus. Die ersten zwei Sätze können als Fundamentalsätze betrachtet werden, aus denen die zwei andern, so wie alle übrigen sonst noch gebräuchlichen Formeln durch goniometrische Gleichungen, ohne Beihülfe geometrischer Construction, hergeleitet werden.

Zur Berechnung rechtwinklichter sphärischer Dreiecke geben einige Schriftsteller, z. B Vega in seinem Mathem. Lehrb. noch folgenden Satz an, den man jedoch entbehren kann:

In einem rechtwinklichten sphärischen Dreiecke verhält sich der Sinus totus zum Sinus einer Cathete, wie

die Tangente des an dieser Cathete anliegenden Winkels zur Tangente der gegenüberliegenden Cathete.

Der Beweis läßt sich also führen:

Es sey das Dreieck A B C (Fig. 13.) bei B rechtwinklicht u. s. w.

so ist MF : CF = sin. tot. : tang. a
ferner EF : CF = sin. tot. : tang. A

also MF : EF = tang. A : tang. a

Im rechtwinklichten Dreieck M E F ist:

MF : EF = sin. tot. : sin. c

folglich sin. tot. : sin. c = tang. A : tang. a

Jede der in den vier Hauptsätzen aufgestellten Gleichungen giebt durch dreimahlige Versetzung der Buchstaben, welche die Seiten und Winkel bezeichnen, drei Gleichungen. Diese Versetzungen sind bei einiger Aufmerksamkeit auf die, nur für einen Fall gezeigten, Relationen nicht schwer zu finden. Z B. nach dem ersten Satz (§. 27.) ist:

sin. a : sin. b = sin. A : sin. B, also
sin. a . sin. B = sin. b . sin. A, also

durch Versetzung der Buchstaben (Seiten u. Winkel) auch

sin. a . sin. C = sin. c . sin. A und
sin. b . sin. C = sin. c . sin. B.

Nach dem zweiten Satz (§. 29.) ist:

cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c. cos. A,

durch Versetzung:

cos. b = cos. a . cos. c + sin. a . sin. c . cos. B
cos. c = cos. a . cos. b + sin. a . sin. b. cos. C.

Eben so verhält es sich mit den Versetzungen des 3ten und 4ten Satzes, welche dem Nachdenken der Leser überlassen bleiben.

Die Schlüsse oder Folgen, die sich übrigens für

einen besondern Fall einer Aufgabe aus den obigen Gleichungen ergeben, kann jeder Anfänger finden, z. B. aus der Gleichung:

$$\cos. a = \cos. b \,.\, \cos. c + \sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A$$

folgt: $\cos. A = \dfrac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b \,.\, \sin. c}$, nach welcher Formel man aus drei Seiten eines sphärischen Dreiecks einen Winkel A berechnen kann, den die Seiten b, c einschließen u. s. w

§. 33.

Abgeleitete, zu logarithmischer Bearbeitung brauchbare Formeln.

Die Formeln der vier obigen Hauptsätze gestatten, die erste ausgenommen, keine durchgängig logarithmische Behandlung. Man hat sich daher bemüht, aus denselben andere abzuleiten, welche diese Bequemlichkeit und Abkürzung bei wirklichen Zahlenberechnungen gestatten. Die vorzüglichsten und brauchbarsten dieser abgeleiteten Formeln wollen wir hier mit Beweis kennen lernen, und dem Gedächtniß, so weit es sich thun läßt, wohl einprägen.

1.

Es ist, wenn A, B, C die drei Winkel, a, b, c die denselben gegenüberliegenden drei Seiten (Bogen eines sphärischen Dreiecks genannt werden:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\frac{1}{2}(b-c+a)\,.\,\sin.\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\sin.\frac{1}{2}(a-b-c)}\right.}$$

Beweis: Nach dem zweiten Lehrsatz (§. 29.) ist:

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{cos. a} - \text{cos. b . cos. c}}{\text{sin. b . sin. c}};$$ daher, wie leicht zu zeigen ist,

$$1 + \text{cos. A} = \frac{\text{cos. a} - \text{cos. (b + c)}}{\text{sin. b . sin. c}}$$

$$1 - \text{cos. A} = \frac{\text{cos. (b - c)} - \text{cos. a}}{\text{sin. b . sin. c}}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1 - \text{cos. A}}{1 + \text{cos. A}} = \frac{\text{cos. (b - c)} - \text{cos. a}}{\text{cos. a} - \text{cos. (b + c)}},$$ oder (nach den Formeln 23. 24. im §. 8.)

$$\frac{2\,\text{sin.}^2\,\frac{1}{2}\,\text{A}}{2\,\text{cos.}^2\,\frac{1}{2}\,\text{A}} = \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{A} = \frac{\text{cos. (b - c)} - \text{cos. a}}{\text{cos. a} - \text{cos. (b + c)}}$$

oder durch gehörige Reduction nach der Formel 32. in §. 8.

$$\text{Tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{A} = \frac{2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{a}+\text{b}-\text{c})\,.\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{a}-\text{b}+\text{c})}{2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{a}+\text{b}+\text{c})\,.\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{b}+\text{c}-\text{a})}$$

$$= \frac{\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,(\text{b}-\text{c}+\text{a})\,.\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{b}-\text{c}-\text{a})}{\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,(\text{a}+\text{b}+\text{c})\,.\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,(\text{a}-\text{b}-\text{c})}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A} = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{b}-\text{c}+\text{a})\,.\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{b}-\text{c}-\text{a})}{\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{a}+\text{b}+\text{c})\,.\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{a}-\text{b}-\text{c})}\right\}}$$

2.

$$\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{-\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C}+\text{A})\,.\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C}-\text{A})}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C}+\text{A})\,.\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C}-\text{A})}\right\}}$$

$$\text{oder} = \sqrt{\left\{\frac{-\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C}+\text{A})\,.\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C}-\text{A})}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B}-\text{C})\,.\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{C}-\text{B})}\right\}}$$

weil immer cos. (a — b) = cos. (b — a), auch im Zeichen, sind. Denn zu einem Winkel, er sey positiv oder negativ, gehört derselbe Cosinus.

Beweis: Nach dem dritten Hauptſatz im §. 30. iſt:

$$\cos. a = \frac{\cos. B \,.\, \cos. C + \cos. A}{\sin. B \,.\, \sin. C}, \text{ alſo iſt}$$

$$1 + \cos. a = \frac{\cos. A + \cos.(B - C)}{\sin. B \,.\, \sin. C}$$

$$1 - \cos. a = - \frac{\cos.(B + C) + \cos. A}{\sin. B \,.\, \sin. C}, \text{ alſo}$$

$$\frac{1 - \cos. a}{1 + \cos. a} \text{ oder } \operatorname{tang.}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-[\cos.(B+C)+\cos. A]}{\cos.(B-C) + \cos. A}$$

oder nach einer Reduction, wie in 2) vorher:

$$\operatorname{Tg.} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left\{\frac{-\cos \tfrac{1}{2}(B+C+A)\,.\,\cos. \tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos. \tfrac{1}{2}(B-C+A)\,.\,\cos. \tfrac{1}{2}(B-C-A)}\right\}}$$

3.

$$\operatorname{Sin.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left\{\frac{\sin. \tfrac{1}{2}(a+b-c)\,.\,\sin. \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin. b \,.\, \sin. c}\right\}}$$

Beweis: Es iſt, wie in 1)

$$1 - \cos. A = \frac{\cos.(b - c) - \cos. a}{\sin. b \,.\, \sin. c} \text{ oder}$$

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{-2 \sin. \tfrac{1}{2}(b-c+a)\,.\,\sin. \tfrac{1}{2}(b-c-a)}{\sin. b \,.\, \sin. c}$$

alſo nach einer leichten Reduction:

$$\sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left\{\frac{\sin. \tfrac{1}{2}(a+b-c)\,.\,\sin. \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin. b \,.\, \sin. c}\right\}}$$

4.

$$\operatorname{Cos.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left\{\frac{\sin. \tfrac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\sin. \tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin. b \,.\, \sin. c}\right\}}$$

wird eben ſo bewieſen, wenn man, wie vor-

her $1 + \cos. A = \frac{\cos. a - \cos. (b + c)}{\sin. b \,.\, \sin. c}$

gehörig entwickelt und reducirt. Bei einiger Uebung und Aufmerksamkeit bringt man es in dergleichen goniometrischen Reductionen sehr bald zur Fertigkeit.

5.

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left\{\frac{-\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin. B \,.\, \sin. C}\right\}}$$

wird gefunden, wenn man $1 - \cos. a = -\frac{\cos. (B + C) + \cos. A}{\sin. B \,.\, \sin. C}$ in 2) auf gleiche Weise, wie vorher, reducirt.

6.

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left\{\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin. B \,.\, \sin. C}\right\}}$$

wird gefunden, wenn man $(1 + \cos. a)$ oder $2 \cos.^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\cos. A + \cos. (B - C)}{\sin. B \,.\, \sin. C}$ in 2) gehörig reducirt.

7.

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b - a) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}c \,.\, \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b + a) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}c \,.\, \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

Beweis: Nach dem Satz im §. 29. ist:

$$\cos.a - \cos.b \,.\, \cos.c = \sin.b \,.\, \sin.c \,.\, \cos.A$$
$$\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c = \sin.a \,.\, \sin.c \,.\, \cos.B.$$

also $\dfrac{\cos.a - \cos.b \,.\, \cos.c}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} = \dfrac{\sin.b \,.\, \cos.A}{\sin.a \,.\, \cos.B} = \dfrac{\sin.B \,.\, \cos A}{\sin.A \,.\, \cos B}$;

daher $1 + \dfrac{\cos.a - \cos.b \,.\, \cos.c}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} = 1 + \dfrac{\sin.B \,.\, \cos.A}{\sin.A \,.\, \cos.B}$,

oder

$$\alpha)\ \frac{(\cos.a + \cos.b) \,.\, (1 - \cos.c)}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} = \frac{\sin.(A + B)}{\sin.A \,.\, \cos.B}$$

Hingegen ist

$$\frac{\cos.a - \cos.b \,.\, \cos.c}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} - 1 = \frac{\sin.B \,.\, \cos.A}{\sin.A \,.\, \cos.B} - 1,$$

oder

$$\beta)\ \frac{(\cos.a - \cos.b) \,.\, (1 + \cos.c)}{\cos.b - \cos.a \,.\, \cos.c} = \frac{\sin.(B - A)}{\sin.A \,.\, \cos.B}$$

Wenn man nun die Gleichung β) durch die andre α) dividirt, und [nach den Formeln 23) 24) in §. 8.] $\dfrac{1 + \cos.c}{1 - \cos.c} = \dfrac{\cos.^2 \frac{1}{2} c}{\sin.^2 \frac{1}{2} c} = \cot.^2 \frac{1}{2} c$

setzt, so folgt:

$$\frac{\cos.a - \cos.b}{\cos.a + \cos.b} \,.\, \cot.^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin.(B - A)}{\sin.(B + A)},$$ oder

[nach den Formeln 34) und 21) im §. 8.]

γ) $\tang.\frac{1}{2}(b - a) \,.\, \tang.\frac{1}{2}(b + a) \,.\, \cot.^2 \frac{1}{2} c =$

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}(B - A) \,.\, \cos.\frac{1}{2}(B - A)}{\sin.\frac{1}{2}(B + A) \,.\, \cos.\frac{1}{2}(B + A)}$$

Nun ist ferner $\frac{\sin.b}{\sin.a} + 1 = \frac{\sin.B}{\sin.A} + 1$, oder

$$\frac{\sin.b + \sin.a}{\sin.a} = \frac{\sin.B + \sin.A}{\sin.A}, \text{ eben so}$$

$$\frac{\sin.b - \sin.a}{\sin.a} = \frac{\sin.B - \sin.A}{\sin.A}, \text{ also}$$

$$\frac{\sin.b - \sin.a}{\sin.b + \sin.a} = \frac{\sin.B - \sin.A}{\sin.B + \sin.A}, \text{ oder nach}$$

den Formeln 29) 30) 33) im §. 8. reducirt:

δ) $\text{Tang.}\frac{1}{2}(b - a) \cdot \cot.\frac{1}{2}(b + a) =$

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}(B - A) \cdot \cos.\frac{1}{2}(B + A)}{\sin.\frac{1}{2}(B + A) \cdot \cos.\frac{1}{2}(B - A)}$$

Nun multiplicire man die Gleichungen γ) und δ) mit einander, so ist, weil allgemein $\text{tang}\,\psi \cdot \cot.\psi = 1$, welcher Winkel auch ψ sey:

$$\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}(b-a) \cdot \cot.^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin.^2\frac{1}{2}(B-A)}{\sin.^2\frac{1}{2}(B+A)}, \text{ also}$$

durch Ausziehung der Quadratwurzel:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b - a) \cdot \cot.\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B - A)}{\sin.\frac{1}{2}(B + A)}$$

Dividirt man durch diese letzte Gleichung die Gleichung γ), so wird:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b + a) \cdot \cot.\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos.\frac{1}{2}(B - A)}{\cos.\frac{1}{2}(B + A)}$$

Setzt man $\cot.\frac{1}{2}c = \frac{1}{\text{tang.}\frac{1}{2}c}$, so erhält man

erstlich: $\text{tang.}\frac{1}{2}(b-a) = \text{tang.}\frac{1}{2}c \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(B-A)}{\sin.\frac{1}{2}(B+A)}$

zweitens: $\text{tg.}\frac{1}{2}(b+a) = \text{tang.}\frac{1}{2}c \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}(B-A)}{\cos.\frac{1}{2}(B+A)}$

8.

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B-A) = \cot.\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+A) = \cot.\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

Beweis: Nach dem dritten Hauptſatz im §. 30 iſt:

$\cos. A + \cos. B \cdot \cos. C = \sin. B \cdot \sin. C \cdot \cos. a$ und

$\cos. B + \cos. A \cdot \cos. C = \sin. A \cdot \sin. C \cdot \cos. b.$

Folglich:

$$\frac{\cos. A + \cos. B \cdot \cos. C}{\cos. B + \cos. A \cdot \cos. C} = \frac{\sin. B \cdot \cos. a}{\sin. A \cdot \cos. b} = \frac{\sin. b \cdot \cos. a}{\sin. a \cdot \cos. b}$$

Zu dieſer Gleichung addire man 1, und ſubtrahire auch 1, ſo erhält man durch eine ganz ähnliche Verwandlung, wie in 7).

$$\frac{(\cos. A + \cos. B) \cdot (1 + \cos. C)}{\cos. B + \cos. A \cdot \cos. C} = \frac{\sin. (b+a)}{\sin. a \cdot \cos. b} \text{ und}$$

$$\frac{(\cos. A - \cos. B) \cdot (1 - \cos. C)}{\cos. B + \cos. A \cdot \cos. C} = \frac{\sin. (b-a)}{\sin. a \cdot \cos. b}, \text{ alſo}$$

durch eine ähnliche Reduction, wie in 7).

$$\frac{\cos. A - \cos. B}{\cos. A + \cos. B} \cdot \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin. (b-a)}{\sin. (b+a)} \text{ oder}$$

α) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B+A) \cdot \text{tang.}\tfrac{1}{2}(B-A) \cdot \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a) \cdot \cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a) \cdot \cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

Nun iſt auch, wie in 7) δ)

β) $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B-A) \cdot \cot.\tfrac{1}{2}(B+A) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a) \cdot \cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a) \cdot \cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}$$

Multiplicirt man die Gleichungen α) β) mit einander, so erhält man:

$$\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}(B-A) \,.\, \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}(b-a)}{\sin.^2 \frac{1}{2}(b+a)}, \text{ folglich}$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(B-A) \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin. \frac{1}{2}(b-a)}{\sin. \frac{1}{2}(b+a)}$$

Dividirt man durch diese Gleichung die Gleichung α) so wird:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(B+A) \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos. \frac{1}{2}(b-a)}{\cos. \frac{1}{2}(b+a)}$$

Weil aber $\text{tang.} \frac{1}{2} C = \frac{1}{\text{cot.} \frac{1}{2} C}$, so ist:

erstlich: $\text{tang.} \frac{1}{2}(B-A) = \text{cot.} \frac{1}{2} C \,.\, \frac{\sin. \frac{1}{2}(b-a)}{\sin. \frac{1}{2}(b+a)}$

zweitens: $\text{tang.} \frac{1}{2}(B+A) = \text{cot.} \frac{1}{2} C \,.\, \frac{\cos. \frac{1}{2}(b-a)}{\cos. \frac{1}{2}(b+a)}$

§. 34.

Zweite Methode, die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie zu finden.

(Fig. 15.)

Wir haben gesehen, daß die zwei Sätze im §. 27 und §. 29, durch eine geometrische Construction in der Kugelpyramide bewiesen, als Fundamentalsätze zu betrachten sind, aus welchen die übrigen durch goniometrische Gleichungen hergeleitet werden. Es wird den denkenden Lesern nicht unangenehm seyn, zu sehen, wie sich derselbe Zweck auf einem noch andern Wege und zwar, wie es mir scheint, durch eine noch einfachere Construction an der Kugelpyramide erreichen läßt, der-

gestalt, daß hier nur ein Satz, nehmlich der zweite Lehrsatz im §. 29, der Fundamentalsatz wird, gleichsam die Quelle, aus welcher alle übrigen fließen.

Es sey wieder ABC (Fig. 15) ein sphärisches Dreieck mit der gebrauchten Bezeichnung seiner Winkel und Seiten, ABCM eine Kugelpyramide; ferner sey AD eine Tangente an den Bogen AB in der Ebene des Kreissectors ABM, der Kugelhalbmesser MB sey verlängert, bis er die Tangente AD in D schneidet; auf solche Weise ist MAD ein ebenes rechtwinklichtes Dreieck, der Kugelhalbmesser AM ist der Sinus totus, AD ist die Tangente, MD die Secante des Bogens (oder Winkels) $AB = c$; eben so sey AG eine Tangente und MG eine Secante des Bogens (oder Winkels) $AC = b$ für denselben Sin. tot. AM in dem ebenen rechtwinklichten Dreieck MAG.

Der Winkel DAG, welchen die beiden Tangenten AD, AG einschließen, ist dem Neigungswinkel der beiden Kreissectoren ABM und ACM oder dem sphärischen Winkel A in Gradmaß gleich, wie oben erinnert wurde; der Bogen $AB = c$ ist das Maß des ebenen Winkels AMD u. s. w.

Man ziehe die Hülfslinie DG, so ist nach einem Satz der ebenen Trigonometrie im §. 19. 1ste Abtheil.

$DG^2 = AD^2 + AG^2 - 2AD \,.\, AG \,.\, \cos. A$ oder

$DG^2 = \text{tang.}^2 b + \text{tang.}^2 c - 2\,\text{tang.}\, b \,.\, \text{tg.}\, c \,.\, \cos. A$

Ferner ist aus gleichem Grunde im Dreieck MDG

$DG^2 = MG^2 + MD^2 - 2MG \,.\, MD \,.\, \cos a$, oder

$DG^2 = \text{sec.}^2 b + \text{sec.}^2 c - 2\,\text{sec.}\, b \,.\, \text{sec.}\, c \,.\, \cos. a.$

Hieraus folgt:

$\text{tang.}^2 b + \text{tang.}^2 c - 2\,\text{tang.}\, b \,.\, \text{tang.}\, c \,.\, \cos. A =$

$\text{sec.}^2 b + \text{sec.}^2 c - 2\,\text{sec.}\, b \,.\, \text{sec.}\, c \,.\, \cos. a$

Subtrahirt man von der untern Reihe der Gleichung die obere, so wird, weil immer für Sin. tot. = 1, $\sec.^2 b - \tang.^2 b = 1$ ist, und $\tang. b =$

$$\frac{\sin. b}{\cos. b}, \quad \sec. b = \frac{1}{\cos. b},$$

$$1 + 1 + \frac{2 \sin. b \,.\, \sin. c}{\cos. b \,.\, \cos. c} . \cos. A - \frac{2 . \cos. a}{\cos. b . \cos. c} = 0,$$

$$\text{demnach } 2 + \frac{2 \sin. b \,.\, \sin. c}{\cos. b \,.\, \cos. c} . \cos. A = \frac{2 \cos. a}{\cos. b . \cos. c},$$

$$\text{also } 1 + \frac{\sin. b \,.\, \sin. c}{\cos. b \,.\, \cos. c} . \cos. A = \frac{\cos. a}{\cos. b . \cos. c}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\Cos. a = \cos. b . \cos. c + \sin. b . \sin. c . \cos. A,$$

derselbe Satz, welcher oben im §. 29 auf eine offenbar weitläufigere Art erwiesen wurde. Der hier gegebene geometrisch-analytische Beweis findet sich nicht in unsern Lehrbüchern, wahrscheinlich weil er den Verfassern nicht bekannt war.

Auf ganz gleiche Weise kann man auch beweisen, daß

$\Cos. b = \cos. a . \cos. c + \sin. a . \sin. c . \cos. B$ und

$\Cos. c = \cos. a . \cos. b + \sin. a . \sin. b . \cos. C$ ist.

Wir wollen nun sehen, wie sich aus diesem Fundamentalsatz der im §. 27 besonders bewiesene Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie deduciren läßt. Nach unserm Fundamentalsatz ist:

$$\Cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b \,.\, \sin. c}, \quad \text{daher}$$

$1 - \cos.^2 A$ oder $\sin.^2 A =$

$$1 - \frac{\cos^2 a + \cos.^2 b \,.\, \cos.^2 c - 2 \cos. a \,.\, \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin.^2 b \,.\, \sin.^2 c},$$

oder: $\text{Sin}^2 A =$

$$\frac{\sin.^2 b \,.\, \sin.^2 c - \cos.^2 a - \cos.^2 b \,.\, \cos^2 c + 2 \cos. a \,.\, \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin.^2 b \,.\, \sin.^2 c}$$

Nun ist $\sin.^2 . b \,.\, \sin.^2 c = (1 - \cos.^2 b) \,.\, (1 - \cos.^2 c) =$

$$1 - \cos.^2 b - \cos.^2 c + \cos.^2 b \,.\, \cos.^2 c.$$

Folglich auch $\sin^2 A =$

$$\frac{\sin.^2 a \,(1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos^2 c + 2 \cos. a \,.\, \cos. b \cdot \cos. c)}{\sin.^2 a \,.\, \sin.^2 b \,.\, \sin.^2 c}$$

Daher $\sin. A = \sin. a \times$

$$\frac{\sqrt{(1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2 \cos. a \,.\, \cos. b \,.\, \cos. c)}}{\sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \sin. c}$$

Der zusammengesetzte Factor, womit im zweiten Theile dieser Gleichung Sin. a multiplicirt wird, heiße F, so bleibt dieser Factor ungeändert derselbe, wenn man auf gleiche Weise, wie hier der Werth von Sin. A entwickelt worden, auch die Werthe von Sin. B und Sin. C aus dem Fundamentalsatze ableitet.

Es ist nehmlich:

1) $\text{Sin. } A = \sin. a \,.\, F$
2) $\text{Sin. } B = \sin. b \,.\, F$
3) $\text{Sin. } C = \sin. c \,.\, F$

Hieraus folgt der Schluß, daß

$\text{Sin. } A : \sin. B = \sin. a : \sin. b$, eben so
$\text{Sin. } A : \sin. C = \sin. a : \sin. c.$
$\text{Sin. } B : \sin. C = \sin. b : \sin. c.$

Dies ist derselbe Satz, der oben im §. 27 als der erste Lehrsatz auf eine andre, in allen Lehrbüchern angezeigte, Art bewiesen wurde:

Setzt man in der Fundamentalgleichung:

$\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C$

den Winkel $C = 90^0$, so wird $\cos. C = 0$, also $\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b$, nehmlich in einem recht-

winklichten sphärischen Dreiecke ist der Cosinus der Hypothenuse gleich dem Product aus den Cosinus der beiden Catheten.

Wie sich aus der eben dargestellten Fundamentalgleichung alle übrigen goniometrischen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie weiter ableiten lassen, dies ausführlich zu zeigen, würde hier zu weitläufig und nach den bereits vorgetragenen Sätzen auch ganz überflüßig seyn.

§. 35.

Tabelle der Formeln oder Gleichungen zur Berechnung sphärischer Dreiecke.

Ein jedes sphärische Dreieck werde der Gleichförmigkeit halber mit den Buchstaben A B C, seine Winkel mit A, B, C, die denselben gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet; der Halbmesser der Kugel oder Sin. tot. = 1 gesetzt, so sind folgende Formeln zu wirklichen Berechnungen die brauchbarsten. Jede Formel gestattet drei Abwechselungen.

A) Grundformeln.

1) Sin. a . sin. B = sin. b . sin. A
mit drei Abwechselungen *)

2) Cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c . cos. A

3) Cos. A = sin. B . sin. C . cos. a — cos. B . cos. C

*) Der noch weniger geübte Leser wird wohl thun, jede dieser Abwechselungen aufzusetzen.

4) $\text{Sin. a . cos. c} = \text{cos. a . sin. c . cos, B} + \text{sin. b . cos. C}$

5) $\text{Sin. a . cot. c} = \text{cos. a . cos. B} + \text{sin. B . cot. C}$

B) Abgeleitete Formeln, zu logarithmischer Berechnung.

6) $\text{Tang.}\frac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{b}-\text{c}+\text{a}) \cdot \text{sin.}\frac{1}{2}(\text{b}-\text{c}-\text{a})}{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{a}+\text{b}+\text{c}) \cdot \text{sin.}\frac{1}{2}(\text{a}-\text{b}-\text{c})}\right\}}$

7) $\text{Tg.}\frac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{-\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C}+\text{A}) \cdot \text{cos.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C}-\text{A})}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C}+\text{A}) \cdot \text{cos.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C}-\text{A})}\right\}}$

8) $\text{Sin.}\frac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{a}+\text{b}-\text{c}) \cdot \text{sin.}\frac{1}{2}(\text{a}+\text{c}-\text{b})}{\text{sin. b . sin. c}}\right\}}$

9) $\text{Cos.}\frac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{a}+\text{b}+\text{c}) \cdot \text{sin.}\frac{1}{2}(\text{b}+\text{c}-\text{a})}{\text{sin. b . sin. c}}\right\}}$

10) $\text{Sin.}\frac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{-\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C}+\text{A}) \cdot \text{cos.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C}-\text{A})}{\text{sin. B . sin. C}}\right\}}$

11) $\text{Cos.}\frac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B}-\text{C}) \cdot \text{cos.}\frac{1}{2}(\text{A}+\text{C}-\text{B})}{\text{sin. B . sin. C}}\right\}}$

12) $\text{Tang.}\frac{1}{2}(\text{b}-\text{a}) = \text{Tang.}\frac{1}{2}\text{c} \cdot \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{A})}{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{A})}$

13) $\text{Tang.}\frac{1}{2}(\text{b}+\text{a}) = \text{Tang.}\frac{1}{2}\text{c} \cdot \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{A})}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{A})}$

14) $\text{Tang.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{A}) = \text{Cot.}\frac{1}{2}\text{C} \cdot \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{b}-\text{a})}{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{b}+\text{a})}$

15) $\text{Tang.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{A}) = \text{Cot.}\frac{1}{2}\text{C} \cdot \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{b}-\text{a})}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{b}+\text{a})}$

C) Formeln für rechtwinklichte sphärische Dreiecke.

Ist in einem sphärischen Dreieck A B C ein Winkel $C = 90^0$, so ist Sin. $90^0 = 1$, Cosinus und Cotangente von $90^0 = 0$; daher wird:

16) Sin. b = sin. c . sin. B (nach Formel 1.)
17) Cos. c = cos. a . cos. b (n. F. 2.)
18) Cos. c = cot. A . cot. B (n. F. 3.) *)
19) Cot. c = cot. a . cos. B) (n. F. 5, weil cot. C = 0)
20) Cos. A = sin. B . cos. a (n. F. 3.)
21) Cot. A = cot. a . sin. b (n. F. 5.) **)

Trigonometrische Berechnung der sphärischen Dreiecke.

§. 36.

Rechtwinklichte Dreiecke.

Wenn ein sphärisches Dreieck A B C einen rechten Winkel C hat, so brauchen außerdem nur noch zwei

---

*) Nehmlich nach dieser Formel ist:
Cos. C = sin. A . sin. B . cos. c — cos. A . cos. B.
also $\cos. c = \frac{\cos. A . \cos. B}{\sin. A . \sin. B} = \cot. A . \cot. B$ (weil Cos. C = 0.)

**) Nach Formel 5 ist:
Sin. b . cot. a = cos. b . cos. C + sin. C . cot. A;
Eben so ist:
Cot. B = cot. b . sin. a.

Stücke desselben gegeben zu seyn, um daraus die übrigen unbekannten Stücke zu berechnen. Einige Aufmerksamkeit wird dem Leser zeigen, daß die im vorigen §. 35. für rechtwinklichte sphärische Dreiecke aufgestellten goniometrischen Formeln zu dieser Berechnung ausreichen. Wären z. B. die beiden Catheten a, b des Dreiecks gegeben, so würde sich die Hypothenuse c nach der Formel 17) berechnen lassen, nehmlich:

$$\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b.$$

Logarithmisch behandelt:

$$\log. \cos. c = \log. \cos. a + \log. \cos. b - 10 \text{ u. s. w.}$$

Alle jene Formeln oder Gleichungen für rechtwinklichte Dreiecke lassen, wie man sieht, logarithmische Bearbeitung zu, und die erste (Formel 17) ausgenommen, sind sie, wegen der darin enthaltenen goniometrischen Funktionen, von solcher Beschaffenheit, daß die gesuchte Seite oder der gesuchte Winkel ohne Zweideutigkeit gefunden wird. Ist z. B. die Hypothenuse c aus den gegebenen Catheten a, b zu berechnen, so ist

$$\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b$$

Sind nun a und b kleiner, als 90^0, so sind cos. a und cos. b positiv, also auch das Product cos. a . cos. b, folglich auch cos. c positiv; daraus folgt, daß in diesem Falle c ein Bogen oder Winkel kleiner als 90^0 seyn muß. Sind a und b stumpfe Winkel, so sind ihre Cosinus beide negativ, also ihr Product: cos. a . cos. b, folglich auch cos. c positiv; also c kleiner als 90^0. Sind a und b ungleichartig *),

*) Gleichartig heißen zwei Winkel oder Bogen, wenn beide entweder kleiner als 90^0 oder größer als 90^0 sind; ungleichartig, wenn der eine kleiner, der andre aber größer als 90^0 ist.

nehmlich der eine Winkel kleiner, der andre größer als 90^0, oder nach dem gewöhnlichen Ausdruck der eine spitz, der andre stumpf, so ist offenbar das Product cos. a . cos. b, also auch cos. c negativ; folglich gehört dann zu c ein stumpfer Winkel, oder Bogen größer als 90^0.

Solche Betrachtungen lassen sich mit allen Formeln von 17 bis 21 des §. 35. anstellen, und können füglich jedem nachdenkenden Leser überlassen bleiben. Eben aus solchen Betrachtungen werden sich die Sätze ungemein leicht ergeben, welche mehrere mathematische Schriftsteller über die Gleichartigkeit und Ungleichartigkeit der Seiten und Winkel eines rechtwinklichten sphärischen Dreiecks sehr ausführlich auseinandersetzen. Es wird genügen, hier diese Sätze nur kurz anzudeuten, weil die Beweise dafür aus den Formeln selbst hervorgehen:

In einem rechtwinklichten sphärischen Dreieck sind die Winkel an der Hypothenuse mit den gegenüberliegenden Catheten gleichartig, und umgekehrt; nach Formel 20).

In einem solchen Dreieck sind die Catheten gleichartig, wenn die Hypothenuse kleiner als 90^0, ungleichartig aber, wenn die Hypothenuse größer als 90 ist; und umgekehrt; nach Formel 17).

In einem solchen Dreieck sind die Winkel an der Hypothenuse gleichartig, wenn diese kleiner als 90^0; hingegen ungleichartig, wenn die Hypothenuse größer als 90^0 ist; nach Formel 18); auch muß einer jener Winkel $= 90^0$ seyn, wenn die Hypothenuse $c = 90^0$ ist; denn in diesem Fall wird nach Formel 18).

cos. c = cot. A . cot. B in diese verwandelt:

o = cot. A . cot. B, also muß cot. A oder cot. B = o, folglich A oder B = 90^0 seyn.

Bloß der Fall iſt zweideutig, wo die geſuchte Größe durch einen Sinus gegeben wird, zu welchem immer zwei Winkel, ein ſpitzer und ſein ſtumpfer Nebenwinkel, gehören; dieſer Fall tritt immer ein, wenn eine Cathete und der ihr gegenüberliegende Winkel gegeben ſind, oder aus der Hypothenuſe und einem anliegenden Winkel eine dieſem gegenüberliegende Cathete ꝛc. berechnet werden ſoll, überhaupt, wenn in der Aufgabe 4 gegenüberliegende Stücke vorkommen, und man zur Auflöſung die Formel 16) anwenden muß. Dieſe Zweideutigkeit wird indeſſen durch die bekannten Umſtände eines practiſchen Falles, ſo wie bisweilen durch den Umſtand gehoben, daß die größern Seiten den größern Winkeln ꝛc. gegenüberliegen.

Sphäriſche Dreiecke überhaupt.
(Schiefwinklichte.)

§. 37.

Aufgabe. *)

Von einem ſphäriſchen Dreieck A B C ſind die drei Seiten a, b, c gegeben; daraus ſoll ein Winkel, z. B. A berechnet werden.

Auflöſung: Nach der Formel 2) im §. 35 iſt;

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{cos. a} - \text{cos. b} \,.\, \text{cos. c}}{\text{sin. b} \,.\, \text{sin. c}}$$

*) Der Leſer wird da, wo die Sätze nicht mit beſondern Figuren belegt ſind, die Gefälligkeit haben, ſich eine ſolche zu zeichnen. Die Winkel des ſphäriſchen Dreiecks werden immer mit A, B, C, die denſelben gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet.

Zur logarithmiſchen Bearbeitung geeignet, alſo brauchbarer ſind die Formeln 6) 8) 9).

Die Formel:

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,.\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sin. b . sin. c}}\right\}}$$

iſt zu empfehlen, wenn der geſuchte Winkel ſehr ſpitz.

Die Formel:

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sin. b . sin. c}}\right\}}$$

hingegen, wenn der geſuchte Winkel ſehr ſtumpf iſt.

Der Winkel $\frac{1}{2}A$ kann auch nach der erſten Formel $\text{Sin.}\frac{1}{2}A =$ u. ſ. w. nicht zweideutig gefunden werden; nehmlich $\frac{1}{2}A$ muß kleiner als 90^0 ſeyn, da A kleiner als 180^0 iſt, in dem Sinne nehmlich, wie die ſphäriſchen Dreiecke in der Trigonometrie betrachtet werden, und auch in der Praxis nicht anders vorkommen, nehmlich dergeſtalt, daß jeder Winkel und auch jede Seite eines ſolchen Dreiecks kleiner als 180^0 ſind.

Beiſpiel: Es ſind gegeben: $a = 69^0\,50'$, $b = 109^0\,39'\,10''$, $c = 46^0\,42'$. Es wird geſucht der Winkel A.

Hier iſt $$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\text{sin.}\,3^0\,26'\,25''\,.\,\text{sin.}\,66^0\,23'\,35''}{\text{sin.}\,109^0\,39'\,10''\,.\,\text{sin.}\,46^0\,42'}\right\}}$$

Logarithmisch:

+ log. sin. 3° 26′ 25″	=	8,7782098
+ log. sin. 66° 23′ 35″	=	9,9620444
+ 2 log. sin. tot.	=	20,.....
		+ 38,7402542
— log. sin. 109° 39′ 10″	=	9,9739347
— log. sin. 46° 42′	=	9,8619958
		— 19,8359305
	Rest	+ 18,9043237 div. durch 2
Giebt log. sin. $\frac{1}{2}$A	=	9,4521618
Also ∠ A	=	32° 54′ 28″ sehr nahe.

§. 38.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Dreieck sind die drei Winkel A, B, C gegeben; man soll daraus eine seiner Seiten, z. B. a, berechnen.

Auflösung: Nach Formel 3) im §. 35 ist:

$$\text{Cos. a} = \frac{\text{cos. A} + \text{cos. B} \,.\, \text{cos. C}}{\text{sin. B} \,.\, \text{sin. C}}$$

Zur logarithmischen Bearbeitung dienen die Formeln 7) 10) 11).

Nach Formel 11 ist:

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{\text{cos.} \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}-\text{C}) \,.\, \text{cos.} \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{C}-\text{B})}{\text{sin. B} \,.\, \text{sin. C}}\right\}}$$

Beispiel: Es sind gegeben: A = 132° 19′, B = 47° 32′, C = 35° 11′. Gesucht der Winkel oder Bogen a.

Hier ist: $\text{Cos.} \tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\left\{\frac{\text{cos. } 72^0\,20' \,.\, \text{cos. } 59^0\,59'}{\text{sin. } 47^0\,32 \,.\, \text{sin. } 35^0\,11'}\right\}}$

$$
\begin{array}{rl}
+ \text{log. cos. } 72^0\,20' & = 9{,}4821283 \\
+ \text{log. cos. } 59^0\,59' & = 9{,}6991887 \\
+ 2\,\text{log. sin. tot.} & = 20{,}\ldots\ldots \\
\hline
 & + 39{,}1813170 \\
- \text{log. sin. } 47^0\,32' & = 9{,}8678623 \\
- \text{log. sin. } 35^0\,11' & = 9{,}7605692 \\
\hline
 & - 19{,}6284315 \\
\hline
\text{Reſt} & + 19{,}5528855 \text{ div. d. 2 giebt:} \\
\hline
\log.\cos.\tfrac{1}{2}a & = 9{,}7764427 \\
\text{alſo } \tfrac{1}{2}a & = 53^0\,17'\,55'' \text{ ſehr nahe.} \\
\text{daher } a & = 106^0\,35'\,50''.
\end{array}
$$

§. 39.

Aufgabe. (Fig. 16.)

Von einem ſphäriſchen Dreieck ſind zwei Seiten, a, b und der von denſelben eingeſchloſſene ſphäriſche Winkel C gegeben; daraus ſoll die dritte Seite c berechnet werden.

Auflöſung: Nach einer Abwechſelung der Formel 2) im §. 35 iſt:

$$\text{Cos. c} = \text{cos. a . cos. b} + \text{sin. a . sin. b . cos. C.}$$

Um aber die Berechnung des Bogens c ganz logarithmiſch bewirken zu können, bedient man ſich eines ſogenannten Hülfswinkels. Man denke ſich nehmlich den Bogen eines größten Kreiſes AR ſenkrecht auf die Seite a, ſo entſteht ein bei R rechtwinklichtes Dreieck ARC, in welchem b die Hypothenuſe und der Bogen $CR = \varphi$ eine Cathete iſt.

Nun ist nach Formel 19) im §. 35:

$$\text{Cot. b} = \text{cot.}\varphi \,.\, \text{cos. C} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\text{tang. b}} = \frac{1}{\text{tang.}\varphi} \,.\, \text{cos. C, also}$$

$$\text{tang.}\varphi = \text{tang. b} \,.\, \text{cos. C}$$

Nach dieser Gleichung suche man logarithmisch den Bogen oder Winkel φ.

Hierauf substituire man den Werth: $\text{Cos. C} = \frac{\text{tang.}\varphi}{\text{tang. b}}$ in die obige Formel für Cos. c, so wird:

$$\text{Cos. c} = \text{cos. a} \,.\, \text{cos. b} + \text{sin. a.sin. b} \,.\, \frac{\text{tang.}\varphi}{\text{tang. b}}$$

$$= \text{cos. a} \,.\, \text{cos. b} + \text{sin. a.cos. b} \,.\, \frac{\text{sin.}\varphi}{\text{cos.}\varphi}$$

$$= \text{cos. b} \left\{ \frac{\text{cos. a} \,.\, \text{cos.}\varphi + \text{sin. a} \,.\, \text{sin.}\varphi}{\text{cos.}\varphi} \right\} \text{ oder}$$

$$\text{Cos. c} = \frac{\text{cos. b} \,.\, \text{cos.}(\text{a} - \varphi)}{\text{cos.}\varphi}.$$

So findet man c logarithmisch.

Beispiel: Es sind gegeben: $a = 41^0\,9'\,46''$, $b = 41^0\,47'\,24''$, $C = 14^0\,2'\,30''$.

Gesucht der Bogen c.

Berechnung nach der zweiten Methode:

$$\text{tang.}\varphi = \frac{\text{tang. } 41^0\,47'\,24'' \,.\, \text{cos. } 14^0\,2'\,30''}{\text{sin. tot.}}$$

+ log. tang.	$41^0\,47'\,24''$	= 9,9512351
+ log. cos.	$14^0\,2'\,30''$	= 9,9868252
— log. sin. tot.		= 10,.....
log. tang.	φ	= 9,9380603
Also der Hülfswinkel	φ	$= 40^0\,55'\,40{,}7''$. (41'')

$$\text{Cos. c} = \frac{\cos. 41^0\,47'\,24'' \;.\; \cos. 0^0\,14'\,5''}{\cos. 40^0\,55'\,41''}$$

$$+ \log.\cos. 41^0\,47'\,24'' = 9{,}8725014$$
$$+ \log.\cos.\ 0^0\ 14'\ 5'' = 9{,}9999964$$
$$+ \quad 19{,}8724978$$
$$- \log.\cos. 40^0\,55'\,41'' = 9{,}8782532$$
$$\log.\ \cos.\ c = 9{,}9942446$$
$$\text{also}\quad c = 9^0\,18'\,26'' \text{ nahe.}$$

Zur Uebung und Vergleichung der Arbeit kann man auch die Berechnung von c nach der ersten Formel vornehmen.

§. 40.

Aufgabe. (Fig. 16.)

Von einem sphärischen Dreieck ABC sind zwei Seiten c, a und der von denselben eingeschlossene Winkel B gegeben; daraus sollen die beiden andern Winkel C, A oder nur einer derselben berechnet werden.

Auflösung: Nach den Formeln 14) 15) im §. 35 ist:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(C - A) = \cot.\tfrac{1}{2}B \;.\; \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(c - a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(c + a)}$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(C + A) = \cot.\tfrac{1}{2}B \;.\; \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(c - a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(c + a)}$$

So findet man $\tfrac{1}{2}(C - A) = D$
$\tfrac{1}{2}(C + A) = S$

also $C = S + D$
$A = S - D$

Wir haben hier angenommen, daß die gegebene Seite c größer als die andre a ist; ist a > c gegeben; so ist der obige Ansatz also zu ändern:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C) = \cot.\tfrac{1}{2}B \cdot \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a-c)}{\sin.\tfrac{1}{2}(a+c)} \text{ u. s. w.}$$

Zweite Methode: Wird bei dieser Aufgabe nur ein Winkel, wie es gewöhnlich der Fall ist, verlangt, z. B. C, so verfährt man kürzer also:

Man denke sich den Bogen A R senkrecht auf a, so entsteht ein bei R rechtwinklichtes sphärisches Dreieck A B R, dessen eine Cathete der Bogen B R = φ sey.

Nun ist nach der Formel 5) im §. 35.

$$\cot. c \cdot \sin. a = \cos. a \cdot \cos. B + \sin. B \cdot \cot. C, \text{ daher}$$

$$\cot. C = \frac{\cot. c \cdot \sin. a - \cos. a \cdot \cos. B}{\sin. B}$$

Nach der Formel 19) im §. 35 ist:

$$\cot. c = \cot. \varphi \cdot \cos. B$$

Daraus bestimme man logarithmisch den Bogen BR = φ. Dann wird

$$\cot. C = \frac{\cot. \varphi \cdot \cos. B \cdot \sin. a}{\sin. B} - \frac{\cos. a \cdot \cos. B}{\sin. B}, \text{ oder}$$

$$\cot. C = \cot. B\ (\cot. \varphi \cdot \sin. a - \cos. a)$$

$$= \cot. B \left\{ \frac{\cot. \varphi \cdot \sin. \varphi \cdot \sin. a - \sin. \varphi \cdot \cos. a}{\sin. \varphi} \right\}$$

$$= \cot. B \left\{ \frac{\frac{\cos. \varphi}{\sin. \varphi} \cdot \sin. \varphi \cdot \sin. a - \sin. \varphi \cdot \cos. a}{\sin. \varphi} \right\}$$

$$= \cot. B \cdot \left\{ \frac{\cos. \varphi \cdot \sin. a - \sin. \varphi \cdot \cos. a}{\sin. \varphi} \right\}, \text{ also}$$

$$\cot. C = \frac{\cot. B \cdot \sin. (a - \varphi)}{\sin. \varphi}.$$ Darnach läßt sich nun der Winkel C logarithmisch bestimmen.

Sollte der andre Winkel A bestimmt werden, so geschähe dies auf eine ganz ähnliche Weise, indem ein Bogen von C auf c senkrecht gezogen würde u. s. w.

Beispiel: Es sind gegeben $a = 73^0\,58'\,54''$, $c = 38^0\,45'$, $B = 46^0\,33'\,41''$.

Gesucht $A = 115^0\,9'\,7''$, $C = 35^0\,46'\,15''$.

Der Leser wird wohl thun, die Berechnung wirklich nach den bemerkten Methoden vorzunehmen, und die Richtigkeit der hier gegebenen Resultate zu prüfen. Der vollständige Gang einer solchen logarithmisch trigonometrischen Rechnung ist in den vorangegangenen Aufgaben schon einigemahle nachgewiesen worden.

§. 41.

Aufgabe. (Fig. 16.)

Von einem sphärischen Dreieck ABC sind zwei Winkel A, C und die zwischen denselben liegende (eingeschlossene) Seite b gegeben; daraus sollen die beiden andern Seiten c, a berechnet werden.

Auflösung: Nach den Formeln 12) 13 im §. 35 ist:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c-a) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}b \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(C-A)}{\sin.\frac{1}{2}(C+A)},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c+a) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}b \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}(C-A)}{\cos.\frac{1}{2}(C+A)}$$

So berechnet man logarithmisch:

$\frac{1}{2}(c-a) = D$, $\frac{1}{2}(c+a) = S$, also $c = S + D$, $a = S - D$.

Wäre in der Aufgabe A größer als C, so würde man ansetzen:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a-c) = \text{tang.}\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}(A-C)}{\sin.\frac{1}{2}(A+C)} \text{ u. s. w.}$$

Zweite Methode vermittelst eines Hülfswinkels:

Soll, wie es in der Praxis gewöhnlich verlangt wird, nur eine der unbekannten Seiten, z. B. c, berechnet werden, so verfährt man kürzer also:

Man denke sich von A auf die gegenüberliegende unbekannte Seite a einen Bogen AR senkrecht; der sphärische Winkel CAR sey $= \varphi$.

Nach der Formel 18) im §. 35 ist:

$\cos. b = \cot. C . \cot. \varphi$; also $\cot. \varphi = \cos. b . \text{tang}. C$;

so läßt sich der Hülfswinkel φ berechnen.

Es ist $\cot. C = \cos. b . \text{tang}. \varphi$.

Ferner ist nach der Formel 5) im §. 35.

$\cot. c . \sin. b = \cos. b . \cos. A + \sin. A . \cot. C$, also

$$\cot. c = \frac{\cos. b . \cos. A + \sin. A . \cos. b . \text{tang}. \varphi}{\sin. b}$$

$$= \cot. b \, (\cos. A + \sin. A . \text{tang}. \varphi)$$

$$= \cot. b . \left\{ \frac{\cos. A . \cos. \varphi + \sin. A . \sin. \varphi}{\cos. \varphi} \right\}, \text{ also}$$

$$\cot. c = \cot. b . \frac{\cos. (A - \varphi)}{\cos. \varphi}$$

So läßt sich logarithmisch die Seite c bestimmen.

§. 42.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Dreieck ABC sind zwei Seiten a, b und ein Winkel B, der einer dieser Seiten gegenüberliegt, gegeben; daraus soll der andre Winkel A, welcher der zweiten Seite gegenüberliegt, berechnet werden.

Auflösung: Da vier gegenüberliegende Stücke in dieser Aufgabe erscheinen, so kann die Auflösung nicht anders, als durch eine Proportion des Hauptsatzes in §. 27 geschehen; nehmlich es ist:

$$\sin.b : \sin.a = \sin.B : \sin.A, \text{ also}$$

$$\sin.A = \frac{\sin a \,.\, \sin.B}{\sin. b}$$

$$\log.\sin.A = \log.\sin.a + \log.\sin.B - \log.\sin.b \text{ u.s.w.}$$

Da hier der Winkel A durch seinen Sinus gegeben wird, so ist er zweideutig, d. h. er kann, wenn er nicht $= 90°$ gefunden wird, sowohl ein spitzer, als auch ein stumpfer Nebenwinkel seyn. Diese Zweideutigkeit wird durch folgende in der Aufgabe bestimmte Umstände beschränkt, oder zum Theil gehoben:

Der gesuchte Winkel A ist ein spitzer oder kleiner als $90°$,

1) wenn der Winkel $B < 90°$, und $b > a$ ist, da in einem sphärischen Dreieck den kleinern Seiten die kleinern Winkel und umgekehrt gegenüberliegen;

2) wenn $B > 90°$, $a < 90°$, $b < (180° - a)$ ist;

Der gesuchte Winkel A ist ein stumpfer oder größer als $90°$,

1) wenn $B > 90°$ und $b < a$ ist,

2) wenn $B < 90°$, $a > 90°$, und $b > (180° - a)$ ist.

In andern, als diesen Fällen (bekannten Umständen) bleibt die Auflösung unbestimmt, nehmlich A kann nun spitzer oder stumpf seyn, oder es sind zwei verschiedene sphärische Dreiecke auf der Kugeloberfläche möglich, welche die gegebenen Stücke a, b, B gemein haben. Anstatschlichen kann ein Anfänger sich dies durch ein Kugelmodell machen. Es wird übrigens in der Praxis wohl nur äußerst selten ein Fall vorkommen, wo man

nach den bekannten Umſtänden nicht ſchon im Voraus die Beſchaffenheit des geſuchten Winkels A wiſſen ſollte.

Der Beweis für die gegebenen Merkmahle der beſtimmten Fälle läßt ſich alſo führen.

Nach der Formel 15) im §. 35 iſt in jedem ſphäriſchen Dreieck ABC

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+A) = \frac{\text{cot.}\tfrac{1}{2}C \;.\; \text{cos.}\tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

In dieſer Formel müſſen die Factoren $\text{cot.}\frac{1}{2}C$ und $\text{cos.}\frac{1}{2}(b-a)$ offenbar poſitiv ſeyn, da die Winkel $\frac{1}{2}C$ und $\frac{1}{2}(b-a)$ kleiner als 90^0 ſind, folglich müſſen die Größen $\text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)$ und $\text{cos.}\frac{1}{2}(b+a)$ in der Gleichung einerlei Zeichen haben, d h. entweder beide poſitiv oder beide negativ ſeyn; daher müſſen auch $\frac{1}{2}(b+a)$ und $\frac{1}{2}(B+A)$ gleichartig, d. h. die halbe Summe der beiden Seiten und die halbe Summe der gegenüberliegenden Winkel entweder beide kleiner als 90^0 oder größer als 90^0 ſeyn; man kann demnach auch ſagen, daß wenn die ganze Summe der zwei gegebenen Seiten $a+b$ größer oder kleiner als 180^0 iſt, auch die ganze Summe der gegenüberliegenden Winkel $A+B$ größer oder kleiner als 180^0 ſeyn muß; wäre $a+b=180^0$, ſo wäre auch $A+B=180^0$.

Wir wollen dieſe Regel auf einen der oben beſtimmten Fälle anwenden:

Der geſuchte Winkel A, ſagte ich, iſt ſpitz oder kleiner als 90^0,

wenn B größer als 90^0, z. B. 95^0,
" a kleiner als 90^0, z. B. 75^0, und
" b kleiner als $180^0 - a$ iſt.

In dieſem Falle iſt, wie man ſieht, $a+b$ kleiner als 180^0, alſo auch $B+A$ kleiner als 180^0; da aber B größer als 90^0, z. B. 95^0, ſo muß offenbar A

kleiner als 90^0 oder spitz seyn. Auf gleiche Weise lassen sich alle übrigen bestimmten Fälle leicht erklären.

Der Winkel A ist zweideutig, also die Auflösung unbestimmt, wenn die erwähnten Bedingungen der Aufgabe nicht Statt finden, z. B.

A ist zweideutig, wenn $B < 90^0$, $a < 90^0$, $b < 90^0$ u. s. w.

§. 43.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Dreiecke ABC sind zwei Winkel A, B und eine Seite b, welche einem der Winkel gegenüberliegt, gegeben; daraus soll die andre Seite a, welche dem zweiten Winkel gegenüberliegt, berechnet werden.

Auflösung: Auch in dieser Aufgabe kommen vier gegenüberliegende Stücke vor; folglich kann die Auflösung nur durch eine Proportion des Hauptsatzes im §. 27 bewirkt werden; es ist nehmlich:

$$\sin. B : \sin. A = \sin. b : \sin. a, \text{ also}$$

$$\sin. a = \frac{\sin. A \,.\, \sin. b}{\sin. B}$$

$$\log. \sin. a = \log. \sin. A + \log. \sin. b - \log. \sin. B.$$

Da a durch seinen Sinus gegeben wird, so tritt dieselbe Zweideutigkeit ein, wie in der Aufgabe des §. 42. Diese Zweideutigkeit wird aber auch hier durch folgende Bedingungen der Aufgabe beschränkt, oder zum Theil gehoben:

Die gesuchte Seite (Bogen) a ist kleiner als 90^0,

1) wenn $b < 90^0$ und $B > A$ ist;
2) wenn $A < 90^0$, $b > 90^0$ und $B < (180^0 - A)$ ist;

Die gesuchte Seite a ist größer als 90^0,

1) wenn $b > 90^0$ und $B < A$,

2) wenn $A > 90^0$, $b < 90^0$ u. $B > (180^0 - A)$ ist.

Unter andern Bedingungen der Aufgabe, als diese sind, ist die Auflösung unbestimmt, d. h. a kann ein Bogen seyn, der größer oder kleiner als 90^0 ist. Die Erinnerung, welche im §. 42, diese Zweideutigkeit betreffend, gemacht wurde, gilt auch hier. Der Beweis für die Merkmahle der bestimmten Fälle wird hier auf ähnliche Art und mittelst derselben Formel geführt, welche Betrachtung der Leser nicht versäumen wird.

Ist die Seite a gefunden, so läßt sich der dritte Winkel des Dreiecks C nach den Formeln 14) oder 15) im §. 35 berechnen, nehmlich:

nach 14) ist: $\text{tang.}\frac{1}{2}C = \text{cot.}\frac{1}{2}(B-A) \cdot \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{sin.}\frac{1}{2}(b+a)}$

nach 15) ist: $\text{tang.}\frac{1}{2}C = \text{cot.}\frac{1}{2}(B+A) \cdot \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+a)}$

Anmerkung: Die von §. 37 bis §. 43 vorgetragenen Aufgaben reichen zur Berechnung der Seiten und Winkel eines jeden sphärischen Dreiecks aus drei gegebenen Stücken desselben, völlig aus. Einige andere Aufgaben, welche die senkrechten Bogen, von einer Winkelspitze auf die gegenüberliegende Seite gezogen, so wie die dadurch entstehenden Abschnitte (Segmente) auf dieser Seite, betreffen, will ich hier als weniger bedeutend übergehen; wo aber weiterhin eine Aufgabe der Art in der practischen Erdvermessung vorkommen sollte, so wird dieselbe mittelst der bereits abgehandelten Sätze ohne Schwierigkeit zu entwickeln und berechnen seyn.

Flächenraum eines sphärischen Dreiecks.

§. 44.

Lehrsatz und Aufgabe. [Fig. 17 und 18.] *)

Der Flächenraum eines sphärischen Dreiecks A B C wird bestimmt, indem man den Halbmesser der Kugel, von deren Oberfläche das Dreieck ein Theil ist, multiplicirt mit dem Längenmaß (gegen den Halbmesser verglichen) eines größten Kreisbogens, der in Graden so viel beträgt, als der Ueberschuß der drei sphärischen Winkel des Dreiecks über zwei rechte Winkel. Heißt nehmlich R der Halbmesser der Kugel, F der Flächenraum des Dreiecks A B C; so ist:

$$F = (A + B + C - 180^0) \,.\, R.$$

Beweis: Zwei größte Kreise A D B, A E B (Fig. 17) auf der Oberfläche einer Kugel schneiden einander zweimahl in A und B, in einer Bogenentfernung von 180^0; die Durchschnittspunkte A, B sind die Pole dieser Bogen, A B die zugehörige Axe, gleich dem Durchmesser der Kugel. Das Stück der Kugeloberfläche, welches von den zwei einander schneidenden Halbkreisen A D B, A E B eingeschlossen wird, kann (nach meiner Meinung) schicklicherweise ein Sector der Kugeloberfläche genannt werden; andere Schriftsteller nennen es Streifen, die Franzosen fuseau (Spindel).

---

*) Die Figuren, welche in den Figuren 17 und 18 auf einer Ebene angedeutet sind, wird der Leser sich auf eine Kugel verzeichnen, und sich dadurch diesen ganzen Satz fast so leicht machen, wie irgend einen andern aus der Elementargeometrie. Die Unverständlichkeit der Sache kann auch hier nur vom Mangel an Anschauung entstehen.

Es ist klar, daß der sphärische Winkel a, nehmlich der Neigungswinkel der zwei größten einander schneidenden Kreisebenen, wozu die halben Kreisbogen ADB, AEB gehören, die Größe des Sectors der Kugeloberfläche ADBEA bestimmt.

Hat nun ein zweiter Sector der Kugeloberfläche AEBGA einen gleichen spärischen Winkel, nehmlich b = a, so werden beide Sectoren auf völlig gleiche Weise bestimmt, und sind demnach congruent und gleich. Die Summe der sphärischen Winkel in A, um die Achse der Kugel AB herum, vom Anfangspunkt D bis zu demselben Endpunkt D, beträgt offenbar vier Rechte = 360°. So vielmahl nun der sphärische Winkel a in 360° (im größten Umkreis) enthalten ist, so vielmahl muß auch der dazu gehörige Kugelsector in der Oberfläche der ganzen Kugel enthalten seyn. Der Beweis dafür ist durchaus elementarisch, wie bei Vergleichung von Kreissectoren gegen die ganze Kreisfläche. Ist das Verhältniß a : 360 rational, so hat der Beweis gar keine Schwierigkeit; ist aber dieses Verhältniß a : 360 irrational, so muß er mittelst der sogenannten Exhaustionsmethode geführt werden, wie dies auch beim Kreis geschieht.

Nun sey ABC ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel, deren Halbmesser = R, nach irgend einem Längenmaß, gegeben ist; der Flächenraum dieses Dreiecks heiße F. Um den oben ausgesprochenen Satz zu beweisen, verlängere man die eine Seite BC, so daß BCEDB ein ganzer größter Kreis wird, und also die Kreisfläche (in Fig. 18) die halbe Kugeloberfläche von oben gesehen vorstellt.

Man verlängere ferner die Bogen AC, AB, so daß BAE, ABG, CAD, ACG gleich 180° werden; die Bogen AB, AC schneiden einander in einer Entfernung von 180° zum zweitenmahl in G auf der

ntgegengeſetzten Halbkugel, auch ſchneiden ſie den
albkreis BCEDB in D und E; dadurch entſtehen
wei ſphäriſche Dreiecke BCG und ADE, welche glei-
e Seiten haben, und alſo gleich ſind; denn AE = BG,
D = CG, BE = 180° = CD, alſo auch DE = BC.
ie Flächenräume dieſer beiden Dreiecke wollen wir e
ennen. Außerdem entſtehen auf der obern Halbkugel
och zwei Dreiecke ACE und BAD, deren Flächen-
ume h, m heißen mögen. Der Kugelſector (Strei-
n) ACGBA iſt gleich △ ABC + △ BCG =
△ ABC + △ AED = F + e.

Benennen wir die ganze Kugeloberfläche K, ſo iſt
ach dem oben Geſagten:

$360^0 : A = K : ACGBA$, alſo die Fläche des Kugelſectors.

$$ACGBA = \frac{A \cdot K}{360}, \text{ oder}$$

1) $F + e = \frac{A \cdot K}{360}$, eben ſo iſt

2) $F + h = \frac{B \cdot K}{360}$

3) $F + m = \frac{C \cdot K}{360}$

---

lglich $3F + e + h + m = \frac{(A+B+C) \cdot K}{360^0}$, auch iſt:

$F + e + h + m = \frac{K}{2}$ (halbe Kugeloberfläche)

---

alſo $2F = \frac{(A+B+C)K}{360^0} - \frac{K}{2}$

$$= \frac{(A+B+C-180) \cdot K}{360}$$

Alſo $$F = \frac{(A+B+C-180) \cdot K}{2 \cdot 160}$$

Nun ist die ganze Kugeloberfläche nach der El
mentargeometrie $4R^2\pi = 2R \cdot 2R\pi = 2R \cdot 360$
wenn man 360^0 in Längenmaß des Halbmessers R au
drückt, wie hier geschehen muß. Daraus folgt;

$$F = \frac{(A+B+C-180) \times 2 \cdot 360 \cdot R}{2 \cdot 360}$$

$$= (A+B+C-180) \cdot R.$$

Nehmlich der Flächeninhalt eines sphärischen Dre
ecks ABC wird gefunden, indem man den Ueberschu
seiner Winkel über 180^0 in Längenmaß des Halbme
sers verwandelt, und diese Zahl mit der Zahl des Hal
messers multiplicirt.

Ein in Graden gegebener Bogen φ wird aber i
Längenmaß des Halbmessers R bekanntlich also b
stimmt:

$$360^0 : 2R\pi = \varphi : \frac{R\pi}{180^0}$$

Daher ist der quadratische Flächeninhalt eines sph
risches Dreiecks nach dem Längenmaß des Kugelhalbme
sers R dieser:

$$F = (A^0+B^0+C^0-180^0) \cdot \frac{R^2 \cdot \pi}{180^0}$$

Bei dieser Berechnung werden die Gradzahlen g
braucht; ist der Ueberschuß $(A+B+C-180)$ in Mi
nuten, Sekunden ꝛc. gegeben, so muß auch der Nenn
180^0 in Minuten, Sekunden ꝛc. verwandelt werd
u. s. w.

Will man aber allgemein F nach der Formel:

$$F = (A+B+C-180) \cdot R$$

in Gradmaß ausdrücken, so muß man R ebenfalls
Gradmaß verwandeln.

Nach der Gleichung: $F = \frac{(A^0+B^0+C^0-180^0) \cdot}{2 \cdot 360^0\ (720^0)}$

kann man die Fläche des sphärischen Dreiecks mit der ganzen Kugeloberfläche vergleichen; die erstere verhält sich nehmlich zur letztern, wie der Ueberschuß der drei sphärischen Winkel über 180^0 zu 720^0.

Nennen wir diesen Ueberschuß D^0, so ist:

$$F : K = D^0 : 720^0.$$

So kann man aus der bereits gegebenen oder berechneten Kugeloberfläche leicht die Fläche eines sphärischen Dreiecks, dessen Winkel in Graden gegeben sind, herleiten.

§. 45.

Verwandlung der Gradbogen in Theile des Halbmessers und des Halbmessers in Gradbogen.

Diese Verwandlung wird in der Praxis der Erdmessung oft nothwendig. Sie hat keine Schwierigkeit, und soll daher hier nur kurz angedeutet werden.

Der Halbmesser eines Kreises sey $R = 1$, als Längenmaß; so ist bekanntlich die Peripherie dieses Kreises nach diesem Längenmaß $= 2R\pi$.

Es ist $\pi = 3{,}14159265 \ldots$, also

$\log. \pi = 0{,}49714987 \ldots$

Der Log. π kommt bei Kreis- und Kugelberechnungen sehr oft vor; man thut daher wohl, denselben dem Gedächtniß einzuprägen, um sich in vorkommenden Fällen das Aufschlagen in Tafeln zu ersparen.

Soll eine Bogenlänge von φ Grad in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden, so geschieht solches durch folgende Proportion:

$$360^0 : 2R\pi = \varphi^0 : \frac{2R\pi}{360}$$

$$\text{Bogenlänge } \varphi = \frac{R\pi \cdot \varphi^0}{180}$$

$\log. \varphi = \log. R + \log. \pi + \log. \varphi^0 - \log. 180^0$ u. s. w.
Ist $R = 1$, so ist $\log. \varphi = \log. \pi + \log. \varphi - \log. 180^0$.

Z. B. wenn $\varphi = 3^0$,

so ist $\log. \varphi = \log. \pi + \log. 3^0 - \log. 180$
$= 0{,}7189986 - 2$, also φ,

nehmlich die Bogenlänge von $3^0 = 0{,}05235988 \ldots\ldots$
wenn der Halbmesser $R = 1, \ldots\ldots$ gesetzt wird.

Es leuchtet ein, daß, wenn einmahl der Zahlenwerth von einer oder einigen Bogenlängen gefunden worden, daraus auch die Werthe der übrigen Bogenlängen durch eine noch einfachere arithmetische Operation bestimmt werden können. So muß die Bogenlänge von 6^0 die doppelte Bogenlänge von 3^0 seyn; ist die Bogenlänge von 180^0 zuerst bestimmt, so giebt ihre Hälfte die Bogenlänge von 90^0, ihr Drittel die Bogenlänge von 60^0 u. s. w. Eben so werden die Werthe der Bogen, die auf kleinere Gradtheile, Minuten, Sekunden ꝛc. angegeben sind, bestimmt. Auf diesen ganz einfachen Kalkul gründet sich die Construction eigner Tafeln der Bogenlängen für $R = 1$. Eine solche Tafel hat Lambert in seiner Schrift: Supplementa Tab. Logar. et Trigon. Berlin 1770, gegeben; jetzt trifft man dergleichen in allen guten Logarithmensammlungen, z. B. in den sehr schätzbaren von Vega und andern mehr.

Hier würde eine Tafel der Art zu viel Platz einnehmen.

Mit Hülfe solcher Tafeln läßt sich auch ein in Längenmaß des Halbmessers gegebener Bogen umgekehrt auf Gradmaß reduciren. Der Halbmesser selbst läßt sich in Bogenlänge verwandeln; nehmlich es läßt

ſich die Gradzahl finden, deren Bogenlänge dem Halbmeſſer gleich iſt, durch dieſe Proportion:

$$2R\pi : 360 \text{ oder } R\pi : 180 = R : \frac{180^0}{\pi} = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}$$

Sek.

Nun iſt $+ \log. 180.60.60 = 5{,}8115750$

$- \log. \pi = 0{,}4971499$

$\log. R'' = 5{,}3144251$

Alſo $R'' = 206264{,}8$ Sekunde.

$= 57^0\,17'\,44''\,48'''$ äußerſt nahe.

Nehmlich die Länge des Halbmeſſers iſt der Länge eines Bogens von $57^0\,17'\,44''\,48'''$ gleich zu ſetzen.

Dieſe Zahl muß man demnach ſtatt R brauchen, wenn der Flächeninhalt eines ſphäriſchen Dreiecks allgemein in quadratiſchem Gradmaß, nach der Formel $F = (A + B + C - 180)\,R$, ausgedrückt werden ſoll, wie es in der Erdvermeſſung bisweilen geſchieht.

§. 46.

Aufgabe.

Von einem ſphäriſchen Dreieck ABC auf einer Kugel, deren Halbmeſſer R irgend ein bekanntes Längenmaß iſt, ſind die drei Winkel A, B, C oder die drei Seiten a, b, c gegeben; daraus ſoll ſein Flächeninhalt berechnet werden.

Auflöſung:

1) Sind die Winkel A, B, C gegeben, ſo iſt nach §. 44 die Fläche des Dreiecks $F = \frac{D \cdot R^2\pi}{180}$ für

$$D = (A + B + C - 180^0)$$

Enthält D Minuten oder auch Sekunden, ſo müſſen D und 180 bei dieſer Berechnung gleichnamig ge-

macht, nehmlich beide in Minuten oder auch Sekunden verwandelt werden.

Beispiel: Es sey $A = 54^0\,17'$, $B = 63^0\,19'$, $C = 67^0\,28'$.

$$R = 7 \text{ Fuß.}$$

Hier ist $(A + B + C - 180)$ oder $D = 5^0\,4'$, also

$$F = \frac{304' \cdot 49 \cdot \pi}{180 \cdot 60'}$$

$$\begin{aligned} &+ \log. 304 = 2{,}4828736 \\ &+ \log. 49 = 1{,}6901961 \\ &+ \log. \pi = 0{,}4971499 \\ \hline &+ 4{,}6702196 \\ -+ &(\log. 180 + \log. 60) = 4{,}0334238 \\ \hline &\log. F = 0{,}6367958 \end{aligned}$$

Also der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks $F = 4{,}333107$ □F. = 4 □F. 33 □Z. 31 □L. sehr nahe.

Es kann sich finden, daß ein Winkel des Dreiecks oder auch zwei oder auch alle drei rechte Winkel sind.

Ist ein Winkel $A = 90^0$, so wird

$$F = (B + C - 90)\,\frac{R^2\pi}{180}.$$

Sind zwei $A, B = 90^0$, so wird $F = \frac{CR^2\pi}{180}$.

Sind alle drei $A, B, C = 90^0$, so wird $F = \frac{R^2\pi}{2}$ gleich dem achten Theil der ganzen Kugeloberfläche, welche $4R^2\pi$ ist.

2) Wenn die drei Seiten des Dreiecks a, b, c gegeben sind, so berechne man daraus die Winkel A, B, C (nach §. 37) u. s. w. Es läßt sich eine Formel geben, den Ueberschuß D unmittelbar aus den Seiten abzuleiten; ihre Entwickelung aber ist sehr weitläufig, und

die Berechnung darnach nicht viel kürzer; daher ich sie hier übergehe.

Anm.: Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks läßt sich überhaupt immer bestimmen, wenn drei Stücke desselben in der Art gegeben sind, daß sich darnach das Dreieck, also auch seine drei Winkel bestimmt berechnen lassen, wie in den vorhergehenden Aufgaben gezeigt worden.

§. 47.

Aufgabe.

Von einem sphärischen Vieleck (Polygon), dessen Seiten Bogen größter Kreise auf einer Kugeloberfläche sind, sind die Winkel und der Halbmesser der Kugel R gegeben; daraus soll der Flächeninhalt desselben berechnet werden.

Auflösung: Es läßt sich ein jedes Vieleck der Art durch Diagonalbogen größter Kreise in so viel sphärische Dreiecke zerlegen, als die Anzahl n der Seiten weniger zwei beträgt. Die Summe aller Winkel dieser Dreiecke ist der Summe der gegebenen Vieleckswinkel gleich; der Ueberschuß aller Polygonwinkel über $(n-2)\,180^0$ muß offenbar derselbe seyn, als die Ueberschüsse eines jeden Dreiecks über 180^0 zusammengenommen. Heißt die Summe der Polygonwinkel S, so wird der gesammte Ueberschuß $D = S-(n-2)\,180^0$; also (nach §. 46.)

$$F = (S-(n-2)\,180)\,\frac{R^2\pi}{180}$$

Wenn z. B. von einem sphärischen Fünfeck ABCDE die Winkel gegeben sind, so ist seine Fläche den Flächen der drei Dreiecke ABC, ACD, ADE, in die es sich zerlegen läßt, zusammengenommen gleich, nehmlich:

$$F = (A + B + C + D + E - 3 \cdot 180) \cdot \frac{R^2 \pi}{180}$$

Jeder Vieleckswinkel giebt mit seinem sphärischen Nebenwinkel zusammen 180°; heißt nun die Summe aller dieser Nebenwinkel M, so ist offenbar $S + M = n \cdot 180$, also $S = n \cdot 180^0 - M$; demnach wird obige Formel:

$$F = (n \cdot 180^0 - M - n \cdot 180 + 360) \cdot \frac{R^2 \pi}{180}$$

$$= (360 - M) \frac{R^2 \pi}{180}$$

Reduction sphärischer Dreiecke
auf die
zu ihnen gehörigen geradlinigten Sehnendreiecke.

§. 48.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Die Seiten (Bogen) eines sphärischen Dreiecks ABC sind a, b, c: die correspondirenden Seiten des Sehnendreiecks, welches entsteht, wenn man die Endpunkte der Bogen durch gerade Linien verbindet, sind α, β, γ; es wird verlangt, aus den gegebenen Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks die Seiten des Sehnendreiecks zu berechnen, oder auch umgekehrt.

Auflösung:

1) Aus a, b, c sollen α, β, γ berechnet werden.

Der Halbmesser der Kugel, welcher auch der Halbmesser der Bogen a, b, c ist, sey R, irgend ein Längenmaß. Die Sehne α ist für diesen Halbmesser der

doppelte Sinus des halben Bogens a (in Graden); nehmlich nach der ebenen Trigonometrie ist:

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}a \;.\; R}{\sin.\,tot.}, \text{ (zu logar. Bearb.)}$$

$$\alpha = \frac{2\sin.\tfrac{1}{2}a \;.\; R}{\sin.\,tot.}$$

$$\log.\alpha = \log.2 + \log.\sin.\tfrac{1}{2}a - 10 + \log.R, \text{ u. s. w.}$$

Eben so ist $\beta = \dfrac{2\sin.\tfrac{1}{2}b \;.\; R}{\sin.\,tot.}$

$$\gamma = \frac{2\sin.\tfrac{1}{2}c \;.\; R}{\sin.\,tot.}$$

So lassen sich die geraden Längen von α, β, γ nach dem Maß des Kugelhalbmessers finden, und gegen die Bogenlängen a, b, c nach demselben Maß, vergleichen.

2) Aus α, β, γ sollen umgekehrt a, b, c berechnet werden.

Es ist, wie in 1)

$$\sin.\tfrac{1}{2}a = \frac{\tfrac{1}{2}\alpha \;.\; \sin.\,tot.}{R} \text{ (zu logar. Bearb.)}$$

So findet man den Winkel oder Bogen $\frac{1}{2}a$, also a in Graden; dieses Gradmaß läßt sich dann in Längenmaß des Halbmessers R verwandeln, nach dem Satz:

$$360 : 2R\pi \text{ oder } 180^0 : R\pi = a^0 : \frac{aR\pi}{180}$$

Eben so wird $\sin.\tfrac{1}{2}b = \dfrac{\tfrac{1}{2}\beta \;.\; \sin.\,tot.}{R}$ u. s. w. berechnet.

Sind die Bogen a, b, c, in Graden d. h. in Verhältniß zum größten Kreis der Kugel sehr klein, welches auch Statt findet, wenn die Sehnen eine beträcht-

liche Länge haben, der Halbmeſſer der Kugel aber gegen dieſe ſehr groß iſt, ſo wird der Unterſchied zwiſchen den Seiten des ſphäriſchen und geradlinigten Sehnendreiecks immer ſehr gering gefunden. Ein Beiſpiel der Art wird weiterhin folgen.

§. 49.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Die Winkel eines ſphäriſchen Dreiecks ſind A, B, C, ſeine Seiten a, b, c, die Winkel des dazu gehörigen Sehnendreiecks $\mathfrak{A}$ (bei A), $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ſeine Seiten α, β, γ; es wird verlangt, aus den Seiten des Sehnendreiecks α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel A, B, C des ſphäriſchen Dreiecks, oder umgekehrt, aus den Seiten des ſphäriſchen Dreiecks a, b, c die gegenüberliegenden Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ des Sehnendreiecks zu berechnen.

Auflöſung: Der Kürze wegen wollen wir hier den Halbmeſſer der Kugel $R = 1$, und sin. tot. $= 1$ ſetzen.

1) Es ſind die Seiten des Sehnendreiecks α, β, γ gegeben; daraus ſollen die ſphäriſchen Winkel A, B, C berechnet werden. Man ſieht ſogleich, daß zuerſt aus den Seiten α, β, γ die Seiten (Bogen) a, b, c des ſphäriſchen Dreiecks, und aus dieſen dann die Winkel deſſelben A, B, C beſtimmt werden müſſen. Die Beſtimmung eines Winkels, z. B. A unmittelbar aus den drei gegebenen Stücken läßt ſich in einer etwas zuſammengeſetzten Formel alſo darſtellen.

Es iſt $\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b \,.\, \sin. c}$ (n. F. 2. im §. 35.)

Ferner iſt $\sin. \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \alpha$ (für R und sin. tot. $= 1$.)

alſo $1 - \cos. a = 2 \frac{1}{4} \alpha^2$ (n. Formel 24. im §. 8.)

folglich $\cos. a = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$;

Eben ſo $\cos. b = 1 - \frac{1}{2}\beta^2$

$\cos. c = 1 - \frac{1}{2}\gamma^2$.

Daraus folgt auch $\sin. b = \sqrt{1-(1-\frac{1}{2}\beta^2)^2}$

$= \beta\sqrt{1-\frac{1}{4}\beta^2}$

Eben ſo $\sin. c = \gamma\sqrt{1-\frac{1}{4}\gamma^2}$

Dieſe Werthe ſubſtituire man in die obige Gleichung für cos. A, ſo iſt:

$$\cos. A = \frac{1-\frac{1}{2}\alpha^2-[(1-\frac{1}{2}\beta^2)\,.\,(1-\frac{1}{2}\gamma^2)]}{\beta\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}\beta^2}\cdot\gamma\sqrt{1-\frac{1}{4}\gamma^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{4}\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma\cdot\frac{1}{4}\sqrt{4-\beta^2}\cdot\sqrt{4-\gamma^2}}$$

, oder mit 4 Zähler und Nenner multiplicirt.

$$\cos. A = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha^2-\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma\cdot\sqrt{4-\beta^2}\cdot\sqrt{4-\gamma^2}}.$$

Eben ſo würde man erhalten:

$$\cos. B = \frac{2\alpha^2+2\gamma^2-2\beta^2-\alpha^2\gamma^2}{\alpha\gamma\cdot\sqrt{4-\alpha^2}\cdot\sqrt{4-\gamma^2}}$$ u. ſ. w.

Die Berechnung der Winkel A, B, C nach einer ſolchen Formel, iſt bei wirklichen Zahlenexempeln ſchwierig und weitläufig; ich glaube, man wird hier beſſer thun, wenn man nach der vorigen Aufgabe §. 48 aus den Seiten α, β, γ erſt die Bogen a, b, c, und ſodann aus dieſen den einen oder andern ſphäriſchen Winkel (denn gewöhnlich werden ſie nicht alle zugleich verlangt) beſtimmt.

2) Die Seiten (Bogen) des ſphäriſchen Dreiecks a, b, c ſind gegeben; daraus ſollen die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ des Sehnendreiecks beſtimmt werden.

Es iſt $\cos. \mathfrak{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ (Siehe §. 20.)

Nun ist $\beta = 2\sin.\frac{1}{2}b$, $\gamma = 2\sin.\frac{1}{2}c$, $\alpha = 2\sin.\frac{1}{2}a$, also

$$\cos.\mathfrak{A} = \frac{2\,.\,(\sin.^2\frac{1}{2}b + \sin.^2\frac{1}{2}c - \sin.^2\frac{1}{2}a)}{4\sin.\frac{1}{2}b\,.\,\sin.\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\sin.^2\frac{1}{2}b + \sin.^2\frac{1}{2}c - \sin.^2\frac{1}{2}a}{2\sin.\frac{1}{2}b\,.\,\sin.\frac{1}{2}c} \text{ u. s. w.}$$

Diese Formel hat die Unbequemlichkeit, daß sie nicht ganz logarithmische Bearbeitung gestattet; auch hier gilt die Bemerkung, daß man zuerst aus den Bogen a, b, c (nach §. 48.) die Seiten α, β, γ und dann hieraus (nach §. 20.) die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und zwar logarithmisch, berechnen kann.

§. 50.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Zwei Seiten b, c eines sphärischen Dreiecks und der von denselben eingeschlossene Winkel A sind gegeben; daraus soll der Sehnenwinkel $\mathfrak{A}$, der dem sphärischen A correspondirt, berechnet, oder es soll der sphärische Winkel A auf den Sehnenwinkel $\mathfrak{A}$ reducirt werden.

Auflösung:

Es ist $\cos.a = \cos.b\,.\cos.c + \sin.b\,.\sin.c\,.\cos.A$ (n. Formel 2. §. 35.),

oder $1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}a =$
$\sin.b\,.\sin.c\,.\cos.A + (1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}b)\,.\,(1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}c)$,

also nach erfolgter Reduction:

$2\sin.^2\frac{1}{2}b + 2\sin.^2\frac{1}{2}c - 2\sin.^2\frac{1}{2}a =$
$\sin.b\,.\sin.c\,.\cos.A + 4\sin.^2\frac{1}{2}c\,.\sin.^2\frac{1}{2}b.$

Im Sehnendreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos.\mathfrak{A}$ (n. §. 19), oder

da $\alpha = 2 \sin. \frac{1}{2} a$, $\beta = 2 \sin. \frac{1}{2} b$, $\gamma = 2 \sin. \frac{1}{2} c$,

$$4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a =$$
$$4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} b + 4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} c - 8 \sin. \tfrac{1}{2} b \,.\, \sin. \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos. \mathfrak{A},$$

also $2 \sin.^2 \frac{1}{2} b + 2 \sin.^2 \frac{1}{2} c - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a =$
$4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. \mathfrak{A}.$

Statt des vordern Theils dieser Gleichung setze man den vorher dafür bestimmten Werth, so ist:

$$\sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A + 4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} b \,.\, \sin.^2 \tfrac{1}{2} c =$$
$$4 \sin. \tfrac{1}{2} b \,.\, \sin. \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos. \mathfrak{A}.$$

Nun ist $\sin. b \,.\, \sin. c = 4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \cos. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. \frac{1}{2} c$
(nach Formel 21. §. 8.)

Also $4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. \frac{1}{2} b \,.\, \cos. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. A + 4 \sin.^2 \frac{1}{2} b \,.\, \sin.^2 \frac{1}{2} c$
$= 4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c \,.\, \cos. \mathfrak{A}.$

Dividirt man Alles durch $4 \sin. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} c$, so erhält man:

$$\cos. \mathfrak{A} = \cos. \tfrac{1}{2} b \,.\, \cos. \tfrac{1}{2} c \,.\, \cos. A + \sin. \tfrac{1}{2} b \,.\, \sin. \tfrac{1}{2} c.$$

Nach der Analogie dieser Formel lassen sich auch die andern Sehnenwinkel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aus zwei Seiten und dem eingeschloßnen Winkel des sphärischen Dreiecks bestimmen.

Sind die zwei Seiten des sphärischen Dreiecks, b, c gleich, so wird:

$$\cos. \mathfrak{A} = \cos.^2 \tfrac{1}{2} b \,.\, \cos. A + \sin.^2 \tfrac{1}{2} b.$$

oder weil allgemein $\cos. a = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$,

$$1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} \mathfrak{A} = \cos.^2 \tfrac{1}{2} b \,.\, (1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A) + 1 - \cos.^2 \tfrac{1}{2} b,$$
$\sin. \frac{1}{2} \mathfrak{A} = \cos. \frac{1}{2} b \,.\, \sin. \frac{1}{2} A$, ein sehr bequemer Ausdruck, um $\frac{1}{2} \mathfrak{A}$, also auch $\mathfrak{A}$ zu finden.

§. 51.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Vom Sehnendreieck sind zwei Seiten β, γ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\mathfrak{A}$ gegeben; dieser

Winkel $\mathfrak{A}$ soll auf den sphärischen Winkel A reducirt werden.

Auflösung. Im Sehnendreieck ist nach der schon öfter angeführten Formel:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \cos.\mathfrak{A}$$

Diesen Werth von α^2 setze man in die Gleichung für cos. A, welche in der Aufgabe §. 49 gefunden worden, so wird:

$$\cos. A = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta^2 - 2\gamma^2 + 4\beta\gamma \cdot \cos.\mathfrak{A} - \beta^2\gamma^2}{\beta\gamma \cdot \sqrt{4-\beta^2} \cdot \sqrt{4-\gamma^2}}$$

$$= \frac{4\cos.\mathfrak{A} - \beta\gamma}{\sqrt{4-\beta^2} \cdot \sqrt{4-\gamma^2}}$$

Man kann auch, nach einer leichten Reduction, setzen:

$$\cos. A = \frac{\cos.\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\beta \cdot \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{[(1+\frac{1}{2}\beta)\cdot(1-\frac{1}{2}\beta)\cdot(1+\frac{1}{2}\gamma)\cdot(1-\frac{1}{2}\gamma)]}}$$

Sind die gegebenen Seiten des Sehnendreiecks β, γ gleich, in welchem Falle auch die Seiten des sphärischen Dreiecks b, c gleich sind, so wird der gefundene Ausdruck etwas abgekürzt, nehmlich es ist dann:

$$\cos. A = \frac{4\cos.\mathfrak{A} - \beta^2}{4-\beta^2}, \text{ also auch}$$

$$1 - \cos. A = 1 - \frac{(4\cos.\mathfrak{A} - \beta^2)}{4-\beta^2} = \frac{4(1-\cos.\mathfrak{A})}{4-\beta^2}$$

oder, weil überhaupt $1 - \cos.\varphi = 2\sin.^2\frac{1}{2}\varphi$.

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{4\sin.^2\frac{1}{2}\mathfrak{A}}{4-\beta^2}, \text{ also}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\mathfrak{A}}{\sqrt{4-\beta^2}} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\mathfrak{A}}{\sqrt{(2+\beta)\cdot(2-\beta)}}$$

Man kann auch setzen:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.\frac{1}{2}\mathfrak{A}}{\sqrt{(1+\frac{1}{2}\beta)\cdot(1-\frac{1}{2}\beta)}}$$

Aus dieser Formel erhellt, daß der Sehnenwinkel A des gleichschenklichten sphärischen Dreiecks A B C größer seyn muß, als der zugehörige Sehnenwinkel α.

Man muß bei jeder Berechnung nach den bisher gegebenen Formeln nicht vergessen, daß der Kugelhalbmesser sowohl, als die goniometrische Größe Sin. tot. = 1 angenommen worden sind. Es kann bei einiger Aufmerksamkeit keinem Leser schwer fallen, einzusehen, wie man sich zu verhalten habe, wenn der Halbmesser der Kugel R, auf welche sphärische Dreiecke bezogen werden, in einer bestimmten Zahl nach irgend einem Maß ausgedrückt wird, in welchem Falle dann die Längen der Seiten a, b, c und α, β, γ nach eben solchem Maß, in Theilen des Halbmessers angesetzt werden müssen. Wir werden weiterhin Gelegenheit finden, uns dies an wirklich geodätischen Beispielen zu erläutern.

Dritte Abtheilung.

Von den
vorzüglichsten und brauchbarsten Werkzeugen
zu
Erdmessungen und Aufnahmen.

Die Meßinstrumente lassen sich in zwei Klassen abtheilen:

In die eine gehören alle Werkzeuge und Vorrichtungen, vermittelst deren man Längen oder Distanzen nach irgend einem Maßstab so genau als möglich bestimmen kann; in die zweite gehören die Werkzeuge, vermittelst deren man die Winkel, welche von fixen Punkten auf der Erdoberfläche gebildet werden, entweder bloß geometrisch auf einen Plan von Papier oder desgl. construirt, oder auch nach dem allgemein bekannten Gradmaß von Krisbogen in Zahlen, mißt.

Außer diesen sind besonders in der höhern Erdvermessung noch einige andere Hülfsmittel nöthig, z. B. genaue Zeitmesser, oder Uhren, die unter dem Namen Chronometer bekannt sind u. s. w.

Ich glaube meinen Lesern einen Dienst zu erweisen, wenn ich hier bloß von der Construction und dem Gebrauch der wichtigsten und brauchbarsten neuern Werkzeuge zu Längen- und Winkelmessungen spreche,

und daher alle die ältern unnützen Einrichtungen der Art, welche nur noch geschichtlichen Werth haben, ganz mit Stillschweigen übergehe.

§. 52.

Meßkette und Maßstäbe zur Distanzenmessung.

Bei Längen- und Basis-Bestimmungen, welche nicht die größte Genauigkeit verlangen, kann eine gut gearbeitete Meßkette, geschickt angewandt, ausreichen. Bei größern geodätischen Operationen hingegen, z. B. bei der geographischen Aufnahme einer weit ausgedehnten Erstrecke, eines ganzen Landes, kommt auf die genaueste Längenbestimmung einer Hauptbasis (Stand-Grund-Linie) ungemein viel an, wie wir weiterhin sehen werden; für eine solche Bestimmung ist daher ein genaueres Maßwerkzeug nöthig, als auch die vorzüglichste Meßkette ihrer Natur nach seyn kann. Dies sind Maßstäbe von Holz, von Metall oder einem andern festen Körper, der durch den Einfluß der Atmosphäre oder anderer äußerer Kräfte in seiner Dimension nur geringe Veränderungen erleidet. Die sogenannte Meßschnur, deren man sich in frühern Zeiten aus Bequemlichkeit oder Unwissenheit sehr häufig bediente, muß auch bei kleinern Längenmessungen der gemeinen Feldmeßkunst verworfen werden; denn wenn auch eine solche Schnur, aus Hanf oder Bast, noch so sorgfältig zubereitet, in Oel gekocht und dann mit Wachs überzogen worden, so erleidet doch ihre Länge durch Anspannung beim Messen, durch Feuchtigkeit u. s. w. mehr oder weniger Veränderungen.

Die Meßkette ist ihrer Einrichtung nach so allgemein bekannt, daß eine vollständige Beschreibung hier

ganz überflüssig wäre. Es ist besser und zuverläßiger, wenn die Kette aus Stahl gemacht wird, weil sich die Glieder aus gemeinem Eisendraht zu leicht verbiegen und ausziehen lassen. Die Längen der Glieder (vom Mittelpunkt eines Ringes bis zum Mittelpunkt des nächsten) müssen durchaus sich gleich bleiben. Daher ist die Anfertigung einer guten genauen Meßkette so leicht nicht, wie Manche glauben, und die meisten Meßketten, die ich zu prüfen Gelegenheit hatte, waren mehr oder weniger falsch. In diesem letzteren ungünstigen Falle muß ein Vermesser die wahre Länge seiner Kette, wenn sie dennoch gebraucht werden soll, zuvor vermittelst sehr genauer Maßstäbe (étalons) erforschen; überhaupt muß man nie versäumen, die Länge seiner Kette, wenn sie auch noch so gut gearbeitet ist, vor einer neuen Messung wiederholt nach sichern Maßstäben zu prüfen, weil sich bei öfterm Gebrauch ihre Länge wohl um einige Zoll vergrößern kann. In der Vernachläßigung dieser Vorsichtsregeln liegt zum Theil der Grund so vieler fehlerhafter Aufnahmen.

Die gewöhnlichen Meßketten sind 5 bis 6 Ruthen lang; die größern Ruthenabtheilungen werden durch größere Ringe, die kleinern Abtheilungen in einzelne Decimalfuß der Ruthe, werden durch kleinere Ringe unterschieden. Die Rheinländische Ruthe = 12 Duodez- oder 10 Decim.Fuß, wird von Geometern in Deutschland als Normalmaß gebraucht; eine Länge nach diesem Maß läßt sich erforderlichen Falls sehr leicht auf eine Länge nach einem andern Landesmaß reduciren, wenn man die Verhältnißzahl zwischen diesem und dem Rheinländischen Maß kennt. Kleinere Längenunterschiede, als 1 Decimalfuß der Kette ist, müssen, wenn bei wirklicher Vermessung etwas darauf ankommt, vermittelst eines eingetheilten Fußmaßes bestimmt werden.

In Frankreich giebt man gewöhnlich der Meßkette

eine Länge von 5 oder 10 Mètres; jede Mètrelänge ist wieder aus 5 Theilen, jeder gleich 2 Decimètres, zusammengesetzt. Man macht eine solche insgemein gegen 2 Decimètres über 10 Mètres lang, weil man mit Grund annimmt, daß sich bei einer Längenmessung die Kette nicht in eine gerade Linie ausspannen läßt, und daß bei einer zu gewaltsamen Anziehung derselben, um sie in gerade Linie zu bringen, entweder die Ringe reißen, die Kettenstäbe nachgeben, oder Verlängerungen in der Kette entstehen können; daß also wahrscheinlich die erwähnte kleine Längencompensation der nicht allzustraff gespannten Kette noch das zuverläßigste Resultat verschaffen könne.

In England wird, so viel ich weiß, zu Landesvermessungen eine stählerne Kette gebraucht, welche 66 Englische Fuß lang und in 100 Theile getheilt ist; jedes Glied vom Mittelpunkt eines Ringes bis zum Mittelpunkt eines folgenden ist demnach 7,92 Zoll lang.

Maßstäbe werden zur Messung gerader Distanzen mit weit größerer Zuverläßigkeit, jedoch mit mehr Mühe, als Ketten gebraucht. Wenn es sehr weit ausgedehnte trigonometrische Aufnahmen gilt, wobei man Netze von großen Dreiecken erhält, so muß die Hauptgrundlage der ganzen Arbeit eine nach irgend einem Maß sehr genau bestimmte Standlinie, Basis seyn. Die Messung einer solchen Basis ist eine von den bedeutendsten nnd feinsten Operationen der Erdmessung; von ihrer Genauigkeit, so wie von der Messung der Winkel hängt die richtige Bestimmung der Entfernung und Lage der Oerter auf der Erde ab. Die Standlinien müssen in Verhältniß zu den Seiten der Dreiecke, wozu sie gehören, eine beträchtliche Länge haben und horizontale gerade Linien seyn; auch müssen sie nach einem Längenmaß, das genau bekannt und auf einen gleichen Grad der Temperatur reducirt ist, bestimmt

werden. Dies sind Bedingungen, gewiß nicht leicht zu erfüllen, wenn sichs um Messung einer sehr langen Basis handelt; es bedarf hiezu nicht allein genauer Werkzeuge sondern auch eines sachkundigen, gewissenhaften Geometers.

Zur Messung kleinerer Standlinien bedient man sich insgemein der Maßstäbe von gutem ausgetrockneten Tannenholz, welche in kochendem Oel eingetränkt und dann mit einem dicken Firniß überzogen werden; dadurch werden sie, weniger als sonst, gegen den hygrometrischen (Feuchtigkeits-) Zustand und den Wärmewechsel der Atmosphäre empfindlich gemacht. Insgemein besteht ein solcher Maßstab aus einer viereckigen prismatischen Stange, zwei Zoll dick, gegen drei Zoll breit, und 6 Fuß lang, zu größern Messungen auch wohl 10 Fuß lang oder noch länger. Dieser Maßstab wird, mittelst eines guten Stangenzirkels, sehr genau in Fuße, Zolle u. s. w. getheilt; die Theilung kann durch Einschnitte oder mit einem Farbematerial bemerklich gemacht werden. Mehr Gewißheit, als dieser einfache Maßstab, wird ein zusammengesetzter nach folgender leichten Construction (Fig. 20.) gewähren. Die Aerme des geschobenen Vierecks (Raute) A B C D und der Diagonalarm C D dienen dem Maßstab A B zur Stützung, und hindern dessen so leicht mögliche Krümmung. Man muß wenigstens zwei solche Maßstäbe haben, und dieselben sehr genau justiren. In Frankreich braucht man wirklich dergleichen, und giebt ihnen dort gemeiniglich eine Länge von 5 Mètres. Bei einer Messung legt man sie auf eine Brücke von mehreren auf dreifüßigen Schemeln fest aufgestellten Bretern u. s. w.

Zu der großen astronomisch-trigonometrischen Messung in Frankreich, die man zugleich zum Behuf eines fest zu bestimmenden Decimal-Maßes unternahm, wurden Maßstäbe (règles) aus Platina und Kupfer

gebraucht, welche vermöge einer sehr kunstreichen Einrichtung zugleich Metallthermometer waren. Bei der Messung wurden dieselben mit ihren Enden nicht an einander gelegt, um den Zurückstoß (recul) derselben bei der Berührung zu vermeiden; der kleine Abstand zwischen ihren Enden beim Auflegen und fortgesetzten Messen wurde mittelst eines graduirten kleinen Maßstabes (languette) bestimmt. Es ist eine, jedem Anfänger bekannte und gewisse Thatsache, daß die Ausdehnung (Solumen) eines festen Körpers mit dem Wechsel seiner Temperatur verändert wird. Die französischen Geometer und Physiker fanden bei sehr sorgfältig darüber angestellten Versuchen, daß Platina sich mit jedem steigenden Wärmegrad des hunderttheiligen Thermometers ungefähr um ein 0,00000856 Theilchen, Kupfer um ein 0.00001784 3 Theilchen, Eisen um ein 0,00001156 Theilchen ihrer Dimensionen ausdehnen. Für Maßstäbe ist aber nur ihre Ausdehnung in die Länge zu betrachten, und bei wirklicher Distanzenmessung auf diesen Umstand allerdings Rücksicht zu nehmen, wenn ein geodätisches Resultat verlangt wird, so genau als es menschliche Kräfte zu geben vermögen. Man nimmt in diesem Falle die Länge eines metallenen Maßstabes bei einem bestimmten Wärmegrad des hunderttheiligen (man kann auch das 80theilige brauchen, und dessen Grade auf solche des 100theiligen durch das Verhältniß 4 : 5 reduciren) Thermometers als Normalmaß an; da nun bei fortgesetzter Messung dieser Maßstab wegen der veränderlichen Temperatur der Luft seine Länge um etwas Weniges verändern, nehmlich abwechselnd sich verlängern oder verkürzen kann, so reducirt man diese veränderte Länge auf die Normallänge, nach Verhältniß der Normaltemperatur und der veränderten Temperatur des Maßstabes, wozu man ein eignes Register der Wärmeveränderungen halten

muß. So kann zuletzt die Länge der ganzen gemessenen Basis auf eine solche gebracht werden, die mit der Länge der gebrauchten Maßstäbe bei einer bestimmten Temperatur correspondirt.

Damit der Gang einer solchen Reduction gemessener Distanzen den denkenden Lesern ganz deutlich werde, stehe hier folgende Erläuterung:

Es muß bei jeder Längenmessung ein Maßstab gebraucht, dieser Maßstab selbst aber nach einem festgesetzten unveränderlichen Einheitsmaß, es sey nun ein Mètre oder ein Rheinl. Fuß oder ein andrer Fuß, seiner Länge nach bestimmt und darnach eingetheilt seyn. Nun sey z. B., wie es in Frankreich geschehen, die Länge eines Mètre durch ein Lineal von Platina bei der Temperatur von 0^0 (Eispunkt) des hundertgradigen Thermometers, bestimmt und als unveränderliches Längeneinheits-Maß festgesetzt worden. Es sey durch physikalische Untersuchungen bekannt, daß das Mètremaß von Platina sehr nahe um ein 0,00000856 Theilchen, der Maßstab von Eisen aber um ein 0,00001156 Theilchen seiner Länge zunehme, wenn die Temperatur dieser Metalle um einen Grad des 100theiligen Thermometers zunimmt, und umgekehrt.

Der Kürze halber mögen die Verhältnißzahlen der Ausdehnungen d und D heißen, nehmlich:

$$0{,}00000856 = d.$$
$$0{,}00001156 = D.$$

Sind nun, wie man gefunden hat, die Ausdehnungen der erwähnten Metalle durch alle Grade der Wärme von 0^0 (Eispunkt) bis 100^0 (Siedepunkt) ziemlich gleichförmig, so ist klar, daß das Normalmètremaß, bei 0^0 angefertigt und bestimmt, eine größere Länge bekommt, wenn die Temperatur desselben über 0^0, z. B. 10^0 ist, und daß in diesem Falle die Mètrelänge, welche es anzeigt, wenn wir dieselbe $= 1$ setzen, eigentlich nur $1 - 10d$ ist.

Nun sey ein Maßstab aus Eisen bei einer Temperatur von 10^0 nach dem Maß des Mètre aus Platina bestimmt und justirt worden. Mit diesem eisernen Maßstab sey ferner eine Distanz oder horizontale Länge auf der Erde gemessen, gleich L Mètres gefunden worden, und zwar bei einer andern Temperatur, z. B. bei einem mittlern Wärmegrad von 18^0 des hunderttheiligen Thermometers. Die Zahl von L Mètres soll demnach so reducirt werden, daß sie in Normalmètres, bei 0^0 Temperatur, ausgedrückt wird.

1 Mètre aus Platina ist bei 10^0 Temperatur $=$ 1 — 10d (Norm. Mètre). Nach diesem Maß sey ein Mètremaß aus Eisen bei 10^0 bestimmt; die Zahl von Graden, welche von 10^0 subtrahirt werden muß, um den Grad der Temperatur zu bekommen, bei welchem ein Mètre aus Eisen an Länge gleich ist einem Normalmètre aus Platina bei 0^0, sey $= x^0$; so erhellt, daß

1 Mètre aus Eisen bei 10^0 bestimmt $= (1 - xD)$ Norm. Mètre. Da nun bei 10^0 die beiden Maße aus Platina und Eisen gleich gemacht sind, so folgt offenbar, daß

$$1 - 10d = 1 - xD, \text{ also}$$
$$xD = 10d, \text{ also}$$
$$x = \frac{10d}{D}.$$

Nach der obigen Angabe ist also:

$$x^0 = \frac{10, \times 0{,}00000856}{0{,}00001156} = 8^0 \text{ sehr nahe.}$$

Folglich ist $10^0 - x^0 = 2^0$ sehr nahe.

Hieraus läßt sich schließen, daß eine Mètre-Länge aus Eisen bei 2^0 Grad gleich ist der Normal-Mètre-Länge aus Platina bei 0^0 Grad.

Gesetzt also, es sey mit dem erwähnten Mètre-Maß aus Eisen bei einer mittlern Temperatur von 18° eine Distanz gemessen, und gleich L Mètres gefunden worden, so ist dieselbe auf das Normal-Mètre reducirt:

$$= \frac{L}{1 - 16^0 D} = \frac{L}{1 - 16 \times 0{,}0000115\ldots}$$

$$= \frac{L \text{ . mètr.}}{0{,}99982\ldots}$$ Normalmètres sehr nahe.

Man ersieht hieraus, daß die gemessene Distanz L bei 18° zu klein gefunden worden ist. Bei kleinen Distanzen beträgt dieser Unterschied sehr wenig, bei größern hingegen kann er für genaue geodätische Vermessungen so beträchtlich werden, daß er durchaus nicht außer Acht gelassen werden darf. Wäre z. B. nach den erwähnten Angaben L = 10000 Mètres gemessen, so wäre dieselbe reducirt = 10001,7 . . . Normalmètres von Platina bei 0°; also die gemessene Distanz um 1,7 Mètres zu klein, welcher Fehler bei einer großen Triangulirung nicht gestattet werden darf. Daß das Normalmètre aus Platina bei 0° bestimmt wurde, geschah darum, weil sich diese Temperatur vermittelst schmelzenden Eises immer leicht, identisch und auch anhaltend erlangen läßt. Indessen ist dieser Grad der Temperatur bei der Normalbestimmung nicht durchaus nöthig; wäre das Mêtre aus Platina bei einer andern Temperatur, z. B. bei 6° des 100theiligen Thermometers festgesetzt worden, so würde nach den vorigen Angaben bei 10°

eine Mètrelänge aus Platina = $1 - 4d$

$$x = \frac{4d}{D},$$

also eine Mètrelänge aus Eisen bei $\left\{10 - \frac{4d}{D}\right\}^0$

der Normal-Mètrelänge aus Platina, bei 6° bestimmt, gleich zu setzen seyn.

Dies Beispiel der Reduction wird dem Leser genügen, um einzusehen, wie die Reduction der gemessenen Distanzen bewerkstelligt werden muß, wenn das Normalmaß ein andres Maß als das Mètre, z. B. ein Rheinl. Dec.Fuß, das Material dazu ein andres Metall als Platina, der darnach zu justirende Maßstab ebenfalls von einem andern Material als Eisen ist, und statt des 100theiligen das 80theilige Thermometer gebraucht wird u. s. w.

Man sieht wohl ein, daß zu dieser Art von Correction drei Dinge unumgänglich nothwendig sind:

1) ein bestimmtes unveränderliches Längenmaß, von dessen Darstellung im folgenden §. das Wichtigste beigebracht wird;
2) eine genaue Kenntniß von den Dimensions-Veränderungen, welche feste Körper: Metalle, Holz u. s. w. durch den Wechsel der Temperatur erfahren, und vergleichende Tabellen hierzu;
3) genaue Beobachtungen des Wärmegrades, welchen ein Maßstab aus Metall, Glas, Holz ꝛc. bei einer Distanzenmessung zu verschiedenen Zeiten, anzeigt.

Dies sind alles schwere Bedingungen, die aber bei großen Vermessungen, wenigstens so genau, wie es die Umstände erlauben, erfüllt werden müssen; bei kleinern Aufnahmen von einigen Quadratmeilen, bei welchen die Meßkette, der Meßtisch u. s. w. ausreichen, fällt natürlich eine so feine Correction ohne Nachtheil weg.

Die erwähnten, zur französischen großen Messung gebrauchten Maßstäbe von Platina, deren man vier hatte, sind 12 Pariser Fuß lang, 6 Linien breit und 1 Linie dick. Ein jedes dieser großen Lineale ist mit einem Lineal von Kupfer bedeckt, welches 6 Zoll kürzer

ist, als das Lineal von Platina; beide sind bloß an einer Seite ihrer Enden zusammenbefestigt, damit sich die Ausdehnung beider Metalle bloß an dem andern freien Ende zeigen kann. Man schätzt nun in jedem Augenblick den Einfluß der Wärme durch die Größe, um welche sich das Kupfer mehr ausdehnt als die Platina, vermittelst einer sehr feinen Vorrichtung, deren Beschreibung hier zu weit führen würde *).

Auch Maßstäbe von Glas sind schon versucht worden, da die Ausdehnung desselben durch die Wärme weniger beträgt, als die des Eisens, Stahls und Kupfers. Im Jahr 1784 gebrauchte man in England zur Messung einer Basis zu Hounslowhead mit gutem Erfolg sehr lange Glasstäbe. Aus deshalb angestellten Versuchen ergab sich, daß massive Glasstäbe sich mehr ausdehnen, als Glasröhren. Allein das Messen mit solchen Maßstäben hat unvermeidliche Schwierigkeiten, und man fand in England, daß sich eine Basis mittelst einer vollkommen genau gearbeiteten stählernen Kette, bei gehöriger Vorsicht und Correction wegen der Temperatur, eben so sicher oder noch sichrer bestimmen lasse, als durch gläserne Maßstäbe. Man maß von einer Basis, anderweitig auf 27404,7 Fuß bestimmt,

---

*) Die ganze Einrichtung dieser künstlichen thermometrischen Maßstäbe und die darauf sich beziehenden sorgfältigen Untersuchungen, so wie den practischen Gebrauch derselben findet man sehr ausführlich beschrieben in einem sehr voluminösen Werk, welches über die große Vermessung in Frankreich, in den Jahren 1792 u. folg., von Delambre redigirt, unter dem Titel erschienen ist:

Base du Système mètrique, ou mesure de l'arc du Méridien etc. in 3 Tom. in 4. Paris 1806 — 1810. — Von den Maßstäben (régles) im 3ten Vol. p. 313 etc.

eine Länge von 1000 Fuß mit der Kette und auch mit gläsernen Maßstäben, und fand die dabei sich ergebende Differenz so gering, daß sie auf die ganze Basis etwa $\frac{1}{2}$ Zoll betrug. Man verband zwei Basen, die 60 Meilen von einander lagen, durch ein Netz von 24 Dreiecken, und fand nach trigonometrischer Beobachtung und Berechnung, daß der Unterschied der einen Basis direct bestimmt, und derselben Basis berechnet, nur $4\frac{1}{2}$ Zoll betrug; eine Genauigkeit, mit der man in jedem Fall zufrieden seyn muß. Hölzerne Maßstäbe eignen sich nicht zur genauen Messung sehr langer Basen, weil die Dimensionsveränderungen des Holzes von mehrerlei Ursachen herrühren, nicht so regelmäßig als die der Metalle von der Temperatur abhängen, und dadurch die Correction der gemessenen Basislänge unsicher wird. (Base du Syst. mètr. Tom. III. p. 501.) Was von den Maßstäben bisher erinnert worden ist, wird für unsern Zweck völlig hinreichen. Man kann aber nach dem bestimmten Einheitsmaß selbst fragen, dem gemäß die Maßstäbe getheilt, und nach welchem die Distanzen der Basen ausgedrückt werden.

§. 53.

Normal-Längenmaß, oder fixes Maß der Einheit.

Es wäre sehr nützlich, wenn unter allen cultivirten Völkern der Erde nur ein gleiches unveränderliches Längeneinheits-Maß gäbe. Wornach soll man aber ein solches Maß bestimmen, um an allen Orten darüber einig zu werden, und in ungewissen oder streitigen Fällen über die wahre Länge des gebrauchten Normal-Maßes zu entscheiden. Es giebt am Himmel und auf Erden keine einzige Distanz (Länge), welche unveränderlich die-

selbe unter allen Umständen bleibt, oder welche, wenn sie unveränderlich ist, aus ihrer wirklichen geometrischen Größe bekannt, zur Berichtigung und Justirung eines gemeinsamen Maßes zu Gebote stände. Der Abstand der Fixsterne, die Durchmesser der unsrer Erde sehr nahen Himmelskörper sind nur scheinbare Größen für unser Auge, nehmlich bloß durch die Größe des Winkels, unter welchem sie unserm Auge erscheinen, bestimmt. Auf unsrer Erde giebt es kein Naturproduct, das überall dieselben Dimensionen zeigte.

Der erste und natürlichste Gedanke der Menschen war in Hinsicht eines Normal-Maßes, die Länge eines Theiles von einem gesunden, wohlproportionirten, erwachsenen Mann hierzu anzuwenden; fast alle Völker haben die Länge eines Mannsfußes gewählt, daher der Name Fuß. Diese Länge ist aber sehr veränderlich. In Deutschland suchte man sich im Mittelalter dadurch zu helfen, daß man mehrere ungleiche Männerfüße zusammensetzte, und die arithmetische Mittelzahl einen Fuß nannte. So erhält man schon etwas Erträglicheres, aber immer noch nichts Gewisses. In einem alten Buche des Sächs. Landrechts steht: 15 Füße machen eine Ruthe, dieselbe sollen 15 Bauern messen, wie sie des Morgens nach einander aus der Kirche gehen. Dies klingt spashaft; aber ist, genau und unparteiisch betrachtet, die neue so laut gepriesene Methode der Franzosen, ein fixes Längenmaß (Mètre) durch Messung eines Stückes vom Meridianquadranten zu erlangen, wohl um vieles besser und zuverläßiger? — So mag wohl der Unterschied der Fußmaße in verschiedenen Provinzen Deutschlands zu erklären seyn; welcher Fuß ist nun der wahre? Sonderbar muß es scheinen, daß bloß die Deutschen von Alters her und zum Theil noch jetzt den Fuß einen Schuh nennen, um vielleicht damit zu bezeugen, daß sie keine Barfüßer seyen. Wegen

des Modewechsels würden die Schuhlängen noch ungewissere Maße geben als die nackten Füße. Der Turiner Fuß, gegen $1\frac{1}{2}$ Pariser Fuß lang, soll vom Fuß eines Longobardischen Königs abstammen; damit muß doch wohl sein Schuh gemeint seyn.

Gelehrter, aber auch wirklich vernünftiger war der Gedanke, aus der genau bestimmten Länge eines Sekundenpendels ein allgemeines fires Längenmaß abzuleiten. Diese Pendellänge und die Messungen von Graden größter Kreise auf der Erdoberfläche in verschiedenen Ländern (beim Cap de bonne esperance von Lacaille, im päpstlichen Gebiet von Boscowich, in Oesterreich von Liesganig, am Polarzirkel von Maupertuis, am Aequator von Bouguer und Condamine, in Frankreich endlich von Delambre und Mechain ꝛc.) sind in den neuern Zeiten ein Gegenstand der fleißigsten Nachforschung sehr ausgezeichneter Geometer und Physiker gewesen. Auf dem einen und andern Wege gedachte man, außer einer richtigern Ansicht von der Gestalt und Größe der Erde, zugleich ein allgemeines unveränderliches Längenmaß zu erlangen, wovon sich das Original in der Natur selbst vorfände. Picard verband beide Methoden, damit man zu jeder Zeit den Werth seiner Toise wieder finden könnte; die Pendellänge, welche er zum allgemeinen Maß vorschlug, nannte er den astronomischen radius (rayon astronomique); seine Toise aber ist nicht zuverläßig, nehmlich in einem Original unter öffentlicher Autorität, erhalten worden. — Cassini schlug einen geometrischen Fuß vor, welcher gleich dem sechstausendsten Theil von 1 Minute (gemessenem Bogen) eines großen Kreises auf der Erde u. s. w. wäre. Die Idee, aus der wirklichen Natur ein bestimmtes Längenmaß zu entlehnen, wurde von mehreren Mathematikern mit vielem Eifer verfolgt. In Frankreich ist zuletzt als allgemeines Längenmaß

das sogenannte Mètre angenommen worden; ein Mètre soll, nach der Bestimmung der französischen Mathematiker, der zehnmillionste Theil eines Meridianquadranten (in Bogenlänge) seyn; diese Bogenlänge wurde hergeleitet aus der, von den allerdings sehr ausgezeichneten Mathematikern Delambre und Mechain ausgeführten, Gradmessung von Dünkirchen bis Barcellona; der Abstand der Parallelen zwischen beiden Städten ist durch eine sehr schwierige Basenmessung und eine weitläufige Triangulirung mit astronomischen Bestimmungen gefunden worden. Ferner haben gewisse Annahmen oder Hypothesen von der Abplattung der Erde u. s. w. zur Bestimmung der Bogenlänge des Meridianquadranten nach Toisen-Maß, nothwendig Statt finden müssen. Hieraus wird nun jeder denkende Leser schließen, wie zuverläßig das aus der Natur entlehnte Maß, Mètre, seyn müsse. Ich bin überzeugt, daß dies Mètre, wenn es zugleich mit dem Toisen-Maß, womit die Messungen der Basen geschahen, ganz verloren ginge, bei einer zweiten Gradmessung zwischen Dünkirchen und Barcellona von andern Mathematikern mit andern Werkzeugen und andern Voraussetzungen, nicht ganz als dasselbe wieder gefunden, und daß eine jede neue Messung etwas Andres geben würde. Besser möchte es seyn, einen kleinern Bogen zwischen Parallelen zweier bestimmten Punkte eines Landes zu messen, und einen aliquoten Theil der genau bestimmten Bogenlänge als allgemeines Maß (Mètre) für ein Land festzusetzen. Ein solches ließe sich leichter wiederfinden.

Sichrer oder doch wenigstens eben so sicher, als die eben erwähnte Methode, ein allgemeines Maß auszumitteln, scheint mir die Bestimmung eines solchen aus der an einem bestimmten Ort genau beobachteten Länge des Sekundenpendels zu seyn. Aus der Physik ist bekannt, daß die Schwingungen eines vollkommen

eingerichteten Pendels von einer gewissen unveränderlichen Länge in kleinen Schwingungsbogen gleichzeitig sind, nehmlich an einem und demselben Ort auf der Erde, daß umgekehrt die Länge eines Pendels, welches zu einer Schwingung (Oscillation) in kleinen Bogen eine gewisse Zeit, z. B. 1 Sek. astronomischer Zeit gebraucht, an einem bestimmten Orte eine unveränderliche Länge ist, so weit nehmlich die zeitherigen Beobachtungen reichen. An verschiedenen Oertern der Erde, unter verschiedenen Breiten gegen die Pole hin, zeigen sich diese Längen der Sekundenpendel etwas verschieden; nach den darüber angestellten und bekannt gewordenen Beobachtungen ist dieselbe z. B. in Quito, bei $0^0 25'$ nördlicher Breite, 439,1 Par. Lin. gleich, zu Kola in Lappland, bei $68^0 52'$ nördl. Br., 441,31 Par. Lin., zu Paris, bei $48^0 50'$ nördl. Br., 440,6 Par. Lin. u. s. w. Hier, in Berlin, findet sich die Länge des einfachen Sekundenpendels = 3 Fuß 2 Zoll (Duodec. M.) = 38 Duod. Zoll nach Brandenb. Maß; der Berl. Fuß verhält sich zum Pariser Fuß nahe wie 137,3 : 144,0. — Da nun an einem und demselben Orte die Länge eines Sekundenpendels unveränderlich zu seyn scheint; so würde es, um für ein Land ein aus der Natur und Kunst abgeleitetes Normal-Längenmaß zu erhalten, nur darauf ankommen, an einem bestimmten Ort, etwa in der Hauptstadt des Landes, die Sekundenpendellänge mit der Vorsicht, welche die Physik lehrt, und mit genauer Zeitbeobachtung, die zwar schwierig aber vermittelst guter astronomischer Pendeluhren und Beobachtungen immer erreichbar ist, auszumitteln, und die so gefundene Länge selbst, oder einen aliquoten Theil derselben, als Längeneinheit festzusetzen. Eine solche Bestimmung ist offenbar directer und zuverläßiger, als diejenige des Mètre aus der Länge des Bogens von einem Meridianquadranten, die selbst nur indirect, mit Zuziehung von

Hypothesen, nach einem andern als bekannt angenommenen Längenmaß, bestimmt wurde.

Die von Borda und Cassini über die Länge des Sekundenpendels zu Paris sehr genau ausgeführten Versuche sind ausführlich beschrieben in dem erwähnten sehr lehrreichen Werk: Base du Système metrique etc. im 3ten Tom. p. 337 sqq. Das Resultat dieser interessanten Versuche, die ich sehr gern im Auszug mittheilen möchte, wenn ich nicht den Vorwurf zu großer Weitläufigkeit befürchten müßte, war, als arithmetisches Mittel mehrerer Beobachtungen, dieses:

Die Länge eines Sekundenpendels (für mittlere Sonnenzeit) ist auf dem Observatorium zu Paris gleich 50999,6 Theilchen des gebrauchten Maßstabes (règle), wenn man sich diesen in 200000 Theile abgetheilt vorstellt; oder auf Theile der Toise, die zur Messung des durch Frankreich gehenden Meridianbogens gedient hat; reducirt ist diese Länge gleich 440,5593 Linien, die Toise = 6 Par. Fuß = 864 Lin. gesetzt. Hätte es nun den Franzosen bei ihrer neuen Mètrebestimmung gefallen, den dritten Theil der gefundenen Länge des Sekundenpendels zu Paris als neuen Pariser Fuß anzunehmen, so wäre derselbe = 146,8531 alte Par. Lin. geworden, also um etwas größer als der alte Par. Fuß = 144,0000 Lin. Hätte es aber beliebt, zum Einheitsmaß, Mètre, die ganze Pendellänge zu nehmen, so wäre dasselbe = 440,5593 Par. L. geworden; das durch Kalkul herausgebrachte Mètre ist aber = 443,296 P. L., folglich das künstliche Mètre größer, als das weniger künstliche und mehr natürliche Mètre der Pendellänge. Die Decimaleintheilung des französischen Maßsystems verdient indessen allen Beifall, hat viel Gutes für sich, und sollte füglich in allen cultivirten Ländern gebraucht werden.

Nähere Belehrung über die Versuche mit Pendeln

und die daraus abgeleiteten Folgerungen, muß der wißbegierige Leser in guten Lehrbüchern der Physik suchen.

§. 54.

Vergleichung der verschiedenen Längenmaße.

Da nun einmahl aus begreiflichen Ursachen die Längeneinheitsmaße verschiedener Länder und sogar zum Theil verschiedener Provinzen eines Staats mehr oder weniger von einander abweichen, und bei geodätischen und geographischen Bestimmungen sehr oft die Nothwendigkeit eintritt, ein Maß auf ein andres zu reduciren, so muß es ein Mittel geben, die verschiedenen Maße (gewöhnlich Fuße) gegen einander zu vergleichen.

In Frankreich wurde auf Verordnung der Regierung durch eine Commission gelehrter Männer: Mascheroni, Multedo, Coulomb, Méchain, Delambre ꝛc. die definitive Länge des neuen Mètre $= \frac{1}{10\,000\,000}$ des Meridianbogens zwischen einem Pol und dem Aequator der Erde, aufs genaueste in Originalmaßstäben von Platinametall ausgedrückt, und darnach wurden auch mehrere Maßstäbe von Eisen angefertigt; mit diesem Mètre wurden dann zwei eiserne Maßstäbe, welche Toisen vorstellen, und zu Gradmessungen früher am Aequator bei Perou und am Polarzirkel dienten, in Hinsicht ihrer Länge verglichen. Die beiden Toisenmaße, nehmlich die Toise du Perou und die Toise du Nord wurden völlig gleich befunden.

Ferner wurde durch eine besondre Commission die Vergleichung des Mètre mit dem Englischen Fuß vorgenommen. Den Englischen Fuß stellte ein sehr fein gear-

beiteter und getheilter Maßstab (étalon) von dem berühmten Englischen Künstler Troughton in London vor; man brauchte ein von demselben Künstler gearbeitetes Instrument, Comparateur, um die kleinsten Differenzen der Maße zu schätzen. Die Beschreibung dieses Comparateur würde hier zu viel Raum einnehmen; ich muß mich darauf beschränken, zu bemerken, daß vermittelst einer feinen Theilung auf der Fläche des Instruments, die durch Nonien noch Unterabtheilungen erhielt, zweier gegen diese Fläche senkrecht gerichteter Microscope, und das Auflegen des zu vergleichenden Maßstabes, es möglich wurde, die Unterschiede zweier Maße bis auf $\frac{1}{10000}$ eines Englischen Zolles zu bemerken. Ramsden, dieser geistreiche Künstler, hatte sich im Jahr 1785 eines ähnlichen Mittels bedient, um die Ausdehnung der Metalle zu messen; von seinem Instrument hierzu hat der, wegen seiner großen Messung in England bekannte, General Roy in den Philosoph. Transactions eine Beschreibung gegeben.

Mit Hülfe des Comparateurs wurden von Pictet, Legendre, Méchain, Delambre und Lenoir (einem berühmten Künstler in Paris) zwei Mètre-Maßstäbe (étalons), einer von Platina und der zweite von Eisen mit dem Englischen Fuß verglichen; diese Mètres waren bei 0^0 des 100theiligen Thermometers einander völlig gleich, nehmlich das definitive Einheitsmaß; bei $15\frac{3}{10}^0$ Temper. war das Mètre von Platina = 39,3775 Engl. Zoll, das Mètre von Eisen hingegen = 39,3788 Engl. Zoll; welches sich aus der ungleichen Ausdehnung der Metalle durch gleiche Wärmegrade erklärt. Bei keiner genauen Vergleichung der Maßstäbe darf dieser Umstand unbeachtet bleiben.

Nach einer Berichtigung dieses Resultats fand man, daß bei 0^0 Temp. das Mètre sehr nahe = 39,3827 . . . Engl. Zoll sey.

Damit noch nicht zufrieden, stellte man weiterhin noch eine Vergleichung der Maße an, vermittelst eines andern Comparateurs, von Lenoir ausgeführt *), welches kunstreiche mit Mikrometern versehene Instrument, der Angabe nach, im Stande war, die (fast unglaublich) geringe Differenz von $\frac{1}{100000}$ der Toise, ungefähr $\frac{1}{1200}$ einer Par. Linie anzuzeigen. Man gebrauchte zur Vergleichung die Toise, welche zu der Gradmessung am Polarkreis, und die Toise, welche zu der Gradmessung von Bouguer am Aequator gedient hatte, und welche letztere das authentische Normalmaß für das ältere Maßsystem war; ferner die Maßstäbe von Platina und Kupfer, welche zur letzten Bestimmung der Pendellänge, so wie zur Messung der Basen von Melun und Perpignan gebraucht worden waren; ein Mètre von Platina; ein einfaches und ein Doppel-Mètre von Eisen. Zwischen dem Mètre und dem Englischen Maß fand man wieder das vorerwähnte Verhältniß. Die Toise von Bouguer war bei $13\frac{1}{2}^{0}$ des 100th. Therm. = 76,7394 Engl. Zoll u. s. w.

Bei dieser Untersuchung beobachtete man einen bemerkenswerthen Umstand, welcher auch in dem Werke von Laplace: Exposition du Système du monde, angeführt wird: Wenn nehmlich ein metallner Maßstab mehrere Stunden unbewegt über dem Comparateur liegen bleibt, und seine Temperatur während dieser Zeit durch einen Stoß oder schwaches Reiben verändert wird; so zeigt der Comparateur sogleich eine Längenänderung; man kann hieraus schließen, welche zarte Behandlung und Vorsicht bei Untersuchungen der Art

---

*) Er ist beschrieben in der Base du Système metrique im IIIten Tom. p. 473 etc.

nöthig sind; ein Gleiches findet Statt bei Theilungen großer Kreise aus Metall.

Das bisher von der Vergleichung verschiedener Maße Gesagte soll den gebildeten Lesern einen Begriff von der besten Methode geben, wie ein so äußerst schwieriges delikates Geschäft unternommen werden muß; die gewöhnlichen Methoden sind bekannt genug.

Was nun die Vergleichung der Maße verschiedener Länder, und die darauf sich beziehenden Tabellen anlangt, so siehet man wohl ein, daß irgend ein Einheitsmaß, dessen Länge man bestimmt kennt, der Vergleichung anderer Maße zu Grunde gelegt werden muß. Man ist gewohnt, hierzu den alten Pariser Fuß, gleich dem sechsten Theil der authentischen Toise, wovon vorher gesprochen worden, zu gebrauchen.

§. 55.

Vergleichungs-Tabelle für einige sehr gebräuchliche Maße.

Der alte Pariser Fuß (pied du Roy), der Toise von Bouguer gemäß, wird nach der Duodec.-Eintheilung in 144 Par. Lin. getheilt und von diesen Linien nimmt man noch Zehntel u. s. w. Nach mehrseitigen, zum Theil sehr sorgfältigen Vergleichungen mehrerer Normalmaße mit diesem Pariser Fuß, sind folgende Verhältniße ausgemittelt worden, wovon jedoch mehrere, wegen der Unzuverläßigkeit der verglichenen Maße selbst, auch wohl wegen Ermangelung eines genauen Comparateurs, nicht in aller Schärfe richtig seyn mögen.

Pariſer Fuß	=	144,00 Pariſer Linien.
Franz. Mètre *)	=	443,296 " "
Rheinländ. Fuß	=	139,13 Par. Lin. (gewöhnl. Ang.)
oder	=	0,31385 mètré def.
(ſchwankend u. unſicher)		
Wiener Fuß	=	140,13 (nach einer andern Angabe 140,12)
Berliner Fuß	=	139,13 (nach einer neuen Beſtimmung)
oder	=	0,31385 Mètre définitif
	=	3 Decimètres, 1 Centimètre u. 4 Millimètres ſehr nahe.
Ruſſiſche Fuß	=	238,56 (2386 n. ein. n. Beſt.)
Sächſiſcher Fuß	=	125,20 (125,30 " " ")
Münchener F.	=	128,25
Wirtemberger F.	=	127,80 (andre Angabe: 126,80)
Amſterdamer F.	=	125,70 (" " 125,50)
Hannöveriſcher F.	=	129,53
England, Fuß	=	135,13 (135,15 andre Ang.)
— Yard (Elle)	=	405,3
— Ruthe ($16\frac{1}{2}$ F.)	=	2229,2
Schwediſcher F.	=	131,59
Däniſcher F.	=	140,34 ($139,\frac{1}{8}$ andre Ang.)
Spaniſcher F.	=	125,3
Rom, Palmo	=	99,0.

Damit wollen wir dies Verzeichniß der Längeneinheitsmaße ſchließen.

---

*) Nach der Decimal-Eintheilung iſt ferner:
1 Decimètre = $^1/_{10}$ Mètre, 1 Centimètre = $^1/_{100}$ Mètre,
1 Millimètre = $^1/_{1000}$ Mètre u. ſ. w.
Umgekehrt:
1 Dekamètre = 10 Mètres, 1 Hektomètre = 100 Mètres,
1 Kylomètre = 1000 Mètres, 1 Myriamètre = 10000 Mètres u. ſ. w.

Man kann hieraus schon ersehen, wie abweichend und verschieden Laune und Zufall dieselben gestellt hat, und wie unbequem und unsicher die Reduction gegebener Distanzen und Flächen von einem Maß auf ein andres seyn müsse, da die Verhältnißzahlen unter sich irrational sind. Selbst einzelne Districte und Städte eines und desselben Landes haben oft ihre verschiedenen Maße. Ein vollständigeres Verzeichniß dieser bunten Maßverhältnisse findet man in mehreren Logarithmentafeln, z. B. in den kleinern, in 2 Bänden, von Vega herausgegebenen.

Aus den Fußmaßen werden, wie bekannt, die Ruthen zusammengesetzt; doch ist auch diese Zusammensetzung nicht überall gleich. So besteht z. B. 1 Rheinl. Ruthe aus 12 Rheinl. Fuß (oder = 10 Decimal-Fuß), die Engl. Ruthe aus $16\frac{1}{2}$ Engl. F., die Brandenburgische aus 15 F., die Sächsische aus $15\frac{1}{7}$ F. u. s. w.

Kennt man die Verhältnißzahl zweier Längen- (Fuß-) Maße sehr genau, so ist es immer leicht, eine Länge, in einem Maße gegeben, auf eine Länge zu reduciren, im andern Maß ausgedrückt. Eine nähere Erläuterung dessen durch Beispiele gehört, als ganz elementarisch, nicht hieher; eben so wenig die Darstellung der mannichfaltigen Flächen- und Meilen-Maße, wozu man besondere Tabellen haben muß.

Zu geometrischem und geodätischem Gebrauch sind die Unterabtheilungen der Füße in Zolle, Linien nach dem Decimalsystem unstreitig die besten. Die Franzosen haben dies Decimalsystem auf alle Theilungen, selbst die der Kreisbogen ausgedehnt; man ist aber in andern Ländern, selbst in solchen, wo man gern nachahmt, ihrem Beispiel nicht ganz gefolgt und zwar aus vernünftigen Gründen.

§. 56.

Meßtisch. (Mensula, Planchette).

Zum Aufnehmen kleinern Strecken der Erdoberfläche (von mehrern Quadratmeilen), so wie zu Detailaufnahmen ist der Meßtisch, wie wir in der folgenden Abtheilung sehen werden, wirklich ein äußerst brauchbares und bequemes Instrument; dies wird von allen vorurtheilsfreien Kennern der praktischen Geometrie einstimmig zugegeben. Die Form und Structur des einfachen Meßtisches ist so allgemein bekannt, daß es, davon ausführlich zu sprechen, unnöthig scheint. Da indessen von der Zeit an, wo der Meßtisch erfunden und zuerst gebraucht wurde, bis auf unsere Zeit so vielerlei Urtheile über die beste Bauart desselben gefällt worden sind, so wird es dienlich sein, zu zeigen, worin eigentlich das Beste in dieser Sache bestehe, und welche Forderungen man an einen guten Meßtisch zu machen habe.

1) Ein Meßtisch muß so gebaut sein, daß er die Stellung, die man ihm giebt, durch schnellere Kräfte, z. B. Berührung mit den Händen ꝛc. nicht verliert, und nicht in eine zitternde Bewegung gesetzt werden kann; er muß fest stehen.

2) Die Oberfläche des Zeichentuchs (planchette) muß eine vollkommene Ebene sein, und diese Gestalt durch äußere Einwirkungen, Feuchtigkeit ꝛc. nicht verlieren.

3) Die Oberfläche des Tisches muß sich genau horizontal stellen lassen, und in dieser Stellung eine sanfte Bewegung um die vertikale Axe (Azimuthal-Bewegung) gestatten. Diese gute Eigenschaft geht den meisten Meßtischen ab.

4) Man muß einen Punkt, der auf dem Meßtisch

angenommen oder gefunden worden, ohne viel Schwierigkeit so nahe als möglich über den ihm entsprechenden oder gleichnamigen Punkt auf der Erde (im Felde) senkrecht stellen, einrichten können; so wie auch eine bereits auf dem Plane des Meßtisches gezogene gerade Linie in die Vertikalebene (alignement) der gleichnamigen Linie auf der Erde. Ohne Uebung ist diese Bedingung mit keinem Meßtisch leicht zu erfüllen.

5) Der Meßtisch mit seinem Stativ muß nicht schwerfällig, sondern möglichst leicht und tragbar seyn.

Dies sind die Forderungen, welche so vielerlei, zum Theil sehr gekünstelte unbrauchbare, Abänderungen des Meßtisches zu verschiedenen Zeiten veranlaßt haben. Es wird hier genügen, wenn bloß von den besten eine kurze Anzeige geschieht, und zuletzt zwei Meßtische näher beschrieben werden, die nach meinem Ermessen zum wirklichen Aufnehmen die brauchbarsten und zuverläßigsten sind.

Ein ganz gewöhnlicher leichter Meßtisch, zu kleinern weniger genauen (z. B. flüchtigen militärischen) Aufnahmen ganz brauchbar, kann aus einem ebenen quadratischen Reisbret von wohl getrocknetem Lindenholze bestehen, das 1 Fuß bis 15 Zoll ins Gevierte hält; die Bewegung desselben kann durch eine sogenannte Nuß geschehen, und das Stativ die gewöhnliche Form haben, welche eben nicht die beste ist. Ich setze die Structur dieses einfachen und wenig kostbaren Meßtisches bei meinen Lesern als bekannt voraus.

Berühmt ist der Marinonische Meßtisch. Derselbe ist so eingerichtet, daß er eine Kreisbewegung um die Vertikalachse des Meßtischblattes, und zugleich eine geradlinigte Seitenbewegung in einer Ebene, Verschie-

bung z. B. von Oſt gegen Weſt, in den Nuthen zweier Leiſten geſtattet, wodurch es möglich gemacht werden ſoll, einen beſtimmten Punkt auf dem Plane des Meßtiſches über den ihm correſpondirenden auf dem Felde einzurichten. Er iſt ſchwer, etwas zu ſehr zuſammengeſetzt und daher auch gewöhnlich nicht in Gebrauch; jedoch nach richtigen Grundſätzen angelegt. Der Meßtiſch von dem zu ſeiner Zeit ſehr berühmten Künſtler Brander, welcher vor ihm der geometriſche Univerſalmeßtiſch genannt wurde, iſt eine Verbeſſerung des Marinoniſchen. Die Horizontalſtellung geſchieht durch 3 Fußſchrauben, die grobe und ſanfte Bewegung um die Vertikalachſe durch ein gezahntes Rad und Schraube ohne Ende; die geradlinigte Seitenbewegung wie beim Marinoniſchen. Später brauchte Brander ſtatt der quadratiſchen Form des Meßtiſches die kreisförmige, und fügte einen eingetheilten Kreisbogen zum Meſſen der Horizontalwinkel, und einen vertikalen Halbkreis zum Meſſen der Höhenwinkel bei. Die gute Bewegung an Brander's Meßtiſch abgerechnet, ſind die übrigen Künſteleien entbehrlich; dieſer Meßtiſch hat, wie es mit allen zu ſehr complicirten mathematiſchen Werkzeugen geſchieht, nur eine Zeitlang gelebt, und wird in unſern Zeiten nicht angewendet.

Dem Marinoniſchen und Branderſchen Meßtiſch wurden weiterhin von andern Erfindern noch andere Arten des Meßtiſches mit ſehr unweſentlichen Veränderungen nachgebildet; es iſt überflüſſig, von den vielen vergeblichen Verſuchen, etwas Vollkommenes zu leiſten, hier umſtändlich zu handeln.

Ich will daher ohne Weiteres zwei, zu genauern Operationen geeignete, Arten des Meßtiſches beſchreiben, die jeder unparteiiſche Leſer für die natürlichſten und brauchbarſten mit mir halten wird. Beide haben ihre guten Eigenſchaften und Vorzüge, aber keiner lei-

stet jeder Forderung Gewähr, und jedem geht irgend eine gute Eigenschaft des andern ab, so daß man auch hier inne wird, daß sich alles Gute zusammen auf einen Punkt nicht leicht vereinigen lasse.

A) Meßtisch mit drei Stellschrauben.

(Fig. 21.)

Das Meßtischblatt a ist ins Gevierte ungefähr 18 Rheinl. Dec. Zoll groß, von gut ausgetrocknetem Lindenholz verfertigt, und zwar, damit es sich nicht werfe oder Risse bekomme, aus mehreren Stücken so zusammengeleimt, daß sich die Holzfasernlagen durchkreuzen.

An die untere Fläche des Tischblattes im Mittelpunkt desselben ist eine, etwa 3 Zoll im Durchmesser haltende, messingene Platte durch 3 Schrauben befestigt; mit dieser Platte hängt ein etwa 1 Zoll hoher Cylinder b zusammen, entweder aus einem Stück gegossen oder zusammengelöthet; in der cylinderförmigen Höhlung desselben dreht sich, gut anschließend, ein andrer Cylinder c, welcher sich unten in eine kugelförmige Nuß endigt; der Cylinder b läßt mit dem damit fest verbundenen Meßtisch a um den Cylinder c horizontal bewegen, auch davon abheben; durch eine Seitenschraube d kann man b und c zusammenbefestigen und die Bewegung des Tisches um die Achse von c hemmen.

Die Nuß des etwa 2 Zoll hohen Cylinders c läßt sich in einer etwas stark und eng an sie schließenden Hülse nach verschiedenen Richtungen bewegen; das obere Hülsenstück ist durch Schrauben an den darunter befindlichen starken Cylinder G befestigt; man sieht wohl, daß der Meßtisch a vermöge dieser Einrichtung, wenn

b und c fest verbunden sind, auch verschiedene Seitenbewegungen durch die Nuß in ihrer Hülse zuläßt.

Unterhalb dieser Hülse läuft um den Cylinder G ein starker messigner Ring n, mit 3 Schrauben befestigt; mit diesem hängen, aus einem Stück gegossen, 3 messingne Aerme m, wovon man zwei in der Zeichnung sieht, etwa $3\frac{1}{2}$ Zoll lang, zusammen; durch die Enden derselben gehen 3, gegen 4 Zoll hohe Stellschrauben, h, welche sich so hoch hinaufschrauben lassen, daß ihre Enden an die untere Fläche des Tisches treffen, und denselben in einer gewissen Stellung befestigen, nachdem man zuvor die Cylinder b und c durch die Schraube d eng verbunden oder unbeweglich um einander gemacht hat.

Der Cylinder G ist inwendig hohl bis unterhalb der Nußhülse, und in diese Höhlung läßt sich das obere genau anschließende, cylinderförmige Stück des hölzernen Stativs einschieben Vermittelst eines starken, durch den messingenen und hölzernen Cylinder, die in der Richtung ihres Durchmessers durchbohrt sind, durchzusteckenden messingenen Stiftes k lassen sich beide so genau zusammenverbinden, daß keine Bewegung oder Wackeln des Meßtisches auf dem hölzernen Cylinder des Stativs möglich ist.

Das Stativ ist entweder nach der alten oder noch besser nach der neuern verbesserten Art, eingerichtet. Nach der alten sehr bekannten Art endigt sich der obere runde Fuß des Stativs in ein dreiseitiges prismatisches Stück, an dessen drei Seiten durch metallene Schrauben und Schraubenmuttern, senkrecht auf die Achse des Fußes, drei lange hölzerne Füße angeschraubt und nach Belieben befestigt werden können; diese Füße bewegen sich nahe parallel mit der Achse. Gegen diese Construction des Stativs läßt sich sagen, daß sie dem Meßtisch eben nicht den festesten Stand gewähre, daß bei

einem mäßigen Druck von oben herab der Tisch wegen des Standes und der Elasticität der Füße (sie müßten denn unmäßig dick und massiv seyn) eine kleine Horizontalbewegung um die Achse des Fußes bekommen könne. Ist indessen ein solcher Druck nicht stark, und sind die drei hölzernen, nicht allzu dünnen, Füße nur weit genug aus einander und fest genug in den Boden des aufzunehmenden Terrains eingesetzt, so ist nach meiner Erfahrung von dieser Achsendrehung sehr wenig oder gar nichts zu besorgen.

Aus dieser kurzen Beschreibung, welcher, wie jeder Beschreibung eines etwas zusammengesetzten Werkzeuges, die eigne Phantasie des Lesers nothwendig mit zu Hülfe kommen muß, ersieht man, daß die Stellung des Meßtisches von dreierlei Bewegungen des ganzen Apparates abhänge, nehmlich von der Bewegung der Füße vom Stativ, von der Bewegung des Cylinders c durch die Nuß in ihrer Hülse, endlich von der Achsendrehung des Cylinders b und des damit in Eins verbundenen Tisches um den Cylinder c, wenn die Schraube d gelüftet wird.

In der beschriebenen Weise habe ich mir selbst einen Meßtisch von etwas starker dauerhafter Bauart anfertigen lassen, und gegen 24 Rthlr. dafür bezahlt. Er ist, mit einiger Uebung, zu genauen Detailaufnahmen ungemein brauchbar. Einen, diesem ganz ähnlichen, nur in einigen wenig wesentlichen Stücken abweichenden, Meßtisch hat schon der verdienstvolle Geometer Mayer in seinem Werke: Unterricht zur practischen Geometrie im 1sten Theile §. 108. beschrieben. Nach Mayer's Angabe ist vieles von Holz, was bei meinem Tisch der Festigkeit halber von Messing ist, z. B. der Ring und seine Füße o, so wie auch die Stellschrauben h, u. s. w. Ein Jeder, der sich einen Meßtisch der Art will machen lassen, muß

hierin seiner Einsicht und seinen ökonomischen Rücksichten folgen.

Der feste horizontale Stand des Meßtisches a wird, nachdem dies durch schickliche Bewegung des Stativs und des Cylinders c mit seiner Nuß schon vorläufig annähernd geschehen, zuletzt durch feine Bewegungen der Stellschrauben h erlangt. Der wahre horizontale Stand der obern genauen Ebene des Tischblattes wird geprüft durch eine kleine am besten dosenförmige Libelle (Wasserwaage); von der Libelle wird weiterhin das Nöthige gelehrt.

Der Meßtisch, von dem hier die Rede ist, hat eine sehr gute Vorrichtung zum Horizontalstellen des Tischblattes und zur Drehung desselben um eine Vertikalachse. Hingegen fehlen ihm die von Marinoni und Brander gegebenen Vorrichtungen, um einen Punkt oder eine Linie auf dem Meßtisch über einen gleichnamigen Punkt oder eine gleichnamige Linie auf dem Felde zu orientiren. Auch geht ihm eine gute Eigenschaft des Meßtisches, mit Schraube ohne Ende, ab, welchen ich nach diesem beschreibe. Hat nehmlich der Meßtisch a einen festen horizontalen Stand bekommen, und soll er nun so, ohne diese horizontale Lage zu verändern, um seine vertikale Mittelpunktsachse gedreht werden, so muß man die Stellschrauben h, welche ihn festhalten, zurückdrehen, die Schraube d lüften, und nun den Tisch mit seinem Cylinder b um den Cylinder c herumdrehen; da aber bei dieser Drehung der Cylinder c eine kleine Seitenbewegung nach unten machen kann, wenn seine Nuß sich in ihrer Hülse, obgleich nur schwer, drehen läßt; so kann bei jener Azimuthalbewegung der Meßtisch etwas von seiner horizontalen Lage verlieren, welches durch die Libelle angezeigt wird; man muß in diesem Falle nach geschehener Azimuthalbewegung den Fehler im horizontalen Stande, welcher

bei gehöriger Vorsicht insgemein nur gering ist, vermittelst der Stellschrauben verbessern.

B) Meßtisch mit Schraube ohne Ende, ohne Stellschrauben. (Fig. 22.)

a ist ein quadratförmiges Meßtischblatt von 18 bis 24 Zoll ins Gevierte; an seine untere Fläche ist durch versenkte Schrauben eine etwas dicke messingene Platte b befestigt; an diese kann eine andre messingene Platte c genau angelegt und durch Schrauben d befestigt werden; doch kann man den Meßtisch auch, wenn man nicht damit operirt, von der Scheibe c abnehmen.

Mit dieser Platte c ist in Eins verbunden ein messingener Cylinder z, der sich unten in eine gezahnte starke Scheibe r endet. Die oben ebene Scheibe m und der starke, inwendig hohle Cylinder N bilden ein zweites zusammenhängendes Stück von Messing; die gezahnte Scheibe r ist mit ihrer Achse p, welche durch m hindurch in den hohlen Cylinder N geht, und hier durch eine Gegenschraube g angezogen wird, auf der Ebene des Stückes m beweglich, und zwar müssen beide Ebenen von r und m vermöge der untern Gegenschraube g genau an einander liegen bleiben, wenn der Meßtisch um die sehr genau einschließende Achse (Hülse) p gedreht wird.

s ist eine sogenannte Schraube ohne Ende, welche durch einen besondern Schlüssel umgedreht werden kann. Durch eine andre Schraube k kann die Schraube ohne Ende s so weit vorgerückt werden, daß sie in die gezahnte Scheibe r eingreift; durch das Zurückdrehen der Schraube k kann aber auch die Schraube ohne Ende von der gezahnten Scheibe so weit entfernt werden, daß beide nicht mehr in

einander eingreifen. Im letztern Falle kann, wie man leicht erkennt, der Meßtisch um die Achse der Hülse p schnell, doch sanft, bewegt werden; greift aber die Schraube s in die gezahnte Scheibe r ein, so geschieht die Achsendrehung (Azimuthalbewegung) des Meßtisches nur vermittelst der Umdrehung der Schraube ohne Ende, und zwar ist diese Bewegung sehr langsam, wie bei andern Mikrometerbewegungen durch Schrauben. Man kann demnach den horizontal gestellten Meßtisch erst durch eine grobe oder schnelle und zuletzt durch eine langsame feine Bewegung nach einer bestimmten Azimuthallinie orientiren. Ist das Instrument geometrisch genau gearbeitet, welches besonders von den genau zusammenliegenden Ebenen der Stücke r und m und der gut schließenden Achse p gilt, und steht der Cylinder N mit den damit verbundenen Theilen fest auf seinen Füßen; so muß bei der Umdrehung des horizontal gestellten Tisches a um seine Achse p durchaus keine Veränderung in der horizontalen Lage desselben mit einer gewöhlichen guten Dosenlibelle zu bemerken seyn. Mit einer sehr empfindlichen langen Röhrenlibelle, welche Neigungen gegen den Horizont bis auf einige Sekunden anzeigt, möchte dieser Meßtisch indessen wohl die Prüfung nicht bestehen. Durch die Schraube k kann man die Schraube ohne Ende so stark gegen die gezahnte Scheibe r andrücken, daß der Meßtisch eine feste Stellung behält, nehmlich nicht durch die äußern Bewegungen beim Aufnehmen um seine Achse p gedreht werden kann.

An den Cylinder N sind drei messingene flügelförmige starke Charniere (Backen) f befestigt, und an diese können durch Schrauben und Schraubmuttern drei hölzerne Füße so angesetzt werden, daß sich dieselben von und nach der Achse, oder wie man auch sagen kann, in der Ebene der Achse vom Cylinder N bewegen lassen. Diese

neuere Einrichtung des Stativs ist sicherlich besser, als die ältere, bei welcher sich die Füße nicht in der Ebene der Cylinderachse, sondern in einer außerhalb liegenden zu dieser nahe parallelen Ebene bewegen, wie beim Meßtisch A) bemerkt worden. Diese neuere Construction des Stativs verschafft dem Meßtisch einen festern Stand als die ältere; auch ist hier keine Achsendrehung desselben bei einem mäßigen Druck von oben so leicht zu besorgen.

Der hier beschriebene Meßtisch hat, wie man sieht, eine sehr gute Vorrichtung zur Azimuthalbewegung des horizontal gestellten Meßtisches, und übertrifft darin den vorher angezeigten Meßtisch A).

Dagegen geht ihm aber eine andre gute Vorrichtung dieses letztern, nehmlich die zum genauen Horizontalstellen, ab. Man kann nehmlich den Meßtisch B) bloß durch Verrückung seiner Füße horizontal stellen, welches seine Schwierigkeiten hat, und ebenfalls Uebung verlangt. Nach vergleichenden Versuchen mit beiderlei Meßtischen A) und B) kann ich indessen versichern, daß die zweite Art B) zum praktischen Gebrauch der erstern A) in Ganzem vorzuziehen ist. Ich habe mir auch einen Meßtisch nach dieser Bauart anfertigen lassen, und dafür 26 Rthlr. bezahlt, also nur 2 Rthlr. mehr, als für den Meßtisch A). So viel mehr ist eine Verbesserung schon werth, und ich rathe meinen Lesern, die eines Meßtisches einmahl benöthigt seyn sollten, ihre Wahl lieber auf das Bessere fallen zu lassen.

Die Structur dieses Meßtisches B) ist übrigens, wesentlich betrachtet, durchaus nicht neu, wie mehrere Unkundige dafür halten; denn die Schraube ohne Ende gebrauchte schon der geschickte Brander, und die Horizontalstellung durch Verrückung der Füße geschah schon durch Marinoni u. a. m. Der Lehmannische, wie er jetzt von Vielen, auch hier zu Lande, benannt wird,

kann also der letztbeschriebene Meßtisch B) nur in so fern heißen, als der sonst verdienstvolle, im Aufnehmen und Entwerfen der Situationspläne sehr ausgezeichnete Lehmann, diese Art des Meßtisches selbst immer gebraucht, beim Publikum in vorzügliche Achtung und Aufnahme gebracht, und seine Anwendung bei militärischen und topographischen Vermessungen nachdrücklich und belehrend durch That und Schrift empfohlen hat. Man sehe

Die Lehre der Situations-Zeichnung ꝛc. von Lehmann, königl. Sächs. Major, Plankammer-Director ꝛc., in 2 kleinen Theilen, in 4. Mit 17 großen Kupfertafeln. Dresden. (Der zweite Theil handelt insbesondere vom zweckmäßigen Gebrauch des Meßtisches; mit originellen guten Ideen des Verfassers. — Das Werk wird durch die Kupfer zu sehr vertheuert.)

So wie bei vollkommeneren Kreisinstrumenten, die zu sehr genauen Winkelmessungen dienen, noch ein besonderes Versicherungsfernrohr angebracht ist, so versehe ich auch meine Meßtische mit zwei kleinen Versicherungsdioptern, um während der Operation, dem Ziehen der Visirlinien ꝛc. mich von Zeit zu Zeit vom unverrückten Stand des Meßtisches zu überzeugen, worauf so viel ankommt. Ein solches Versicherungsdiopter v (Fig. 22.) besteht aus einem rechtwinklicht viereckigem Stückchen Messingblech, etwa $\frac{3}{4}$ Zoll hoch und etwas weniger breit, in der Mitte kreisförmig ausgeschnitten; zwei Pferdehaare, auf gewöhnliche Weise eingespannt, durchkreuzen einander rechtwinklicht im Mittelpunkt des runden Ausschnitts. Zwei solche Dioptern sind an den entgegengesetzten Enden eines Seitenrandes der untern Tischfläche senkrecht und parallel zu einander, angeschraubt. Hat nun der Meßtisch einen gewissen Stand erhalten, so visirt man in der Richtung

der Kreuzdurchschnitte der Haare nach irgend einem wirklich vorhandenen Object oder deshalb ausgestecktem Signal. Bleibt während der Arbeit auf dem Papier der obern Tischfläche diese Visirlinie nach dem angenommenen Zielpunkt unverändert, so ist man von dem unverrückten Stand des Tisches versichert u. s. w.

§. 57.

Dioptерlineal. (Visirlineal.)

A) Mit gemeinen Dioptern.

Die Einrichtung des gewöhnlichen Diopterlineals ist selbst jedem Anfänger bekannt. Das Lineal von Messing muß sehr genau gearbeitet und kann 15 bis 18 Zoll lang seyn; die an beiden Enden desselben durch Charniere auf und nieder beweglichen Dioptern müssen so gearbeitet und gestellt seyn, daß die Absehelinie (Visirlinie) durch die beiden Dioptern an allen Stellen in einer auf die Schärfe des Lineals, nach welcher die Visirlinien gezogen werden, senkrechten Ebene liegen, oder daß eine Ebene, durch die Spalte des einen Diopters und den Faden (Haar) des gegenüberstehenden Diopters gelegt, mit der auf das Lineal senkrechten, durch die Schärfe derselben gelegten, Ebene genau zusammenfällt. Die Construction, nach welcher die Ebene durch beide Diopter verlängert, durch die Mitte des Lineals geht, muß in jedem Betracht verworfen werden *), weil man hier beim Ziehen der Linien längs dem Rande

*) Bugge in seiner Anleitung zum Feldmessen nimmt sie als zulässig an, indem sie nur geringe Fehler in den Winkeln veranlasse.

des Lineals nicht die wahren auf den Horizont projicirten Sehelinien (Collimationslinien) erhält. Auf die obere Fläche des langen Lineals können noch ein oder zwei verschiedene verjüngte Maßstäbe eingestochen seyn. Lehmann hat sein Diopterlineal so eingerichtet, daß das eine Diopter auch auf die halbe Entfernung vom andern durch Aufschrauben gestellt werden kann, und auf dem Objectivdiopter mit dem halben Abstande ein tausendtheiliger Maßstab und ein Tangentenmaß bis 45° der Erhöhungswinkel sich eingeschnitten befindet, an welchem ein horizontaler Schieber auf und nieder geschoben werden kann. Man kann diese Einrichtung entbehren. Die beste Prüfung des senkrechten Standes der Diopterebene auf die Ebene des Lineals, worauf so sehr viel ankommt, besteht auf jeden Fall darin, daß man auf einen genau horizontal gestellten Meßtisch das Diopterlineal aufsetzt, und die Diopterebene nun gegen eine senkrechte Linie, welche man durch den straffen Faden eines aufgehängten Pendels vorstellen kann, richtet; geht nun die Ebene genau durch die senkrechte Linie des Pendelfadens, so ist das Lineal brauchbar, im entgegengesetzten Falle muß es von einem geschickten Mechanikus berichtigt werden; man muß sich hier auch nicht die geringsten bemerkbaren Fehler gestatten wollen.

Dieses gemeine Diopterlineal ist nur auf kleinere Distanzen für scharf- und weitsichtige Augen brauchbar. Für größere Entfernungen muß dasselbe statt der gewöhnlichen Dioptern ein Fernrohr haben.

B) Diopterlineal mit Fernrohr.

Hier ist in der Mitte des messingnen Lineals eine kleine messingene Säule errichtet, welche ein gutes achromatisches Fernrohr trägt, das, nach Art einer Kippregel bei Winkelmessern, in einer auf die Fläche des Li-

neals senkrechten Ebene auf und niederbewegt werden kann. Das Fernrohr kann gegen 9 bis 12 Zoll lang seyn; durch dasselbe erhält man nicht bloß Vergrößerung sondern auch größere Deutlichkeit entfernter Objecte. Zwischen dem Ocular- und Objectiv-Glas sind im Brennpunkt (Focus) des Augenglases zwei zarte Fäden ausgespannt, die sich in der Sehachse des Fernrohrs rechtwinklicht durchkreuzen (Fadenkreuz). Die Sehachse, welche beim Visiren nach einem entfernten Object mit der Visirlinie (Collimationslinie) zusammenfällt, muß mit dem Rande des Lineals, längs dem die auf den Horizont projicirten Sehstrahlen gezogen werden, in eine auf das Lineal vertikale Ebene zusammenfallen; weil sonst, wenn die Vertikalebene dieser Achse etwa durch die Mitte des Lineals ginge, immer kleine Fehler und Correctionen der aufgetragenen Winkel unvermeidlich wären. Manche haben auch noch einen eigenen getheilten Halbkreis hierbei angebracht, um dessen Centrum sich das Fernrohr bei seiner Bewegung in der Vertikalebene dreht, damit beim Visiren nach Gegenständen, die über oder unter dem Horizont des Meßtisches liegen, neben der horizontalen (orthogonalen) Projection der Visirstrahlen zugleich mit mehr oder weniger Genauigkeit die Erhöhungs- und Tiefen-Winkel (Elevations- und Depressions-Winkel), welchen entfernte Objecte gegen den Standort des Beobachters machen, mit erhalten werden können. Ist ein solches Diopterlineal mit Kippregel von einem geschickten Optikus (denn ein gemeiner Mechanikus kann dergleichen nicht vollkommen darstellen) sehr genau ausgeführt, so hat es für die Detailaufnahmen und kleinere Triangulirung einen sehr großen Werth. Mayer in seiner practischen Geometrie sagt, daß man, um die Kosten zu mäßigen, die Röhren des Fernrohrs von Holz könne machen lassen. Ich rathe jedoch nicht dazu, weil sich Holz leicht wirft,

und dadurch Fehler entstehen. Wer wollte nicht gern ein paar Thaler mehr für das Vollkommenere ausgeben, wenn es ein sehr wichtiges geometrisches Werkzeug gilt.

§. 58.

Declinatorium oder Orientirbouſſole.

Damit wird hier nicht die größere Bouſſole mit Alhidade und Dioptern gemeint, mit welcher in der niedern Feldmeßkunſt Winkel im Felde gemeſſen werden, ſondern eine kleinere Vorrichtung, bloß dazu dienend, die Richtung einer Linie auf dem Felde gegen die magnetiſche und dadurch auch gegen die wahre Mittagslinie nur annähernd zu beſtimmen, ſo wie dazu, um bei kleinern Aufnahmen den Meßtiſch gegen Linien im Felde gehörig zu orientiren, wie wir weiterhin ſehen werden. Faſt alle neuern Schriftſteller der Vermeſſungskunde eifern gegen den Gebrauch der Bouſſole, als eines höchſt unvollkommenen Hülfsmittels. Meine Meinung iſt dies auch, wenn es die Winkelmeſſung durch die Bouſſole gilt; allein zur annähernd richtigen Orientirung des Meßtiſches und der darauf gezogenen Linien ſcheint mir die Magnetnadel dennoch ein ſehr nützliches phyſikaliſches Werkzeug.

Die kleine Orientirbouſſole (Declinatorium), welche in der erwähnten Abſicht mit dem Meßtiſch in Verbindung geſetzt werden kann, iſt ihrer Form und Einrichtung nach ſehr bekannt. Das Käſtchen, in welchem eine gut gearbeitete etwa 4 bis 5 Zoll lange Magnetnadel mit ſeinem Agathütchen, auf einer ſcharfen Stahlſpitze, ſich leicht und frei bewegen kann, pflegt die Form eines länglichten Rectangels, etwa 6 Zoll lang und 4 Zoll breit, zu haben. Die Richtung der Ma-

gnetnagel, magnetiſche Meridian, iſt auf dem Boden des Käſtchens, durch den Mittelpunkt des Stiftes gezogen und an beiden Enden mit Nord — Süd bezeichnet. Es iſt gut, wenn die beiden langen Seitenränder des Käſtchens mit dieſer Linie Nord — Süd ſehr genau parallel gehen, damit man an ihnen auf dem Meßtiſch die Richtungslinien, die das Declinatorium anzeigt, ziehen kann. Auch können durch die Punkte Nord und Süd zwei in Grade und halbe Grade getheilte Kreisbogen laufen, um in gewiſſen Fällen die Neigung einer Linie auf dem Felde gegen den magnetiſchen Meridian in Graden zu erhalten; außer der Linie des magnetiſchen Meridians iſt auch wohl noch eine zweite gezogen, die den wahren aſtronomiſchen Meridian annähernd vorſtellt; denn auf eine völlige Genauigkeit darf man bei einem ſo unvollkommenen Inſtrumint nicht rechnen. Zur Ziehung des wahren Meridians in der Orientirbouſſole muß man wiſſen, um wie viel Grade an einem beſtimmten Orte die Magnetnadel mit ihren Polen von den wahren Polen abweicht. Dieſe Abweichung (Declination) iſt ſelbſt etwas veränderlich; durch nahe liegendes Eiſen wird übrigens die Richtung der Nadel geſtört, daher auch zum Käſtchen ganz reines eiſenfreies Meſſing gebraucht, und beim Gebrauch die Nähe von größern und kleinern Eiſenmaſſen vermieden werden muß. Wegen dieſer Veränderlichkeit und Unſicherheit in der Richtung der Magnetnadel bleibt dieſelbe gewiß immer eines der unvollkommenſten Werkzeuge der niedern Vermeſſung.

§. 59.

Dioptérkreuz (l'Equerre d'Arpenteur.) (Engl. Surveying cross.)

Dieſes ſehr einfache Werkzeug wird gegenwärtig

nur noch von Feldmessern gebraucht, zum Abstecken von rechten Winkeln und Senkrechten im Felde, zu Aufnahmen von sehr geringem Umfange. Man denke sich zwei gerade Linien, die einander genau senkrecht durchschneiden, als Alhidaden zweier Lineale, an beiden Enden jeder Alhidade zwei Dioptern, wie sie sich an gewöhnlichen Diopterlinealen finden, so angebracht, daß die Diopternebenen und die Alhidaden zusammenfallen, so hat man einen hinlänglichen Begriff vom Feldmesserkreuz. Sein Stativ ist gewöhnlich ein einfacher starker Fuß, unten mit einer eisernen Spitze versehen, zum Einstecken in den Boden.

Um sich von der rechtwinklichten Stellung der senkrechten Diopternebenen zu versichern, visirt man durch zwei gegenüberstehende Dioptern nach einem entfernten Gegenstand und bei unveränderter Stellung des Kreuzes nach einem andern wirklich vorhandenen Object oder ausgesteckten Signal; dann dreht man horizontal das Kreuz so weit herum, daß man durch das zweite Diopternpaar den ersten Gegenstand sieht, erscheint nun in dieser Stellung auch das zweite Object (Signal) in der Visirlinie des ersten Diopternpaars, so sind die vier Dioptern in der richtigen Lage gegen einander.

Kein gewöhnlich gebräuchliches Diopterkreuz läßt sich rectificiren; es wäre aber ein Leichtes, es dazu einzurichten. Insgemein wird das Kreuz zu kleinen Nebenmessungen, zur Bestimmung krummliniger Grenzlinien durch eine Abscissenlinie und senkrechte Ordinaten gebraucht.

Das Abstecken rechter Winkel und senkrechter Linien auf eine bestimmte Abscissenlinie könnte man auch mit dem Meßtisch und dem Diopterlineal bewerkstelligen, so wie durch Winkelmesser mit Spiegeln, wovon weiter unten gehandelt wird. Ein besondres Spiegelinstrument zu dieser Absicht, vorzüglicher als das ge-

meine Feldmesserkreuz, aber auch kostbarer, hat der ältere Adams in London angegeben; es ist in Adams (des jüngern) Schrift: Geometr. und graphische Versuche, übersetzt von Geißler ꝛc. S. 237 beschrieben. Dieses von Adams unter dem Namen optical square (optischer Winkel) angegebene Instrument läßt sich entbehren, wenn man ein andres Spiegelinstrument, einen Sextanten oder einen reflectirenden Halbkreis hat. Noch andere keine Werkzeuge zu der obenerwähnten Absicht bedürfen hier keiner Erwähnung.

Winkelmesser mit eingetheilten Vollkreisen oder Bogentheilen desselben.

§. 60.

Verschiedene Arten der Gradeintheilung.

Die Theilung der ganzen Kreisperipherie in 360 Theile oder Grade ist uralt, und man weis nicht, wer sie zuerst eingeführt hat. Man theilte in den ältesten Zeiten das Jahr in 360 Tage und die Sonnenbahn in 360 Theile, daher wahrscheinlich die Theilung des Kreises in 360 Grade. Die Theilung des Grades in 60 Minuten, der Minute in 60 Sekunden u. s. w. ist bekannt. Man nennt daher diese Kreistheilung die Sexagesimal-Theilung; sie ist bis auf den heutigen Tag noch die fast allgemein gebräuchliche, und die Eintheilung unserer Winkelmesser derselben gemäß.

Außer dieser uralten Gradeintheilung des Kreises, die in allen cultivirten Ländern, Frankreich ausgenommen, bis jetzt in Ehren gehalten und beibehalten worden, ist noch zu bemerken.

a) Die Eintheilung des Kreisquadranten in 96 Grade, also die des Vollkreises in 384 Grade, welche man an manchen astronomischen Winkelmessern, z. B. den Mauerquadranten, zugleich neben der gewöhnlichen alten Theilung findet; beiderlei Theilungen an zwei concentrischen Kreisen sind hier sehr nützlich zur gegenseitigen Prüfung, ingleichen zu genauerer Winkelbestimmung. Die Reduction eines gemessenen Winkels nach einer Theilungsart auf einen Winkel nach der zweiten Theilungsart, dem Verhältniß 96 : 90 gemäß, hat keine Schwierigkeit. Der Grund zu dieser 96 Theilung ist dieser: der Quadrant läßt sich mittelst des Kreishalbmessers in 3 Theile, und durch 5 fortgesetzte Halbirungen in 96 Theile geometrisch theilen; die 90 Theilung hingegen kann nicht ganz geometrisch, sondern muß zum Theil versuchsweise ausgeführt werden.

b) Die Eintheilung des Quadranten in 100 Grade, also die des Vollkreises in 400 Grade, welche in Frankreich, dem in den Zeiten der Revolution von den dortigen Mathematikern vorgeschlagenen und durchgesetzten Decimalsystem zu Folge, jetzt im Gebrauch ist. Ein Grad ist nach diesem System gleich 100 Minuten, eine Minute gleich 100 Sekunden u. s. w. Diese Eintheilung des Kreises heißt die Centesimaltheilung. Ein Deutscher Mathematiker muß sie kennen, wenn er die neuern zum Theil ganz vortrefflichen Werke der französischen Mathematiker, z. B. eines Laplace u. a. m. verstehen will. Die Reduction der nach dem Centesimalsystem angegebenen Winkel auf Winkel nach dem alten Sexagesimalsystem ist leichter, als es Anfängern scheinen mag. Solchen will ich hier einen bequemen Gang dieser Reduction anzeigen: . . . .

Der Quadrant ist

= 100 degrés nach der Centesimaltheilung
= 90 Grad = = alten Theilung.

Also sind 100 degrés = 90 Grad, also 1 degré = $\frac{9}{10}$ Grad.

Subtrahirt man also von der Zahl der degrés $\frac{1}{10}$, welches leicht geschieht, so erhält man die entsprechende Zahl der Grade nach der alten Abtheilung in ganzen Graden, oder in ganzen Graden mit einem angehängten Decimalbruch, der nun weiter in Minuten und Sekunden durch ein fortgesetztes Multipliciren mit 60 verwandelt wird. Folgendes Beispiel wird diese Operation deutlich machen:

Gesetzt, es sollen $101{,}6695^0 = 101^0\,66'\,95''$ nach dem Centesimalsystem in Grade, Minuten u. s. w. nach dem alten Sexagesimalsystem verwandelt (reducirt) werden, so ist:

$101^0\,66'\,95'' = 101{,}6695^0$
subtr. $\frac{1}{10} = -10{,}16695$

Also $91{,}50255^0$ Grad $= 101^0\,66'\,95''$ degrés.

Ferner ist der Decimalbruch $0{,}50255$ Gr. $= \frac{50255}{100000}$ Gr.

$$= \frac{50255 \cdot 60}{100000} \text{ Min.} = 30{,}153 \text{ Min.}$$

Also sind
$101^0\,66'\,95''$ n. d. Cent.Th. $= 91^0\,30{,}153'$ n. d. Ser.Th.

Sodann ist der Decimalbruch $0{,}153' = \frac{153}{1000} = \frac{153 \cdot 60''}{1000}$

$$= 9{,}18''.$$

Der Decimalbruch $0{,}18'' = \frac{18}{100}'' = \frac{18 \cdot 60'''}{100}$

$$= 9{,}18''.$$

Daher sind $101{,}6695^0$ oder $101^0\,66'\,95''$ n. d. Cent.Th.
$= 91^0\,30'\,9''\,10{,}8'''$ n. d. Ser.Th.

Diese Reduction von der Französischen Centesimal-

theilung auf unsere alte Serageſimaltheilung beſteht alſo, wie man ſieht, kürzlich darin, daß man von der Zahl der degrés centes. erſt $\frac{1}{10}$ ſubtrahirt, ſodann den reſtirenden Decimalbruch mit 60 multiplicirt, um die Minuten unſrer Theilung zu erhalten u. ſ. w.

Der umgekehrte Act, nehmlich die Reduction von der Serageſimaltheilung auf die Centeſimaltheilung ergiebt ſich hieraus ohne eine beſondre Erklärung, z. B. nach der Sex. Th. iſt $38^0 42' = 38,7^0$, wenn man $42'$ mit 60 dividirt

Addirt man von $38,7^0$ $\frac{1}{9} = + 4,3^0$

ſo iſt $38^0 42'$ Sex. Th. $= 43,00^0 = 43^0$ (degrés) Cent. Th.

§. 61.

Einiges über die verſchiedenen Conſtructionen der Winkelmeſſer.

Jeder Winkel, der zwei entfernte Objecte mit dem Ort (Auge) des Beobachters bilden, es ſey ein Horizontalwinkel, ein ſchiefgeneigter oder ein Höhenwinkel, iſt anzuſehen, wie ein Centriwinkel in einem Kreiſe von einem beliebigen Halbmeſſer oder Durchmeſſer; der Mittelpunkt des Kreiſes ſtellt den Scheitel des Winkels am Ort der Beobachtung (Station) vor, die Halbmeſſer aber, die den Centriwinkel einſchließen, bezeichnen die Seheſtrahlen vom Auge des Beobachters nach den entfernten Objecten. Denkt man ſich daher einen Vollkreis oder Halbkreis ꝛc. mit der gewöhnlichen Gradeintheilung, und um den Mittelpunkt des eingetheilten Kreiſes die Alhidade eines Diopternlineals oder Fernrohrs, als Durchmeſſer, beweglich, ſo hat man einen Begriff von den weſentlichen Eigenſchaften eines Winkelmeſſers. Der Kreisbogen deſſelben muß nehmlich

vollkommen eben und geometrisch genau getheilt seyn; die Alhidade, welche den Visirstrahlen entspricht (Siehe Diopterlineal) muß sich genau um den Mittelpunkt des eingetheilten Kreises bewegen, oder der Kreis mit seiner Alhidade darf nicht excentrisch seyn; der Winkelmesser muß nach den verschiedenen Zwecken, wozu er angewendet wird, in eine horizontale oder vertikale oder schiefgeneigte feste Lage gebracht werden können. Dies ist die Theorie, auf welche sich die Construction aller Winkelmesser, selbst des einfachsten, gründet. So einfach aber auch diese Theorie scheint, so schwer hält es, ihr in der wirklichen Ausübung, in Anfertigung mathematischer Instrumente, ganz getreu zu bleiben. Zeuge dessen ist der gewisse Umstand, daß unter zehn Winkelmessern, selbst von sehr geschickten Künstlern, die Englischen nicht ausgenommen, angefertigt, kaum einer gefunden wird, der die erwähnten geometrischen Forderungen durchaus befriedigt, und auch bei der strengsten Prüfung sich ganz fehlerfrei und ohne Tadel zeigt. Alle drei Bedingungen zusammen, nehmlich: daß der Kreisbogen zu einer vollkommenen Ebene gehöre, genau centrirt und getheilt sey, sind schwer zu erfüllen; insbesondere aber ist die genaue Theilung mit Schwierigkeiten verknüpft, deren Bekämpfung in den neuern Zeiten das Nachdenken und den Fleiß sehr genialer, denkender Gelehrter und Künstler viel beschäftigt hat. Ausgezeichnetes Verdienst haben sich um die richtige Theilung geodätischer und astronomischer Instrumente die Engländer Bird, Graham und Ramsden, letzterer namentlich durch die Einrichtung einer sehr sinnreichen Theilmaschine, erworben. Dem Beispiel und den Vorschriften dieser großen Männer sind in der Folge bis auf diese Stunde alle Künstler gefolgt, welche etwas Vorzügliches zu leisten sich beeiferten.

Zur Rubrik des Vorzüglichen können in unserm

Zeitalter, wo die Vermessungskunde und die mathematische Mechanik einen so hohen Grad von Vollkommenheit erreicht haben, nur noch solche Werkzeuge gehören, welche die Winkel bis auf minutissima eines Grades, nehmlich bis auf Minuten oder selbst auf einzelne Sekunden zuverläßig angeben. Da solche Winkelmesser mit einem oder auch mit mehreren Nonien (Verniers) versehen sind, so muß ihre Theilung äußerst genau seyn; denn auch die kleinsten Fehler hierin werden vermittelst der Nonien sogleich entdeckt. Anders verhält es sich aber mit solchen Winkelmessern, die die Winkel nur bis auf halbe oder Viertel-Grade geben, keine Nonien haben, und also geringe Fehler haben können, die nicht in die Augen fallen, und auch beim Gebrauch zu gemeinen Feldmessungen keinen beträchtlichen Nachtheil bringen; dieß ist der Fall mit allen Astrolabien ohne Nonien nach älterer Bauart und mit den gewöhnlichen Boussolen. Bei allen ältern Astrolabien, die ich zu sehen und zu prüfen Gelegenheit hatte, ist der Nonius am Index von den Anfertigern weislich vermieden, ja die Fehler der Theilung an diesen schlecht bestellten Instrumenten sind zum Theil so grob, daß man sie mit einem feinen Stangenzirkel oder wohl gar mit bloßen Augen entdecken kann. Auch noch jetzt scheuen sich solche Mechaniker, welche keine wissenschaftliche Bildung, und keinen vollkommenen Theilapparat, sondern nur gewöhnliche Theilscheiben besitzen, vor den Nonien, und suchen daher die gemeinen Winkelmesser: Boussolen und Astrolabien nach alter Art in Ansehn zu erhalten, oder wenn sie Nonien anbringen, so richten sie die Theilung des Limbus und die correspondirende des Nonius so ein, daß man dadurch die zu messenden Winkel mit weniger Genauigkeit, etwa nur bis auf 5 oder höchstens 2 Minuten erhält, oftmahls selbst dies nur erträglich.

An die Stelle der ältern unvollkommenen Astrolabien mit gemeinen oder Fernrohrdioptern, gewöhnlich nur aus einem eingetheilten Halbkreis bestehend, wodurch ebenfalls die Fehler der Theilung versteckt und bemäntelt werden, sind in den neuern Zeiten die viel vorzüglichern Theodoliten oder Scheibeninstrumente getreten, deren Beschreibung weiter unten folgt.

Die Theodoliten (der Name ist sonderbar und nicht gut etymologisch zu erklären) wurden zuerst in England unter dieser Benennung eingeführt, und waren anfänglich nichts anders als kreisförmige Astrolabien mit Dioptern, aufgerichtet auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte zweier über einander fortlaufender Kreise.

Um das Instrument vermeintlich weiter zu vervollkommnen, setzte man auf die mittlere Scheibe sehr bald noch eine Boussole; so entstand das Instrument, dessen man sich in England noch jetzt zuweilen unter dem Namen, Theodolit mit Dioptern, bedient, und welches auch in Berlin von einigen Arbeitern angefertigt worden ist.

Die erste Vervollkommnung des Instruments rührt wahrscheinlich von Dollond und Adams, sehr genialen geistreichen Künstlern in London, her. Diese setzten auf den obern Kreis ein Fernrohr, welches sich in einer Vertikalebene auf und niederbewegen ließ, wodurch die Reduction der schiefgemessenen Winkel auf den Horizont entbehrlich gemacht wird. Zugleich brachten sie einen Halb- oder Viertel-Kreis an, um dessen Centrum sich das Fernrohr in der Vertikalebene bewegte, um dadurch die Vertikalwinkel (Höhen- oder Elevations-Winkel) zu erhalten.

Der berühmte Ramsden, von dem sich gleichsam eine neue Epoche der höhern mathematischen Mechanik datirt, verbesserte das Theodolit noch dadurch,

daß er das Fernrohr in sogenannte Y's *) (Engl. ausgespr. Ei's) legte, und ein Niveau (Libelle) damit verband, wodurch die Messung der Vertikalwinkel sich zu einer größern Genauigkeit erhob. Zugleich brachte er ein Versicherungsfernrohr (Siehe Versicherungsdiopter beim Meßtisch oben) unter dem Instrument an, wodurch man sich von der unverrückten Lage desselben während der Beobachtung überzeugen könnte. Solches ist ungefähr die Construction des Theodoliten, welcher zu der Roy'schen Vermessung in England gedient hat, und an welchem das obere Fernrohr ungefähr die Aufhängungsweise eines Passage-Instruments erhielt.

Eben diese Vermessung und deren Verbindung mit der französischen Gradmessung dienten aber auch dazu, den ausnehmenden Vortheil repetirender Instrumente, deren Construction eine Erfindung, eine fruchtreiche Idee des großen Deutschen Geometers, Tobias Mayer (des Vaters), war, ins Licht zu setzen. Nehmlich die zwölfzölligen Repetitionskreise, welche man in Frankreich anwandte, gewährten dieselbe Genauigkeit in der Winkelmessung, als das 3ozöllige Instrument von Ramsden, das noch dazu mit zusammengesetzten Mikroskopen einzelne Sekunden ablas.

Nun fing man allgemein an, sich der Repetitionskreise zu bedienen, und sie wurden von der Zeit an sowohl zu genauen geodätischen als auch astronomischen Operationen vorzugsweise angewendet. Herr v. Zach ist, glaube ich, der erste gewesen, der im Jahr 1805 an Englischen Theodoliten eine Einrichtung zum einfa-

*) Y bezeichnet einen Träger (Unterlage) von einer Buchstaben ähnlichen Gestalt.

chen Repetiren der Winkel anbringen ließ, und diese kleinen nur 5zölligen Instrumente mit großem Vortheil zur Vermessung des Eichsfeldes anwandte.

Alle diese Theodoliten hatten indessen noch die große Unbequemlichkeit der gewöhnlichen, wenig festen, Stative mit leichten zusammenzulegenden Füßen, welche das ganz genaue Observiren der Winkel mit den Theodoliten gar sehr erschwerten. So viel mir bekannt ist, verwarf zuerst Reichenbach in München, dessen Werkstätte durch vorzüglich genaue mathematische Instrumente so berühmt geworden, jene Füße, und setzte das ganze Instrument auf einen kurzen metallnen Trépied (Dreifuß), wodurch bei Anwendung gehöriger Unter-Sätze der Kreis ganz außerordentlich an Festigkeit und Sicherheit gewann.

Reichenbach behielt das Versicherungsfernrohr und die Repetitions-Einrichtung, und legte zugleich, ungeachtet der kleinen Dimensionen, das obere Fernrohr in Pfannen nach Art eines Passage-Instruments, so daß diese kleinen Theodoliten fast ganz die Gestalt des ältern Ramsdenschen erhielten, mit dem einzigen aber höchst bedeutenden Zusatz der Repetition.

Diese Theodoliten von Reichenbach geben, bei 8 Zoll Durchmesser, die Winkel bis auf 10 Sek. unmittelbar mit 4 Nonien an, und ich habe keinen in Händen gehabt, der nicht bei der achten Repetition bereits die stehenden Sekunden angezeigt hätte.

Gegenwärtig werden diese Instrumente auch hier in Pistor's Werkstatt, nach derselben Construction und mit einer fast noch größern Genauigkeit der Theilung, wozu die Preußische Regierung durch bedeutende Unterstützung die Mittel gewährt hat, angefertigt. Ich glaube daher, daß wir hier zu Lande für geodätische sowohl als astronomische Instrumente jeder Art, des Auslandes und seiner Künstler fernerhin nicht mehr be-

Leben verloren, so sind sie durch Gottes Gnade wieder zum Leben gekommen, sie sind wieder gesund geworden. Und wie sie sich dessen freuen, so freuen sich auch die Engel im Himmel, wenn ein Sünder Buße tut.

Wir wollen nun sehen, wie Gott die Sünder annimmt, wenn sie Buße tun.

1. Er nimmt sie an, wie ein Vater sein Kind annimmt. Lies Luk. 15, 11—24.

Wie ist es dem verlorenen Sohne ergangen? Er ist in die Fremde gezogen, hat sein Vermögen durchgebracht, ist arm geworden und hat Hunger leiden müssen. Da ist er in sich gegangen, hat seine Sünden bereut und ist zu seinem Vater zurückgekehrt. Wie hat ihn sein Vater aufgenommen? Er ist ihm entgegengelaufen, hat ihn umarmt und geküßt, hat ihm neue Kleider gegeben und ein Freudenfest angestellt. Ebenso nimmt Gott die Sünder an, wenn sie Buße tun. Er vergibt ihnen ihre Sünden und macht sie wieder zu seinen Kindern.

2. Er nimmt sie an, wie ein Richter einen Verbrecher annimmt, der sich selbst anklagt. Lies Luk. 18, 9—14.

Wie ist es dem Pharisäer ergangen? Er hat sich selbst gerühmt und hat sich für einen frommen Menschen gehalten. Wie ist es dem Zöllner ergangen? Er hat sich selbst angeklagt und hat sich für einen Sünder gehalten. Wer ist gerechtfertigt worden? Der Zöllner. Ebenso nimmt Gott die Sünder an, wenn sie Buße tun. Er spricht sie gerecht und macht sie zu seinen Kindern.

3. Er nimmt sie an, wie ein Arzt einen Kranken annimmt. Lies Luk. 5, 31. 32.

Wer ist zu Jesu gekommen? Die Kranken. Wer ist nicht zu Jesu gekommen? Die Gesunden. Wen hat Jesus geheilt? Die Kranken. Wen hat er nicht geheilt? Die Gesunden. Ebenso nimmt Gott die Sünder an, wenn sie Buße tun. Er heilt sie von ihren Sünden und macht sie wieder gesund.

Wir wollen nun sehen, wie Gott die Sünder annimmt, wenn sie Buße tun.

1. Er nimmt sie an, wie ein Vater sein Kind annimmt. Lies Luk. 15, 11—24.

Wie ist es dem verlorenen Sohne ergangen? Er ist in die Fremde gezogen, hat sein Vermögen durchgebracht, ist arm geworden und hat Hunger leiden müssen. Da ist er in sich gegangen, hat seine Sünden bereut und ist zu seinem Vater zurückgekehrt. Wie hat ihn sein Vater aufgenommen? Er ist ihm entgegengelaufen, hat ihn umarmt und geküßt, hat ihm neue Kleider gegeben und ein Freudenfest angestellt. Ebenso nimmt Gott die Sünder an, wenn sie Buße tun. Er vergibt ihnen ihre Sünden und macht sie wieder zu seinen Kindern.

2. Er nimmt sie an, wie ein Richter einen Verbrecher annimmt, der sich selbst anklagt. Lies Luk. 18, 9—14.

Wie ist es dem Pharisäer ergangen? Er hat sich selbst gerühmt und hat sich für einen frommen Menschen gehalten. Wie ist es dem Zöllner ergangen? Er hat sich selbst angeklagt und hat sich für einen Sünder gehalten. Wer ist gerechtfertigt worden? Der Zöllner. Ebenso nimmt Gott die Sünder an, wenn sie Buße tun. Er spricht sie gerecht und macht sie zu seinen Kindern.

3. Er nimmt sie an, wie ein Arzt einen Kranken annimmt. Lies Luk. 5, 31. 32.

Wer ist zu Jesu gekommen? Die Kranken. Wer ist nicht zu Jesu gekommen? Die Gesunden. Wen hat Jesus geheilt? Die Kranken. Wen hat er nicht geheilt? Die Gesunden. Ebenso nimmt Gott die Sünder an, wenn sie Buße tun. Er heilt sie von ihren Sünden und macht sie wieder gesund.

§. 62.

Geometrischer Begriff von der einfachen und doppelten Repetition einer Winkelmessung. (Fig. 23, 24, 25, 26.)

a) Einfache Repetition.

Die Kreise (Fig. 23, 24) mögen den eingetheilten Gradbogen eines Winkelmessers vorstellen, C das Centrum desselben, um welches er sich drehen läßt, oo eine Alhidade mit Fernrohr, die sich um das Centrum des Gradbogens bewegen und an jeder Stelle desselben feststellen läßt; uu sey ein sogenanntes Versicherungs- (Prüfungs-) Fernrohr unter dem Limbus, am Stativ des Winkelmessers angebracht. Wir wollen hier annehmen, die Theilung des Limbus gehe von der Linken zur Rechten.

A und B bedeuten zwei entfernte Objecte, C den Ort der Beobachtung und zugleich den Mittelpunkt des Winkelmessers. Man sucht den Sehewinkel $ACB = x$ oder wie man auch wohl zu sagen pflegt, die Angulardistanz der Oerter A und B.

Dies geschieht also:

1) Das obere Fernrohr (Fig. 23) wird mit seinem Index auf den Anfangspunkt (Nullpunkt) der Kreistheilung gestellt, der Kreis mit seinem Centrum C senkrecht über dem Standort horizontal aufgerichtet, und in dieser Stellung so gedreht, daß das entfernte Object B in der Alhidadenlinie (Collimationslinie) oo des obern Fernrohrs erscheint. Hierbei wollen wir vorläufig annehmen, daß A, B in der Horizontalebene des Kreises liegen. Zugleich richtet man das untere Versiche-

rungs-Fernrohr uu auf einen entfernten scharfbegrenzten Gegenstand R.

2) In dieser Lage wird der Kreis vollkommen befestigt, und nun das obere Fernrohr so weit links herumgedreht, bis seine Alhidadenlinie mit der Visirlinie nach dem zweiten Object A zusammenfällt; sieht man nach dieser Operation durch das untere Versicherungsfernrohr nach den Gegenstand R, so ist man vom unverrückten Stand des Kreises versichert, welcher Umstand bei keiner Winkelmessung außer Acht gelassen werden darf. — Der Bogen oo′, welchen der Inder der obern Alhidade hierbei beschrieben hat, und den man in Graden ablesen kann, — es ist dies bei der Repetition der Winkel nicht durchaus nothwendig, aber zur Vergleichung gegen das Endresultat immer sehr nützlich, — bezeichnet nun, wie man sieht, das Maß des Winkels A C B = x. Dies ist die bekannte einfache Winkelmessung, welche man ähnlicherweise mit allen Winkelmessern bewerkstelligt.

3) Man dreht nun ferner den Kreis mit dem obern Fernrohr, das hierbei seine jetzige Lage o′ o′ gegen denselben nicht verändert, so daß der Inder auf dem Punkte o′ des Limbus unverändert stehen bleibt, horizontal von der Linken zur Rechten so weit herum, bis in der Visirlinie des Fernrohrs C o′ (Fig. 24) jetzt zum zweitenmahl das Object B rechter Hand erscheint. In dieser Lage befestigt man den horizontal gestellten Kreis; in gleicher Absicht wie vorher bleibt das untere Versicherungs-Fernrohr uu auf den entfernten scharfbegrenzten Gegenstand R gerichtet.

4) Die obere Alhidade (Fernrohr) wird wieder herumgedreht, und auf das Object A linker Hand zum zweitenmahl gerichtet; nach dieser Operation

muß das untere Fernrohr noch auf R zeigen, wenn der Kreis bei der Drehung des obern Fernrohrs in unverrückter Lage geblieben ist. Der Bogen o′ o″, welchen der Index der obern Alhidade bei der 2ten Bewegung (Repetition) am Limbus des Kreises beschrieben hat, bezeichnet wiederum das Maß des Winkels ACB = x; folglich ist der Bogen oo″ = 2x. Wenn man also die Gradzahl des Bogens oo″, welchen der Index der obern Alhidade von seinem Anfangspunkt o bis zum Endpunkt o″ der zweiten Operation durchlaufen hat, durch 2 dividirt, so erhält man den einfachen Winkel x = ACB in Graden, Minuten u. s. w.

Auf ganz ähnliche Art und durch ähnliche Bewegungen des Kreises und seiner Alhidade mit Fernrohr kann man ferner, wie jeder Leser ohne weitere Erklärung einsehen wird, den dreifachen Bogen oo‴ = 3x überhaupt durch eine nfache Repetition der ersten Operation den nfachen Winkel ACB oder nx erhalten. Dividirt man nun den nach nRepetitionen erhaltenen Bogen oder Winkel nx durch die Zahl der Wiederholungen n, so bekommt man offenbar den einfachen Winkel x = ACB.

Hierbei müssen wir folgende Erinnerungen wahrnehmen:

Der Anfangspunkt o, von welchem der Index der obern Alhidade zuerst ausgeht, muß nicht nothwendig der Nullpunkt der Limbustheilung seyn; ist es ein anderer Punkt dieser Theilung, z. B. 5 Grad, so muß man dies am Ende in Rechnung bringen; stände nehmlich nach der nten Repetition der Index auf m Grad, so wäre der gesuchte Winkel $x = \frac{m - 5}{n}$ Grad ꝛc.

Es steigt ferner der Index der nten Repetition

Ich habe ihn gesehen, ich habe ihn gehört, ich habe ihn geliebt. Und ich habe ihn geliebt, weil er mich liebte. Weil er mich liebte, ohne mich zu kennen. Weil er mich liebte, ohne mich zu sehen. Weil er mich liebte, ohne mich zu hören. Weil er mich liebte, ohne mich zu lieben.

Ich habe ihn geliebt, weil er mich liebte, ohne mich zu kennen, ohne mich zu sehen, ohne mich zu hören, ohne mich zu lieben

pflegt man wohl zu sagen, der Winkel sey bis auf die stehende Sekunde (oder stehenden Sekunden) gefunden worden. Mit diesem Grad von Genauigkeit kann man bei den meisten auch sehr feinen geodätischen und astronomischen Operationen sich begnügen.

Ein Zeichen, daß man das Maß des Winkels richtig erhalten habe, wird es seyn, wenn man denselben auf die beschriebene Art noch einmahl mißt, und zwar so, daß der Inder der obern Alhidade von einem andern Theilungspunkte des Kreises ausgeht, und nach dieser zweiten Messung derselbe Winkel auf die stehende Sekunde wieder wie vorher erhalten wird. Zeigt sich hierbei ein Unterschied von Theilchen einer Sekunde, so nimmt man von beiden Resultaten das arithmetische Mittel, wodurch man der Wahrheit am nächsten kommt. Hat der Winkelmesser 2 oder 4 Indices mit Nonien, so nimmt man zu noch größerer Sicherheit aus den Endangaben aller Nonien das arithmetische Mittel, und dividirt dasselbe durch die Anzahl der Repetitionen.

Bei der hier gegebenen Erklärung und den zugehörigen Figuren ist angenommen worden, daß die Theilung auf dem Limbus des Winkelmessers von der Linken zur Rechten gehe, welches bei den Repetitionskreisen, die auch zu Messungen der Vertikalwinkel oder Zenithdistanzen angewendet werden, gewöhnlich Statt findet. Wäre umgekehrt, wie an den gemeinen Winkelmessern, die Theilung von der Rechten zur Linken angeordnet, so würde die Repetition einer Winkelmessung auch nach dieser Richtung vorgenommen werden.

Die einfache Repetition auf Winkelmesser wirklich angewendet, ist eine sinnreiche, vorher noch nicht bekannte oder wenigstens noch nicht ausgeführte, Idee des berühmten Astronomen Tobias Mayer, welcher dieselbe in den Göttingischen Commentarien (Comment. Goett. Tom. II.) zuerst bekannt machte. Nach ihm

gen die mit Brevis, in Handschrift und von einigen Druckausgaben mit Circumflex bezeichneten Silben, wie z. B. in Ecclesiastes, Ecclesiasticus, Exodus, Genesis, Hebraeus, Hebraicus, Hebraismus, Hebraizare, Hebrew, Hebrides, Hebron, Hebronites, Hebrus, Hecate, Hecatombe, Hecatompylos, Hecatonchires, Hecatonstylon, Hecatonstylos, Hecatonstylum, Hecatonstylus, Hecatonstylus, Hecatonstylus

verändern dürfen, so weit herum, bis das Object B rechts in der Richtung u u der untern Alhidade erscheint (Fig. 26.); dadurch wird die obere Alhidade um den Bogen o u = x zurückbewegt.

4) Nachdem der Kreis in dieser Lage befestigt worden, so wird die obere Alhidade aus der Lage o o in die Lage o″ o″ herumgedreht, nehmlich so weit, daß das Object A links in der Visirlinie des obern Fernrohrs gesehen wird. Man ist vom unverrückten Stand des Kreises bei dieser Operation versichert, wenn dann das Object B rechts noch in der Visirlinie u u des untern Fernrohrs gesehen wird. Widrigenfalls muß man die nöthige Verbesserung machen. Der Bogen o o″, welchen die obere Alhidade bei diesem letzten Act beschrieben hat, ist offenbar = 2mahl o u = 2 x. Damit ist eine doppelte Repetition des Winkels vollbracht. Man lieset nun die Gradzahl ab, worauf am Ende der mit einem Nonius versehene Index des obern Fernrohrs zeigt, und halbirt dieselbe, so erhält man das Maß des einfachen Winkels x = A C B.

Hierbei ist angenommen worden, daß beide Alhidaden o o und u u sich genau um das Centrum des Kreises drehen (concentrisch). Bei wirklichen Repetitionskreisen ist indessen immer das untere Fernrohr u u etwas excentrisch. Welchen Einfluß dieser Fehler auf den gemessenen Winkel A C B habe, soll weiterhin gezeigt werden.

Eigentlich besteht die doppelte Repetition einer Winkelmessung, wie man sieht, aus zwei Acten; beim ersten steht das obere Fernrohr am Kreise fest, und das untere bewegt sich, beim zweiten Act geschieht das Gegentheil.

Jeder denkende Leser wird ohne weitere Erklärung

begreifen, daß die eben angezeigte Repetition zum zweiten, dritten Mahl u. s. w. wiederholt werden kann. Die Vielfachen des gesuchten Winkels x schreiten hierbei nach dieser Zahlenreihe fort:

$$2x,\ 4x,\ 6x \ldots\ldots 2nx,$$

wenn n die Anzahl der Repetitionen ausdrückt.

Bei der einfachen Repetition hingegen ist diese Reihe:

$$x,\ 2x,\ 3x \ldots\ldots nx.$$

Heißt also der ganze Bogen, welchen der Index des obern Fernrohrs nach n Doppel-Repetitionen (Multiplication) beschrieben, in Graden, Min., Sek. = S, so erhält man

$$\angle x = \frac{S}{2n}.$$

Auch bei dieser Repetition kann der Index die ganze Peripherie des Kreises einmahl oder mehrere Mahle durchlaufen haben, nebst einem Ueberschuß eines kleinern Kreisbogens. Dann wird nach einer ähnlichen Bezeichnung, wie vorher bei der einfachen Repetition:

$$x = \frac{w \cdot 360 + m}{2n}.$$

Zur Versinnlichung der erwähnten einfachen und doppelten Repetition kann man sich leicht ein kleines Modell aus dickem Kartenpapier, nach Anleitung der Fig. 23 — 26, anfertigen.

§. 63.

Vortheile der Repetition einer Winkelmessung.

Dadurch, daß man den feinern Winkelmessern eine besondre Einrichtung zum Repetiren gegeben hat, sind

die genauen Winkelbestimmungen für geodätische und astronomische Arbeiten ungemein befördert und zugleich erleichtert worden. Man richtet jetzt mit einem 8 bis 12zölligen Repetitionskreis eben so viel und noch mehr aus, als früher mit sehr schwerfälligen Sectoren von 9 Fuß im Halbmesser, wie ein solcher, z. B. unter Graham's Leitung angefertigt und von diesem geschickten Künstler selbst getheilt, bei der Gradmessung am Polarkreis von Maupertuis angewendet wurde.

Durch die einfache sowohl als doppelte Repetition wird nicht allein ein Winkel genauer, d. h. mit einer größern Annäherung zu seinem wahren Werth — wir müssen uns bekanntlich bei allen Messungen am Himmel und auf der Erde mit Annäherungen begnügen — gefunden, sondern es werden auch dadurch die Fehler, welche etwa aus der etwas unrichtigen Theilung und Centrirung eines Winkelmessers entspringen können, ganz oder doch großentheils gehoben. Dies einzusehen, hat keine Schwierigkeit.

Ist das Instrument klein, etwa nur von 8 bis 12 Zoll im Durchmesser, so kann vermittelst der Bogentheilung und eines Nonius nach einer einfachen Messung ein Winkel nicht wohl genauer als bis auf 10″ und kaum dies mit Zuversicht erhalten werden. Dadurch aber, daß man das Vielfache eines Bogenmaßes durch die einfache oder doppelte Anzahl der Repetitionen dividirt, kann man das einfache Bogenmaß oder den einfachen Winkel schon genauer auf 1″ oder selbst Theilchen einer Sekunde erlangen; das erhaltene Resultat läßt sich mit dem vergleichen, welches man mit einem Winkelmesser von viel größerm Halbmesser erreichen könnte, dessen Bogen feinere Unterabtheilungen verträgt u. s. w.

Wir wollen annehmen, was mehr oder weniger von den meisten Winkelmessern behauptet werden kann, daß die Theilung des Limbus etwas fehlerhaft sey, so

kann dieser Fehler entweder innerhalb der äußersten Grenzpunkte des ganzen Bogens S liegen, der durch n Repetitionen erhalten worden, oder der Fehler kann das Gradmaß dieses Bogens selbst betreffen. Im ersten Falle geht der Fehler gar nicht auf den einfachen Winkel über, im zweiten Falle wird er um das nfache (oder 2nfache bei der doppelten Repetition) vermindert.

Wenn der ganze Kreis vom Index w mahl durchlaufen worden, und dazu ein überschüßiger Bogen m gekommen ist, so ist nach n einfachen Repetitionen das Maß des gesuchten Winkels

$$x = \frac{w \,.\, 360 + m}{n}$$

Nun leuchtet es ein, daß, wenn dieser Winkel x wegen fehlerhafter Theilung des Instrumentes, womit er gemessen worden, um etwas falsch wäre, dieser Fehler das Stück $w \,.\, 360$, also auch $\frac{w \,.\, 360}{n}$ nicht betreffen kann, sondern nur das Stück m oder $\frac{m}{n}$.

Der Fehler im Bogen m heiße F (Minute oder Sekunden) positiv oder negativ, so ist

$$x = \frac{w \,.\, 360 + m}{n} \pm \frac{F}{n}$$

Je kleiner also F und je größer die Zahl der Repetitionen n ist, desto geringer muß der positive oder negative Fehler im gemeßnen Winkel x werden.

Beispiel: Durch 5 einfache Repetitionen sey ein Winkel (Bogen) $5x = 371^{0}\,17'$ gefunden worden, so ist

$$x = \frac{360^0 + 11^0\,17'}{5} = 72^0 + 2^0\,15'\,24'' =$$

$$74^0\,15'\,24'',$$

Wäre nun der Gradbogen von 0^0 bis $11^0\,17'$ um $1'$ falsch, etwa zu groß, so fände sich der berichtigte Winkel

$$x = 74^0\,15'\,12''.$$

Sonach hätte man den Winkel um $12''$ zu groß gefunden. Der Fehler von $1'$ im Bogen m vermindert sich daher bis auf $\frac{1}{6}'$ bei seinem Einfluß auf den gesuchten Winkel x.

Ein so grober Fehler von 1 Minute kommt jedoch bei keinem bessern Winkelmesser vor, der mittelst einer genauen Theilmaschine getheilt worden ist; selbst Repetitionskreise von 8 Zoll Durchmesser geben mit Nonien die Winkel auf $10''$, und ein Fehler im Winkel kann nur zwischen 10 und 10 Sekunden liegen, oder höchstens $\frac{1}{6}$ einer Minute betragen. Weitere Betrachtungen der Art bleiben dem Leser überlassen.

Der einfachen Repetition bedient man sich insgemein bei Messung von Horizontalwinkeln vermittelst repetirender Theodoliten; hier dient das untere Fernrohr bloß zur Versicherung; daher seine excentrische Lage keinen Nachtheil erzeugt.

Die doppelte Repetition hingegen braucht man zur Messung der Winkel überhaupt in jeder Lage der durch ihre Schenkel gelegten Ebenen, namentlich auch der Vertikalwinkel (Zenithdistanzen), vermittelst der Bordaschen Kreise.

Bei einer aufmerksamen Vergleichung beider Methoden, der ersten ursprünglich von Mayer gelehrten und gebrauchten und der zweiten von Borda ausgeführten, muß man gestehen, daß die zweite zusammengesetzter, verwickelter und eben nicht kürzer sey, und

daneben ein complicirteres kostbareres Instrument verlange, als die erstere. Die einfache Repetition scheint mir daher den Vorzug zu verdienen, wo es die Bestimmung terrestrischer Horizontalwinkel gilt. Nur bei Messung der Zenithdistanzen und der hieraus gefolgerten Höhenwinkel zu astronomischem Gebrauch hat die doppelte Repetition entschiedene Vorzüge, insbesondere darum, weil sie hier den mißlichen Gebrauch eines Horizontes erspart, wie wir in der Folge sehen werden. Dann dient aber das untere Fernrohr bloß als Libellenträger.

§. 64.

Etwas von der Theilung, dem Nonius, und der Genauigkeit eines Winkelmessers.

Es kann, dem Zweck dieser Schrift zufolge, von der Methode, einen Kreisbogen in mehr oder weniger gleiche Theile (Grade) abzutheilen, das Centrum desselben genau zu bestimmen u. s. w. hier nicht gesprochen werden. Bekanntlich werden jetzt die vollkommensten Theilungen mit Hülfe eigner sehr sorgfältig eingerichteter Theilmaschinen nach Ramsden's Construction oder dieser doch sehr ähnlich, bewerkstelligt.

Die Genauigkeit, womit ein Winkelmesser die Winkel angiebt und ablesen läßt, hängt besonders ab von der Richtigkeit der Theilung, von den feinern Unterabtheilungen der einzelnen Grade, von der Vollkommenheit der Nonien (Verniers) und von der Feinheit der Theilstriche.

Je größer der Radius eines Winkelmessers ist, desto feinere Unterabtheilungen der Grade werden möglich. Bei kleinern Instrumenten, von 5 bis 6 Zoll Halbmesser, kann man jeden Grad des Limbus noch

recht gut in 4 bis 6 Theile abtheilen, bei größern in 8 bis 10 u. s. w. *)

Auf die Feinheit der Theilstriche am Limbus kommt ungemein viel an; je mehr sich dieselben der geometrischen Linie nähern, als welche gar keine Dicke hat, desto genauer wird die Bezeichnung und das Ablesen eines Winkels, den der Index der Alhidade anzeigt. Dickere Theilstriche bedecken einen gewissen Theil des Bogens, und machen daher den gesuchten Winkel um eine dem gemäße Winkeldifferenz ungewiß. Der Leser kann sich diese Differenz auf folgende Art leicht erklären:

Der Halbmesser eines Kreises sey r, irgend ein Längenmaß, so ist:

$$r\pi\ ;\ 180^0 = r : 206264,8''.$$

Nehmlich eine Bogenlänge von 206265 Sekunden kann der Länge des dazu gehörigen Halbmessers gleichgesetzt werden. Nimmt man nun an, daß die Dicke eines Theilstriches nach dem Maße des Halbmessers m sey, so ist;

$$r : 206265'' = m : \frac{m}{r} \cdot 206265'',$$

So viel Sekunden des Bogens bedeckt nehmlich der Theilstrich m, und um eben so viel Sekunden wird der abzulesende Winkel ungewiß. Setzt man z. B. den radius des Winkelmessers $r = 5$ Dec.Zoll $= 50$ Dec. Lin., die Dicke eines Theilstriches $m = 0,01$ Lin., so ist:

50 Lin. : $206265'' = 0,01$ Lin. : $41,2''$ sehr nahe.

---

*) Ein 5zölliger (von 5 Dec.Zoll radius) Spiegelsextant, den ich besitze, ist auf seinem silbernen Limbus so getheilt, daß jeder halbe Grad, der beim Sextant ganze Grade vorstellt, wieder drei Unterabtheilungen hat, wovon jede beim Messen 20 Min. bedeutet, im Gradbogen selbst aber nur 10 Minuten beträgt.

Nehmlich in diesem Falle würde ein Theilstrich uf dem getheilten Limbus ungefähr 41″ bedecken. Wäre r = 10 Zoll, so würde derselbe Theilstrich nur $0\frac{1}{2}$ bedecken. Wäre r = 5 Zoll, m = 0,001 Lin., deckte der Theilstrich ungefähr nur 4 Sek. Es ist ber in der Praxis wohl unmöglich, Theilstriche von außerordentlicher Feinheit zu ziehen, und man muß ch schon mit $\frac{1}{100}$ bis höchstens $\frac{5}{1000}$ einer Linie be- nügen. Die Linien auf den Glasmikrometern von Brander sollen nur 0,005 Lin. breit seyn; wie will an aber eine solche Breite zuverlässig — annähernd nn dies auf verschiedene Arten geschehen, besonders rch eine Winkelmessung — bestimmen?

Fragt man umgekehrt, wie breit ein Theilstrich, i einem gegebenen Halbmesser r, seyn müsse, um eine wisse Anzahl Sekunden n im Bogen zu bedecken, so ist

$$206265'' : r = n'' : m, \text{ also } m = \frac{n \cdot r}{206265}$$

Sollte z. B. an einem zehnzölligen Kreise (5 Zoll albmess.) ein Theilstrich nur 5 Sek. bedecken, so wäre

$$206265'' : 50 \text{ Lin.} = 5'' : m, \text{ also müßte}$$

die Breite eines Theilstriches ungefähr 0,001 Lin. ach meiner Schätzung ungefähr 0,04 eines Men- henhaares, betragen. Niemand wird aber in al- m Ernste glauben, daß eine solche Feinheit in der Mechanik zu erreichen möglich sey; schon 0,01 Lin. Breite kann als fein gelten.

Dies mag hinreichen, um einzusehen, in wie weit ie Genauigkeit eines Winkelmessers von der Feinheit r Theilstriche abhängt.

Kleinere Unterabtheilungen von Theilen des Lim- us erhält man bekanntlich vermittelst des sogenannten onius (Vernier), dessen Einrichtung und Gebrauch n Allgemeinen ich bei meinen Lesern als bekannt vor-

aussetzen darf, da in allen mathematischen Elementarbüchern hiervon gehandelt wird. Soll der Nonius an einem Winkelmesser ntel von den kleinsten Abtheilungen des Limbus anzeigen, so überträgt man gewöhnlich (n — 1) Theile des Limbus auf den kleinen concentrischen Bogen des Nonius, und theilt diese (n — 1) Theile hier in n Theile. Dadurch wird ein jeder Theil des Nonius um $\frac{1}{n}$ kleiner als ein Theil des Limbus. Steht nun der Nullpunkt oder erste Theilstrich des Nonius mit einem Limbusstrich genau zusammen, so bleibt jeder folgende Noniusstrich immer um $\frac{1}{n}$ eines Limbustheils weiter zurück, worauf sich das Ablesen eines Winkels bis auf ntel eines Limbustheils gründet, wenn der Index, nehmlich der Nullpunkt des Nonius nicht genau auf einen Theilstrich des Limbus zeigt, sondern zwischen zwei solchen Theilstrichen steht. In diesem Falle untersucht man vermittelst einer Loupe oder eines eignen Mikroskopes am Nonius, der wievielte Theilstrich desselben mit einem Limbusstrich genau oder doch am nächsten zusammentrifft. Die Zahl, welche diesem Theilstrich am Nonius, von o an gezählt, entspricht, deutet an, wie viel ntel eines Limbustheiles zu dem Winkel addirt werden müssen, welchen die Zahl des zunächst vor dem Nullpunkt des Nonius links liegenden Limbusstriches in Graden oder Theilen eines Grades bezeichnet. Eine zweite Art, den Nonius gegen seinen Limbus einzurichten, besteht darin, daß man n Theile des Limbus auf den concentrischen Bogen des Nonius überträgt, und diese n Theile hier in (n — 1) Theile theilt; dadurch wird jeder Noniustheil größer als ein Limbustheil um $\frac{1}{n}$tel des letztern. Diese Einrichtung des Nonius ist jedoch weniger in Gebrauch und auch in der That weniger zweckmäßig, als die erstere.

Ein Beispiel wird zur Erläuterung dieses an sich äußerst leichten Gegenstandes hinreichen. Wir wollen

annehmen, der Limbus eines Winkelmessers sey so eingetheilt, daß jeder Theil $= \frac{1}{4}^0 = 15'$ ist; der Nonius soll die Winkel bis auf $\frac{1}{2}$ Minute angeben. Nun ist $\frac{1}{2}$ Minute $= \frac{1}{30}$ von $15'$, einem Theil des Limbus; man trägt also 29 Theile des Limbus, wovon jeder $15'$ bedeutet, auf die Noniusplatte, und theilt hier diesen Bogen in 30 Theile, so ist jeder Noniustheil um $\frac{1}{2}$ Minute kleiner als ein Limbustheil, folglich gibt der Nonius die abzulesenden Winkel bis auf $\frac{1}{2}$ Minute an. Gesetzt also, bei einer Winkelmessung mit einem so eingerichteten Instrument stände der Index, nehmlich der erste, gewöhnlich mit einem besondern Zeichen etwa in Form eines Pfeils, bezeichnete Theilstrich des Nonius zwischen $37\frac{1}{4}$ und $37\frac{2}{4}$ Grad, so daß der 11te Theilstrich auf dem Nonius, von o an gezählt, genau mit einem Limbusstrich zusammenträfe, so wäre der abzulesende Winkel $= 37\frac{1}{4}^0 + \frac{11}{2}' = 37^0\,20'\,30''$.

Wären die kleinern Abtheilungen des Limbus $= \frac{10}{7}^0 = 10'$, und ein Bogen von 39 solcher Theile auf dem Nonius in 40 Theile getheilt, so gäbe dieser die Winkel bis auf $\frac{10}{40}'$ oder $\frac{1}{4}' = 15''$, u. s. w.

Je größer der Halbmesser eines Winkelmessers ist, desto feinere Unterabtheilungen verträgt sein Limbus und sein Nonius; um so genauer läßt sich also damit ein Winkel erhalten. Genauer als auf 10 Sekunden, unmittelbar mit dem Nonius, erlangt man sie indessen gewöhnlich nicht, auch vermittelst größerer Instrumente, z. B. des Bordaschen Kreises; ich sage, mit Zuverläßigkeit.

Es muß jedoch erinnert werden, daß, im Fall das Instrument genau getheilt und centrirt ist, die Theillinien des Limbus und Nonius genau den Radien des Kreises entsprechen, nehmlich verlängert durch den Mittelpunkt desselben gehen, und auch die Theilstriche des Limbus und Nonius überall von ganz gleichförmiger

Breite (Dicke) sind, dann ein Winkel, auf welchen der Inder zeigt, noch um die Hälfte genauer abgelesen werden kann, als ihn der Nonius unmittelbar angiebt. Stimmt nehmlich bei einem gewissen Stand des Inder kein Theilstrich des Nonius völlig genau mit einem Theilstrich am Limbus, welches sehr oft geschieht, so läßt sich durch die starke Vergrößerung des Mikroskopes bei einiger Uebung noch ganz leicht wahrnehmen, ob beide Theilstriche etwa um die Hälfte ihrer Breite von einander liegen. Hierdurch erhält man die abzulesenden Winkel um die doppelte Genauigkeit des Nonius annähernder. Giebt nehmlich dieser die Winkel auf 30″, so bekommt man sie durch die erwähnte Schätzung mit hinlänglicher Zuverläßigkeit auf 15″, nehmlich der noch mögliche Fehler kann nicht mehr 15″, positiv oder negativ, betragen. Am besten erläutert man sich dies alles durch eigne aufmerksame Betrachtung eines guten Winkelmessers. An einem solchen ist sowohl der Gradbogen des Limbus als auch der kleine Bogen des Nonius von Silber, welches nicht so leicht oxydirt (anläuft), als Messing.

§. 65.

Prüfung der Richtigkeit eines Winkelmessers

Wie sehr die Genauigkeit aller kleinern und größern Operationen von einer richtigen Winkelmessung abhänge, muß jedem Anfänger bekannt seyn. Je vollkommener daher die hierzu gehörigen Werkzeuge sind, desto mehr nähern sich die durch Beobachtung und Berechnung erhaltenen Resultate der Wahrheit.

Ueber die mannichfaltigen Fehler, welche ein Winkelmesser haben kann, über die Methoden, diese Fehler

aufzusuchen, zu corrigiren, solche auch, wenn zur Abhelfung derselben am Instrument selbst keine Vorrichtungen sind oder seyn können, bei einer Vermessung in Rechnung zu bringen; darüber ließe sich ein ganzes Buch schreiben. In dieser weiten Ausdehnung kann dieser Gegenstand wegen Beschränktheit des Raums hier nicht behandelt werden. Am besten wird es immer seyn, um sich die verdrießlichen und stets etwas unsichern Correctionen zu ersparen, wenn man nur aus der Werkstätte eines wissenschaftlich gebildeten, mit allen Hülfsmitteln der feinern Mechanik ausgerüsteten Künstlers einen guten Winkelmesser nimmt, der folgende allgemeine Proben aushält. Ist man einmahl eines so wichtigen Werkzeuges benöthigt, so wird man lieber einen etwas höhern Preis an das Bessere setzen, als zu dem Gemeinen und für genaue Messungen Untauglichen greifen wollen. Untauglich in diesem Sinne habe ich die meisten ältern Winkelmesser, z. B. Astrolabien mit Halbkreisen u s. w., die noch häufig unter den Feldmessern circuliren, bei näherer Untersuchung befunden.

Ob ein Winkelmesser richtig, genau getheilt, gut centrirt und seine Fläche eine vollkommene Ebene sey, dies mit Sicherheit zu erfahren, giebt es besonders folgende Wege:

Die Richtigkeit der auf dem Limbus befindlichen Theilung läßt sich, wenn das Instrument aus einem Vollkreis besteht, einigermaßen schon mit einem feinen Stangenzirkel untersuchen, womit man die Chorden von größern oder kleinern gleichen Bogen von verschiedenen Punkten des Limbus aus vergleicht. Finden sich diese überall gleich, so kann die Theilung wenigstens keine groben Fehler haben, und ein gemeinerer Winkelmesser ohne Nonien, z. B. die Boussole, welche die Winkel höchstens nur auf Viertelgrade genau geben kann, ist

brauchbar genug in Hinsicht seiner Theilung, wenn er diese Prüfung besteht; die meisten ältern Winkelmesser, Astrolabien ꝛc., die ich zu sehen Gelegenheit hatte, hielten diese Prüfung nicht aus; ja die Theilung ist an ihnen oft so äußerst fehlerhaft, daß man sie mit einem geübten Auge, selbst ohne Stangenzirkel, bemerken kann. Bei dieser Untersuchung wird man am besten zuerst die Gleichheit der vier Quadranten des Kreises, nehmlich von 90° zu 90°, dann die Bogen von 60° zu 60°, deren Sehnen dem Halbmesser des Kreises gleich sind, untersuchen u. s. w. Besteht der Winkelmesser nur aus einem Halbkreis oder Viertelkreis (Quadrant) oder Sechstelkreis (Sextant) u. s. w., so ist die Prüfung mit dem Stangenzirkel nicht zureichend; hier kann der ganze Bogen falsch seyn, nehmlich die Anzahl der Grade nicht enthalten, die er anzeigt, die Abtheilungen der falschen Grade aber können dessenungeachtet überall gleich seyn. Die Größe dieses Fehlers, welche sich bei Beobachtungen noch am leichtesten und zuverläßigsten in Rechnung bringen läßt, muß anderweitig durch Winkelmessungen und Vergleichung mit andern genauen Winkelmessern ausfindig gemacht werden.

Die feinern Fehler einer Theilung an den bessern Winkelmessern, welche mit einem oder wohl mehreren (2 bis 4) Nonien versehen sind, so wie zugleich der Fehler der Excentricität, lassen sich mit Hülfe dieser Nonien selbst entdecken. Vor dieser untrüglichen Prüfung (examen rigorosum) scheuen sich selbst die vorzüglichsten Künstler, und selten besteht sie ganz und durchgängig auch das vortrefflichste, mit allem Fleiß gearbeitete, Kreisinstrument, besonders wenn es vier Nonien als eben so viel Wächter bei sich führt. Der Bogen des Nonius ist nehmlich gleichgemacht einem Bogen des Limbus, nach irgend einer Abtheilung; stellt man daher den Anfangspunkt (Nullstrich, Index) des Nonius genau

auf einen Theilstrich des Limbus, so muß der letzte Theilstrich des Nonius mit einem andern Theilstrich des Limbus zusammentreffen. Enthielte der Nonius 30 Theile = 29 Limbustheilen, so muß, wenn der Winkelmesser richtig ist, überall der Noniusbogen 29 Limbustheile fassen, auf welchen Theilstrich des letztern man auch den ersten Theilstrich (Inder) des Nonius stellen mag. Noch weit entscheidender aber wird die Prüfung mit zwei oder vier Nonien, nehmlich durch Beobachtung der Entfernungen ihrer Anfangspunkte auf verschiedenen Theilen des Vollkreises. Diese wesentliche Hauptprobe leistet mehr als der beste Stangenzirkel. Eine solche Untersuchung muß mit stark vergrößernden Mikroskopen geschehen, welche keinen Zweifel im Sehen übrig lassen, fängt am besten vom Nullpunkt des Limbus an, und wird dann, wenn nicht von allen, doch von vielen verschiedenen Theilstrichen des Bogens aus fortgesetzt. Zeigen sich bei dieser Prüfung kleine Abweichungen, — ich habe bis jetzt nur einen repetiren-den Theodolit mit 4 Nonien kennen gelernt, der bei der scrupulösesten Untersuchung mir gar keine bemerkliche Abweichung zeigte —, so können sie von einem kleinen Fehler in der Theilung, der bisweilen bei guten Instrumenten gegen 15″ oder noch mehr aufs Ganze beträgt, oder auch von einer geringen Excentricität herrühren. Die vollkommene Centrirung eines Kreisinstruments wird noch bis jetzt von den ersten Meistern der Kunst für schwierig gehalten, und kleine Fehler der Excentricität kommen selbst an den hochgepriesenen Englischen Instrumenten gar nicht selten vor. Es ist aber ein solcher Fehler noch schlimmer als ein Fehler der Theilung; letzterer läßt sich, wenn man alle fehlerhaften Stellen am Limbus genau erforscht und in eine Correctionstabelle gebracht hat, bei Beobachtungen leichter in Rechnung bringen, als ersterer.

Die Excentricität, nehmlich die Bewegung der Alhidade mit ihrem Index um einen Punkt, der nicht genau mit dem Mittelpunkt des Limbusbogens zusammenfällt, läßt sich ziemlich zuverläßig erkennen, indem man den Nonius längs dem Limbus fortbewegt. Bleibt der Noniusbogen hierbei nicht überall gleich weit von dem zugehörigen Limbusbogen, so ist das Instrument mehr oder weniger excentrisch, vorausgesetzt, daß beide, der Limbus- und Noniusbogen, vollkommene Kreisbogen sind. Bei guten Winkelmessern wird indessen wohl selten ein grober Fehler der Art bemerkt werden. Aus den Differenzen der gefundenen Abstände ließe sich nach einer besondern Formel die Excentricität berechnen, wenn die Differenzen selbst beträchtlicher wären, als man sie gewöhnlich bemerkt.

Was aber die Excentricität des untern Fernrohrs an Repetitionskreisen betrifft, so soll davon gehörigen Orts das Nähere mitgetheilt werden.

Eine dritte Methode, die Richtigkeit eines Winkelmessers zu prüfen, besteht darin, daß man mit demselben die drei Winkel eines großen Dreiecks auf der Erdoberfläche, welches sich indessen noch als ein geradlinigtes ansehen läßt, ausmißt. Ist die Summe der gemessenen Winkel gleich 180^0 oder doch um eine sehr geringe Differenz, etwa von $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ Minute, dieser Summe nahe, so kann man den Winkelmesser als richtig und brauchbar ansehen; denn was eine so geringe Abweichung von 30″ oder 15″ anlangt, so kann dieselbe auch sehr leicht durch eine etwas unsichere Beobachtung (Visiren) entstanden seyn. Man verbessert in diesem Falle jeden der drei Winkel um den dritten Theil der positiven oder negativen Differenz. Man wird, um sicher zu gehen, sehr wohl thun, wenn man diese Untersuchung mehrere Mahle und zwar auf verschiedene Arten vornimmt. Große Dreiecke auf einem ebenen

Terrain kann man sich selbst durch scharf begrenzte Signale ausstecken; den Versuch kann man mit einem gleichseitigen, oder gleichschenklichten, oder ungleichseitigen Dreieck anstellen. Zu genauer Beobachtung (Visiren) wird aber hierbei der Winkelmesser mit einem Fernrohr versehen seyn müssen, da man beim Visiren nach einem Object mit bloßen Augen und gemeinen Dioptern Fehler von einer oder einigen Minuten begehen kann. Endlich kann auch die erwähnte Differenz zum Theil mit von einem unrichtigen Ablesen des Winkels am Winkelmesser, wegen der Dicke der Theilstriche, veranlaßt werden. Alles dies muß man wohl bedenken, und es bei einem Versuch nicht bewenden lassen. Die von mehreren Geometern empfohlene Methode, auf dem Felde die Seiten eines großen Dreiecks, besonders eines gleichschenklichten, nach irgend einem Längenmaß sehr genau auszumessen oder selbst abzustecken, dann aus diesen Seiten die Winkel des Dreiecks trigonometrisch zu berechnen, und endlich diese Winkel mit einem Winkelmesser, zur Prüfung desselben, wirklich zu messen, möchte in der That meistens unsicher seyn, da die vollkommen richtige Längenbestimmung der Seiten in jedem Fall noch einigem Zweifel unterliegt, und schon kleine Fehler in den Längen einen beträchtlich nachtheilichen Einfluß auf die berechneten Winkel habe, wie sich ein jeder Leser durch eine Doppelberechnung der Winkel zweier Dreiecke, die in ihren Seiten um eine Kleinigkeit differiren, überzeugen kann.

Statt der drei Winkel eines großen Dreiecks kann man auch die Summe aller Centriwinkel in einem Kreise $= 360^0$ gebrauchen; den Kreis stellt hier der sichtbare Horizont, den Mittelpunkt desselben der Ort der Beobachtung vor. Man kann also mit einem Winkelmesser rund herum im Horizont nach einander mehrere Winkel, die entfernte scharfbegrenzte Objecte oder

eigens dazu ausgesteckte Signale (Pikets) mit dem Auge des Beobachters bilden, messen; beträgt die Summe aller einzeln gefundenen Winkel ganz oder doch sehr nahe 360°, so spricht dies für die Richtigkeit des Winkelmessers. In Hinsicht der geringen positiven oder negativen Differenzen, die sich bei dieser Prüfung ergeben können, gilt dasselbe, was ich oben bei der Prüfung mit den Winkeln eines Dreiecks bemerkte. Auch bei dieser Untersuchung lassen sich mancherlei Abwechselungen gedenken; man kann von verschiedenen Punkten im Umkreise die Winkelmessung anfangen, größere oder kleinere, auch gleiche Winkel, hierzu gebrauchen; man kann selbst repetiren, nehmlich den Umkreis des Horizontes einige Mahle durchlaufen u. s. w. Ein wenig Nachdenken wird den Leser, ohne weitere Erklärung, bemerken lassen, daß man auf diese Weise auch die Richtigkeit einzelner Bogen des Winkelmessers, z. B. die Bogen von 60° zu 60° ꝛc., untersuchen kann, welches vorzüglich leicht geschieht, wenn das Instrument eine besondere Einrichtung zum Repetiren hat. —

Dr. Benzenberg berichtet in einem lesenswerthen Aufsatz des Astronomischen Jahrbuchs von Bode, Jahrg. 1806. S. 223 ꝛc., daß er durch das Rundmessen der Winkel im Horizont einen für vorzüglich gehaltenen fünfzölligen Spiegelsextanten, von Troughton in London, geprüft, etwas fehlerhaft in der Theilung befunden, und diese Fehler genau untersucht in eine Tabelle gebracht habe, um bei einer großen geodätischen Operation, wo die Dreiecke des ersten Ranges auf Standlinien von ungefähr 3 Stunden Länge beruhten, in Beobachtung der Winkel mit jenem Sextanten die bemerkten kleinen Fehler in Rechnung zu bringen. Beim Herummessen der Centriwinkel im Horizonte betrug, wenn Winkel von 90° gebraucht wurden, die Differenz gegen 360° immer 35″. Wurden

von der Sternwarte aus 3 Thürme genommen, die Winkel von 120° machten, so betrug der Fehler 38″; bei 5 Winkeln von 72° betrug er 32″ u. s. w. Um die Fehler für kleinere Winkel zu beobachten, machte Benzenberg die Wahner-Heide gleichsam zu einer Theilmaschine, und steckte auf ihr einen Kreis von 1000 Fuß Halbmesser mit Pikets für verschiedene Winkel ab. Mit 6 Pikets für die Bogen von 60° fand sich der Fehler zu 33″. Aus einer Menge von Beobachtungen ergab sich, daß auf dem Limbus des Sextanten die Fehler von 120° bis 45° regelmäßig von 38″ bis 31″ abnahmen, hingegen von 45° bis 36° so unregelmäßig wurden, daß sie von Grad zu Grad bestimmt werden mußten; von 36 bis 0° wurden die Fehler von 5 zu 5° bestimmt. Diese Untersuchung machte eine sehr weitläufige, beschwerliche Reihe von Beobachtungen nöthig, vorzüglich bei kleinen Winkeln, z. B. von 5°, wobei über 384 Beobachtungen anzustellen waren.

Man kann hieraus schließen, wie höchst mühsam und verdrießlich eine vollständige Untersuchung der Fehler eines Winkelmessers seyn müsse; ist sie aber einmahl glücklich vollendet und darnach eine Correctionstabelle entworfen, so können mit dem etwas fehlerhaften Instrument fortan die Winkel eben so genau genommen werden, als mit einem fehlerfreien. Sind große genaue Triangulirungen mit einem Instrument, welches die Winkel nicht repetirt, zu verrichten, so darf man sich der Mühe der erwähnten Untersuchung durchaus nicht entziehen; für kleinere Aufnahmen kann sie entbehrt werden, so wie auch für große Vermessungen, wenn man hierzu einen Repetitionskreis hat, der die Fehler des Instruments ganz aufhebt oder doch so weit vermindert, als man will.

Gilt es die Ausführung sehr großer Aufnahmen, z. B. eines ganzen Landes oder sehr genaue Winkel-

messungen bis auf 1″, so würde ich immer zu dem rathen, was dem jetzigen Zustand der mathematischen Wissenschaft und Kunst, durch die Bemühungen großer Geometer und Künstler so weit über die Leistungen früherer Zeiten erhoben, angemessen ist, nehmlich zu einem guten Repetitionskreis.

Andere Methoden, die Fehler eines Winkelmessers, besonders in Hinsicht seiner Theilung, aufzusuchen, z. B. mittelst einer Mikrometerschraube, welche der Astronom Tob. Mayer dem Nonius zur Bestimmung kleiner Winkeldifferenzen vorzog, können als weniger brauchbar hier übergangen werden. Die Untersuchungen und Correctionen, welche bei einzelnen Instrumenten insbesondre nöthig werden, werde ich bei Beschreibung dieser Instrumente selbst anmerken.

Wir wenden uns nun zur Beschreibung der Winkelmesser selbst, sowohl der einfachern, weniger genauen, als auch der zusammengesetzteren, welche eine größere Annäherung zur Wahrheit gestatten; indessen werde ich nur die brauchbarsten anführen, und mehrere ältere undienliche Einrichtungen, welche jetzt wenig oder gar nicht mehr in der Praxis vorkommen, zur Ersparung des Raums übergehen.

§. 66.

Bouſſole zum Winkelmeſſen.

Dies seiner Natur nach sehr unvollkommene Werkzeug sollte man nur in einigen unvermeidlichen Fällen der niedern Landmessung, welche weiterhin angezeigt werden, zu Rathe ziehen. Allein jeder warnenden Vorstellung und gründlichen Belehrung erfahrner Geometer zum Trotz, bedienen sich desselben die meisten Feldmesser noch immer fast ausschließlich zu Aufnahmen und

Winkelbestimmungen überhaupt, ohne Noth und noch dazu ohne Zeit- und Kosten-Ersparung; denn eine gut gearbeitete Boussole, womit man die Winkel höchstens bis auf Viertelgrade gewiß erlangt, kostet meines Wissens eben so viel als ein kleinerer Theodolit mit Fernrohr ohne Repetition, welcher die Winkel wenigstens auf 2 oder 1 Minute genau angiebt. Ich kann mir die für die Winkelboussole noch immer bestehende Hochachtung nur aus übertriebener Anhänglichkeit an den alten Schlendrian, aus der Bequemlichkeit oder Unkunde derer erklären, die ihre Anwendung zum Feldmessen so weit ausdehnen.

Die Gestalt und Construction der Boussole ist so allgemein bekannt, daß es meinen Lesern an einigen kurzen Notizen hierüber genügen wird.

Die Länge der Magnetnadel kann 5 bis 6 Zoll betragen, eben so viel der Durchmesser des am Boden der Kompaßbüchse beschriebenen, bis auf halbe oder Viertel-Grade eingetheilten Gradbogens. Der scharf zugespitzte stählerne Stift, auf welchem und um welchen die Nadel ihre Horizontalbewegungen macht, muß genau im Mittelpunkt des eingetheilten Kreises und senkrecht darauf stehen. Die Nadel muß bis auf das maximum magnetisirt und richtig equilibrirt seyn. Außer der Linie des magnetischen Meridians, mit Nord — Süd bezeichnet, kann man noch den wahren Meridian annähernd durch eine Linie bezeichnen, wenn für einen gewissen Ort der Erde die Declination bekannt ist; diese zeigt sich aber selbst veränderlich, wie oben bemerkt worden. Der magnetische Meridian soll genau durch die Mitte der Nadel und ihres Hütchens (gewöhnlich von Agat) gehen. Die beste Form der Nadel ist nach der Erfahrung die ganz einfache eines rechtwinklichten dünnen Parallelepipedons, welches sich auf seiner schmalern Seitenfläche dreht; alle Verzierungen

müssen hier vermieden werden. Das Nordpolende, welches zum Inder dient, läuft in eine schmale Spitze aus, oder was wohl noch zweckmäßiger, auf der obern Fläche der Nadel längs ihrer Mitte hin ist eine zarte Linie eingerissen, die die Richtung des magnetischen Meridians bezeichnet.

Zum Visiren dient ein gewöhnliches gutes Diopterlineal (Fernrohr ist für eine Boussole zu kostbar), welches mit der Kompaßbüche in eine solche Verbindung gesetzt ist, daß seine Diopterebene senkrecht auf die Kreisebene des Instruments steht, und genau durch den Mittelpunkt des Kreises geht; am schiklichsten läuft die Diopterebene durch die Linie des magnetischen Meridians (Nord — Süd). Manche Schriftsteller, auch Mayer in seiner practischen Geometrie, versetzen das Diopterlineal an einen Seitenrand der Boussole, so daß dessen Visirlinie und Alhidade mit der Linie Nord-Süd in der Büche parallel läuft. Die erstere Einrichtung aber verdient der Richtigkeit wegen den Vorzug.

Ein Vernier an der Boussole, den Manche vorgeschlagen und dabei wirklich angebracht haben, scheint mir bei der Unvollkommenheit des ganzen Instruments überhaupt ein sehr überflüßiger Zusatz.

Das Stativ, die größern und kleinern Bewegungen können wie beim Meßtisch seyn. Die feinern Drehungen (Azimuthalbewegung) der Boussole geschehen jetzt gewöhnlich mit Schraube ohne Ende.

Die Horizontalstellung des Werkzeugs geschieht am besten mittelst einer dosenförmigen Libelle.

In der Nähe der Magnetnadel darf, wenn sie ihren natürlichen Stand nicht mehr oder weniger verändern soll, kein Eisen seyn; daher man sich sehr vorsehen muß, daß auch das zur Boussole gebrauchte Messing nicht eisenhaltig sey, wie man es oft genug befindet.

Eine Boussole in Hinsicht der richtigen Theilung und Centrirung zu prüfen, hat keine Schwierigkeit. Ob die Magnetnadel sehr empfindlich, leicht beweglich, oder, wie man sonst sagt, nicht faul sey, wird man bald erkennen, wenn man die horizontal aufgestellte Boussole um sehr geringe Azimuthalwinkel herumdreht u. s. w.

§. 67.

Schmalkalder's Handboussole. (Fig. 27).

Als eine Abbreviatur und zu flüchtigen militärischen Aufnahmen, die bekanntlich keine große Genauigkeit erheischen, wirklich brauchbare Abänderung der größern Boussole ist seit einigen Jahren eine kleine Handboussole unter dem Namen: Patent Boussole, von Schmalkalder in London zuerst ausgeführt, bekannt geworden. Sie hat ungefähr die Größe einer kleinen gewöhnlichen Orientirboussole, nehmlich die cylinderförmige messingene Kapsel, etwa 3 Zoll Durchmesser. Auf die Magnetnadel, welche sich wie gewöhnlich auf einem zugespitzten stählernen Stifte dreht, ist eine Kreisfläche aus mäßig dickem Kartenpapier oder auch aus sehr dünngeschlagenem versilberten Messingblech angekittet. Der Kreis ist in 360 Grade, auch wohl noch in halbe Grade, abgetheilt, und sein Mittelpunkt steht genau über dem Umdrehungspunkt der darunter versteckt liegenden Nadel. Sonach ist die Nadel mit dem Gradbogen in einer festen Verbindung, und beide behalten bei jeder horizontalen Stellung der Kapsel nach irgend einem Azimuth immer ihre unveränderte Richtung gegen Norden, oder die Nadel dreht sich mit dem eingetheilten Bogen immer um gleiche Winkel auf dem Stift als Achse betrachtet. Der Kreis muß aber wegen der schwachen magnetischen

Kraft der kleinen Nadel so leicht als möglich (daher gewöhnlich von Papier) und die Reibung sehr gering seyn, wenn bei der Drehung der Kapsel die Nadel genau in ihrem magnetischen Meridian bleiben, oder nicht faul seyn soll. An der einen Seite des obern Kapselrandes ist ein kleines gewöhnliches Diopter d aufgesetzt, welches sich mittelst eines Scharnieres aufrichten und auf den Glasdeckel der Kapsel niederlegen läßt. Diesem Diopter gegenüber ist um ein Scharnier ein kleines in Messing gefaßtes Glas-Prisma v beweglich; die Neigungswinkel der beiden Cathetenebenen betragen 45°. Dieses Prisma läßt sich so weit niederlegen, daß die Cathetenebene mn gerade über dem Limbus des Kreises und parallel zu dessen Ebene steht; fällt nun das Bild von einem Limbustheil unter 45° auf die Hypothenusenebene mp, so wird der Lichtstrahl dieses Bildes wiederum unter 45° zurückgeworfen, wie in der Optik gelehrt wird. Es vertritt demnach hier das gefaßte Prisma die Stelle eines in der Hypothenusenebene mp liegenden reflectirenden Spiegels. An der untern über dem Gradbogen parallel zu stellenden Cathetenebene mn ist eine kleine convexe Linse von c. 1 Zoll Brennweite angeschliffen, welche hier die Stelle einer planconvexen Loupe vertritt. Die Fassung der senkrecht stehenden Cathetenebene np hat eine Oeffnung (Schlitz) zum Visiren, wodurch man zu gleicher Zeit durch Diopter d auf einen entfernten Punkt visirt, und vermöge der Reflexion der Spiegelebene mp die dazu gehörige Gradzahl am Limbus vergrößert sieht, so daß das Bild des entfernten Objects, nehmlich ein bestimmter Punkt desselben, und die Zahl am Gradbogen in eine Vertikalebene zusammenfallen. Die Gradzahlen müssen auf dem Bogen in verkehrter Lage gesetzt seyn, um nach der Reflexion vom Spiegel dem Auge gerad zu erscheinen. In ein weiteres Detail einzelner Theil

dieſes kleinen Werkzeugs kann hier nicht eingegangen werden; es verſteht ſich dies auch faſt von ſelbſt.

Um damit einen Winkel zu meſſen, hält man die kleine Bouſſole in der Hand oder ſetzt ſie noch beſſer nahe horizontal auf eine feſte Unterlage, dreht ſie ſo weit, daß man durch das Diopter d den einen entfernten Gegenſtand ſieht, und bemerkt die Gradzahl am Limbus; hierauf dreht man die Bouſſole um ihre Achſe ſo weit herum, daß man durch das Diopter d das zweite Object ſieht, und bemerkt auch jetzt die Gradzahl am Limbus. Aus den beiden Gradzahlen wird, wie ſonſt bei Bouſſolen geſchieht, das Maß des geſuchten Winkels ganz leicht gefunden u. ſ. w.

Eine größere Genauigkeit als auf $\frac{1}{2}$ Grade, und nach meinen Beobachtungen kaum dies, darf man von dieſem ſehr unvollkommenen, bloß zu ganz gemeinen flüchtigen militäriſchen Aufnahmen dienenden Werkzeuge nicht erwarten.

§. 68.

Libelle oder Waſſerwaage mit Luftblaſe. (Niveau à bulle d'air.)

Da die Libelle nicht allein zur Horizontalſtellung des Meßtiſches, ſondern auch zur richtigen Stellung der vorzüglichſten Winkelmeſſer ſo wie des Nivellirinſtrumentes mit Fernrohr ein ganz unentbehrliches Hülfsmittel iſt, ſo muß eine kurze Beſchreibung deſſelben hier vorausgehen:

Es ſind zwei verſchiedene Formen (Conſtructionen) der Libelle bekannt, nehmlich die doſenförmige und die cylinder- oder röhrenförmige. Die Doſenlibelle braucht man beſonders zur Horizontalſtellung des Meßtiſches, auch wohl des künſtlichen Horizontes, wenn nicht die

größte Genauigkeit verlangt wird; die Röhrenlibelle hingegen an Winkelmessern und Nivellirinstrumenten, welche eine schärfere Berichtigung der Neigungen gegen den Horizont verlangen.

Die Dosenlibelle (Fig. 28.), wie ich mir selbst eine solche zur horizontalen Stellung des Meßtisches habe anfertigen lassen, kann aus einem dosenförmigen Gefäß von Messing, aus einem Stück, oben offen, bestehen. Der Durchmesser kann gegen 4 Zoll (auch etwas weniger), die Höhe $1\frac{1}{2}$ Zoll betragen. In die obere Oeffnung der Dose ist ein sehr genau geschliffener Glasdeckel luftdicht eingesetzt; der Kitt, dessen man sich zur festen Verschließung mit bedienen muß, darf von der Flüßigkeit in der Libelle nicht angegriffen werden. Die eingesetzte Glasplatte ist oben vollkommen eben und an der untern (innern) Seite etwas wenig concav, nach einem Bogen von sehr großem Halbmesser ausgeschliffen, weil ohne diese Vorrichtung die Luftblase zu empfindlich und auch bei horizontalem Stand nicht genau auf die Mitte des Deckels angewiesen ist. Der starke Boden hat rund herum einen vorspringenden Rand, welcher aufs sorgfältigste, wozu viele Versuche nöthig, so abgedreht wird, daß die dadurch gelegte Fläche, Grundfläche, parallel mit der ebenen Oberfläche des Glasdeckels ist. An der Seitenwand der Dose läßt sich eine kleine starke Schraube m fest einschrauben, und erforderlichen Falls herausschrauben. Durch die Oeffnung bei m, nach Herausdrehen der Schraube, füllt man das Gefäß mit destillirtem Wasser oder noch besser mit reinem Alkohol oder Aether so weit voll, daß noch eine kleine Portion Luft darin bleibt. Sodann verschließt man das Gefäß mit der Schraube, setzt dasselbe auf seine Basis, und sieht zu, ob die Luftblase groß genug ist; ist sie zu klein und daher zu wenig empfindlich (beweglich), so öffnet man nochmals die Schraube,

läßt einen oder einige Tropfen der Flüßigkeit ausfließen und Luft dafür eintreten, u. s. w. Worauf die Vollkommenheit dieser Libelle beruhet, sieht jeder Leser sogleich von selbst. Ist sie gehörig justirt, so muß, wenn man sie auf eine horizontale Ebene setzt, die Luftblase genau in der Mitte n des kreisförmigen Glasdeckels stehen; diese Mitte ist an meiner Libelle mit einigen eingeschliffenen kleinen concentrischen Kreisen bezeichnet, welche dem Umfang der Luftblase bei verschiedenen Temperaturen entsprechen. Bei kalter Temperatur ist nehmlich die Luftblase größer, bei wärmerer Luft kleiner. Um nun die Dosenlibelle zu prüfen, und nöthigenfalls zu corrigiren, dient folgender Versuch. Man setze sie auf die möglichst vollkommene Ebene eines Meßtisches oder eines Glashorizontes, richte durch die bekannten Mittel, z. B. Stellschrauben, die Ebene (Unterlage) so ein, daß die Luftblase der Libelle sehr genau in die Mitte kommt. Sodann drehe man sie auf ihrer unverrückten ebenen Unterlage allmählig herum, und beobachte, ob sie immer ihren Stand in der Mitte behält; geschieht dies, so ist man von der Richtigkeit der Libelle, nehmlich ihrer Anwendbarkeit zu oben erwähnten Zwecken, überzeugt. Im Gegentheil muß sie von einem Mechanikus um den beobachteten Fehler berichtigt werden. Hat man sie aber einmahl vollkommen justirt, so kann sie lange Zeit, ohne merklich fehlerhaft zu werden, zur Horizontalstellung ebener Flächen, z. B. des Meßtisches, gebraucht werden.

Die cylinderförmige Libelle (Fig. 29.), welche mehr Genauigkeit gewährt, als die vorerwähnte, ist ihrer Gestalt und wesentlichen Einrichtung nach allgemein bekannt. Nach der gewöhnlichen Angabe soll sie aus einer geraden cylinderförmigen Glasröhre bestehen, diese Röhre mit reinem Wasser, besser mit Alkohol oder Aether gefüllt seyn, und über der Flüßigkeit eine grö-

ßere oder kleinere Luftblaſe enthalten, die nach phyſikaliſchen Gründen bei jeder Lage der Libelle die höchſte Stelle einnimmt. Die Röhre A wird an beiden Enden zugeblaſen oder auf andere Weiſe hermetiſch verſchloſſen. Wenn nun dieſelbe im Innern eine geometriſch genaue Cylinderform hat, welche man durch Ausſchleifen vorher ſchon calibrirter Röhren vermittelſt metallener cylindriſcher Bolzen (Dornen) und eines feinen Schmirgels erlangt, ſo ſoll bei horizontaler Lage der Libellenachſe die Luftbläſe in der Mitte der Röhre ſtehen, bei einer auch ſehr geringen Neigung dieſer Achſe gegen den Horizont aber ſoll ſich die Blaſe nach dem höhern Ende der Achſe hinbewegen. So wird die Form einer guten Libelle von den meiſten, ſelbſt vorzüglichen Schriftſtellern, z. B. von Mayer in ſeiner practiſchen Geometrie, B. II. S. 103 — angezeigt. Gegen dieſe etwas irrige Angabe muß nothwendig erinnert werden, daß die Luftblaſe bei horizontaler Lage der Libelle, wenn dieſe vollkommen cylindriſch wäre, jeden Stand zwiſchen beiden Enden der Röhre einnehmen könnte. Nach hydro-aroſtatiſchen Geſetzen bewegt ſich die Luftblaſe bloß in dem Fall, wenn die Flüſſigkeit auf der einen Seite höher ſteht als auf der andern. Bei horizontaler Lage der vollkommen cylindriſchen Röhre könnte ſie aber jede Stelle einnehmen, ohne daß ſich der Höhenſtand der Flüßigkeit auf beiden Seiten änderte. Sonach gäbe eine Libelle von dieſer Geſtalt keine richtige Anzeige vom horizontalen Stand, auch würde die Luftblaſe beim wirklich horizontalen Stand viel zu empfindlich, nehmlich hin und her beweglich, alſo ſchwerlich zur Ruhe zu bringen ſeyn. Aus dieſem Grunde, der für denkende Leſer keiner weitern Auseinanderſetzung bedarf, wird der vertikale Durchſchnitt der Höhlung einer wirklich guten brauchbaren Libelle dem Bogen eines Kreiſes aber von großem Ra-

dius, ähnlich seyn müssen. Je größer dieser Radius, desto mehr nähert sich der Bogen der geraden Linie, desto empfindlicher wird daher die Luftblase bei sehr geringen Neigungen der Libelle gegen den Horizont. So groß nehmlich dieser Neigungswinkel in Graden — hier in Sekunden — ist, um eben so viel im Bogen rückt die Luftblase, welche immer die höchste Stelle einnimmt, von der Mitte nach einem Ende weiter. Man kann sich dies und den Grad der Empfindlichkeit einer solchen Libelle folgendergestalt erläutern: AB (Fig. 30) stelle eine Libelle in horizontaler Lage vor, der Bogen AB ihre Concavität, CB den Krümmungshalbmesser. Wird nun die Achse der Libelle um den Winkel B′NB gegen den Horizont geneigt, oder, kommt sie gleichsam in die Lage A′B′, so rückt der Bogen AB in die Lage A′B′, nehmlich in der Peripherie des Kreises weiter um den Bogen BB′, in Gradmaß gleich dem Neigungswinkel der Libelle gegen den Horizont. Denn es ist:

$\angle NB'M = \angle MBC$
$\angle NMB' = \angle BMC$, also
$\angle B'NB = \angle BCB' =$ Bogen BB' in Graden, u. s. w.

Je größer nun der Krümmungshalbmesser CB, desto größer wird die Länge des Bogens BB′, um welchen die Luftblase bei einem sehr kleinen Neigungswinkel der Libelle B′NB (etwa gleich 1 oder einigen Sekunden) fortrückt. Gesetzt, man verlangte, daß die Bogenlänge BB′ bei einem Neigungswinkel von 1 Sek. eine Decimallinie betrage, nehmlich die Libelle bei einem so geringen Neigungswinkel diesen beträchtlichen Ausschlag von 1 Linie geben sollte, so würde die Länge des Krümmungshalbmessers also gefunden:

Der Halbkreis ist = 180^0 = 180 . 60 . . 60″ = 648000″; also

1″ : 1 Lin. = 648000″ : 648000 Lin.

Also wäre der Halbmesser = $\frac{648000}{3,14\ldots}$ Lin. = 2063,69 Fuß.

Wäre im Gegentheil der Krümmungshalbmesser gegeben, so könnte man daraus für einen Neigungswinkel der Libelle von einer oder einigen Sekunden die Bogenlänge BB′, nehmlich die Empfindlichkeit der Libelle berechnen. Dieser Kalkul ist aber auf die Praxis nicht anwendbar, und soll hier nur dazu dienen, die Schwierigkeit in Anfertigung sehr empfindlicher Libellen nach einem vorher bestimmten Gesetz vor Augen zu legen. Die Kunst hat es übrigens in ihrer Gewalt, diese Empfindlichkeit sehr weit zu treiben. Ramsden, Reichenbach u. a. m. haben Libellen geschliffen, die auf 1″ einen Ausschlag von 2 Linien geben. Es mag sie aber Niemand gern brauchen, weil sie schwer in Ruhe zu bringen und außerordentlich zeitraubend beim Beobachten sind. Insgemein begnügt man sich schon mit $\frac{1}{2}$ Lin. Ausschlag auf 5″, wozu ein Krümmungshalbmesser ungefähr = 206 Fuß gehört. Es bleibt dem Leser überlassen, für andere Bedingungen ähnliche Betrachtungen anzustellen. Aus dem Gesagten erhellt deutlich genug, woher sich die Seltenheit genauer und empfindlicher Libellen schreibe. Ist eine solche nach der gebräuchlichen Cylinderform richtig angefertigt, so muß bei horizontalem Stand ihrer Achse die Luftblase genau in der Mitte zwischen beiden Enden der Röhre stehen; diese Stelle wird durch zwei von der Mitte gleich weit entfernte Striche bezeichnet, die am besten ins Glas selbst mit einem Diamant eingeschnitten sind, die Entfernung beider Abtheilungsstriche ist der mittlern Länge

der Luftblaſe gleich. Da ſich indeſſen die Länge der Blaſe bei verſchiedenen Temperaturen etwas ändert, nehmlich durch Wärme kleiner, durch Kälte vergrößert wird, ſo ſind von jenen beiden Strichen nach den Enden der Röhre hin noch mehrere Abtheilungsſtriche in gleichen Abſtänden, etwa von 1, $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ Lin. angebracht, welche zugleich dazu dienen, geringe Neigungen der Libelle gegen den Horizont zu ſchätzen. Wie viel eine jede ſolche kleine Abtheilung, nehmlich die Fortrückung der Luftblaſe bei geringer Neigung von einem Strich zum andern, in Sekunden betrage, wird nicht durch Berechnung nach der Geſtalt des Werkzeuges, ſondern durch Verſuche vermittelſt ſehr genauer Höhenwinkelmeſſer, wobei eine Libelle angebracht iſt, annähernd gefunden. Geſetzt, die Blaſe rückte bei einer Neigung der Libelle von 30″ um $7\frac{1}{2}$ Abtheilungen fort, ſo würde man daraus ſchließen, daß eine Abtheilung ungefähr 4″ Neigung entſpreche, alſo eine halbe Abtheilung 2″ u. ſ. w.

Es muß hier noch angemerkt werden, daß die Geſtalt einer Libelle nicht durchaus und vollkommen cylindriſch zu ſeyn braucht, wenn nur der obere bogenförmig ausgeſchliffene Theil derſelben ganz genau iſt; auch muß bei der Verbindung einer Libelle mit einem Winkelmeſſer, die Luftblaſe nicht nothwendig die mittelſte Stelle der Glasröhre beim horizontalen Stand des Werkzeuges einnehmen, wie wir weiterhin ſehen werden. Es iſt jedoch die oben erwähnte regelmäßige Geſtalt die gebräuchlichere und zu Berichtigung horizontaler Stellungen auch bequemer.

Die cylindriſchen röhrenförmigen Libellen haben nach den verſchiedenen Abſichten, wozu ſie dienen, verſchiedene Längen und Weiten. Man hat dergleichen von 4 bis 10 Zoll oder wohl noch länger. Die gewöhnlichſten beſtehen aus 6 Zoll langen, inwendig 4

bis 5 Linien im Durchmesser weiten Glasröhren, welche etwa bis auf $\frac{1}{8}$ mit reinem Weingeist gefüllt sind. Die Länge der Luftblase beträgt $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll, 2 bis 6 Zoll bei den größern Libellen. Größere Luftblasen sind beweglicher als kleinere; hat die Blase eine beträchtliche Länge, so muß bei einer geringen Neigung der Libelle von der höhern zur niedrigern Seite mehr Flüßigkeit abfließen, als wenn die Blase sehr klein ist; daher wird dann ihre Bewegung bemerkbarer.

Uebrigens sind die Libellen entweder bloße Glasröhren, oder sie sind eingefaßt, besonders in messingnen, oben so weit der Länge nach ausgeschnittenen Röhren, daß man die Luftblase und die Abtheilungen im Glase sehen kann, mit Füßen zum Aufstellen auf eine ebene Fläche, oder mit besondern Trägern zur festen Verbindung mit andern Instrumenten, z. B. Fernröhröhren. Die Libelle ohne Fassung ist der Seite, auf welcher sich die Luftblase befindet, gegenüber ihrer ganzen Länge nach, einige Linien breit, plan und matt abgeschliffen, um sie solchergestalt unmittelbar auf eine glatte Ebene, welche nivellirt, d. h. horizontal gestellt werden soll, z. B. auf das Planglas eines künstlichen Horizontes legen zu können. Sie muß schon beim Mattschleifen genau ajustirt seyn, so nehmlich, daß die Stelle der Luftblase, welche durch zwei oder mehrere Eintheilungsstriche genau bezeichnet wird, für den horizontalen Stand der untern mattgeschliffenen Fläche genau bestimmt ist; insgemein wird die Blase in die Mitte der Libelle versetzt, und sodann versuchsweise die untere horizontale Ebene angeschliffen. Die Anfertigung ist mit Schwierigkeiten verknüpft; indessen hat auch eine solche ungefaßte Libelle vor andern gefaßten mit Stellfüßen versehenen, den entschiedenen Vorzug, daß man sie nicht vor jeder Beobachtung zu berichtigen nöthig hat. Hierbei wird aber als eine unerläßliche

Bedingung vorausgesetzt, daß sowohl die mattgeschliffene Fläche als auch die Fläche, worauf sie zu liegen kommt, vollkommene Ebenen seyen. Beim Nivelliren eines künstlichen Glashorizontes können geringe zwischen beiden liegende Unreinigkeit, ein Staubkörnchen, schon beträchtliche Fehler bewirken.

Die Libelle, wie sie in der Figur 29 erscheint und zum Nivelliren ebener Flächen angewendet wird, ist an beiden Enden in metallene oder hölzerne Fassungen eingekittet; die eine Fassung endigt sich in zwei am besten spitzig zulaufende Füße von gleicher unveränderlicher Länge; der dritte Fuß B läßt sich durch eine sehr genaue Schraubenvorrichtung verlängern oder verkürzen, und dient sonach zur Berichtigung der Libelle.

§. 69.

Berichtigung der Libelle. (Fig. 31).

Soll nun vermittelst derselben eine ebene Fläche, die durch Stellschrauben gegen die Horizontalfläche nach allen Seiten beliebig erhöht oder erniedrigt werden kann, nivellirt und zugleich die Libelle berichtigt, nehmlich so gestellt werden, daß eine Ebene durch ihre drei Standpunkte (Spitzen der Füße) gelegt, horizontal ist, wenn die Luftblase in der Mitte der Röhre zwischen den Zeichen steht, so verfährt man also:

Man stellt die Libelle auf die ebene Platte eines Meßtisches oder künstlichen Horizontes nach der geradlinigten Richtung zweier Schrauben AB (Fig. 31.); auf dem Meßtisch kann man diese Richtung durch eine ausgezogene gerade Linie bezeichnen. Man bringt durch gegenseitige Erhöhung und Erniedrigung der zwei Stellschrauben an der untern Platte (bei gemeinen Meßtischen geschieht dies unvollkommener durch Bewegung in der Nuß) die Luftblase in die Mitte der Libelle. Hierauf

kehrt man dieselbe um; bleibt nun die Blase in der Mitte, so ist die gerade Linie AB zwischen beiden Schrauben horizontal und zugleich die Libelle nach der geforderten Bedingung berichtigt (verificirt). Rückt aber die Blase nach dem einen Ende hin, so ist AB gegen den Horizont geneigt, z. B. in der fehlerhaften Lage A′B′. Man verbessert diesen Fehler, d. h. man bringt die Luftblase wieder in die Mitte M, zur Hälfte durch Erhöhung der geraden A′B′ um den Bogen B′B (oder den Sin. dg), zur andern Hälfte durch Erhöhung der Libelle um B′B (oder dg = mn). Dadurch kommt diese in die Lage abdn, nehmlich die Luftblase in die Mitte M und die Endpunkte der Füße n, d in die Horizontale AB. Wollte man den Fehler durch die Erhöhung der Libelle allein verbessern, so käme sie in die Lage abgm, und die fehlerhafte Lage der Basis, nehmlich A′B′, bliebe unverändert, oder bg und am differirten noch um mn + dg = 2dg. Die Libelle wäre also nicht berichtigt, sondern ihr eines Ende um eben so viel über das andre erhöht, als es vorher erniedrigt war. — Der erwähnte erste Act der Berichtigung reicht indessen selten aus; man muß vielmehr die Libelle wieder umkehren, und im Fall die Blase nicht genau in der Mitte M stehen bleibt, die Berichtigung in ganz gleicher Weise wiederholen u. s. w.

Den Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens glaube ich dem Leser durch die Figur 31 sehr deutlich vor Augen gelegt zu haben, und einer weitern Auseinandersetzung nicht zu bedürfen.

Nachdem nun die gerade Linie AB in der untern Ebene horizontal gestellt, und zugleich die Libelle berichtigt worden, kann es weiter nicht schwer fallen, die ganze Ebene horizontal zu stellen oder zu nivelliren. Ist diese eine vollkommene Ebene, so darf man nur noch eine zweite gerade Linie in ihr, welche AB etwa

rechtwinklich durchschneidet, mit Hülfe der bereits berichtigten Libelle horizontal stellen u. s. w. Auf ganz ähnliche Weise geschieht auch die Berichtigung eines Fernrohrs mit Libelle an einem Winkelmesser oder Nivellirinstrument.

Man sieht ohne mein Erinnern, daß sich so mittelst einer vollkommnen berichtigten Libelle zugleich die geometrische Vollkommenheit einer Ebene prüfen läßt. Die meisten Meßtischplatten halten diese Prüfung nicht aus; doch ist hier ein geringer Fehler nicht von so gefährlichen Folgen, als bei einem Glashorizont, der zu genauer Messung von Höhenwinkeln dienen soll.

Ich will noch kürzlich ein paar bemerkenswerthe Umstände anführen, und damit die Betrachtung dieses Gegenstandes beschließen:

Bei jeder veränderten Stellung der Libelle muß man sie einige Zeit in Ruhe laßen, um den wahren ruhigen Stand der Blase zu erhalten, der bei geringen Neigungswinkeln und bei großer Empfindlichkeit derselben nur allmählig nach längerer oder kürzerer Zeit eintritt. Diesen Moment muß man bei sehr genauen Beobachtungen, besonders astronomischen, schlechterdings geduldig abwarten.

Zweitens, nach sichern Erfahrungen hat die ungleiche Erwärmung der Libellenröhre einen beträchtlichen Einfluß auf den Stand der Blase. Wird ein Stück der Röhre nach einem Ende hin mehr erwärmt als das andre, welches z. B. geschieht, indem das eine den Sonnenstrahlen ausgesetzt, das andre im Schatten ist, so wird das wärmere Stück ein wenig erweitert, und nach dieser Seite hin zieht sich die Luftblase von ihrem mittlern Stande weg. Sogar die Erwärmung durch die nahe daran gehaltene Hand kann eine solche Veränderung bewirken, wie Bohnenberger in seiner Schrift von der geographischen Orts-

bestimmung ꝛc. S. 105. richtig bemerkt. So lassen sich, wenigstens zum Theil, die von Vielen beobachteten Unregelmäßigkeiten der Libellen an Winkelmessern begreifen *). Man muß deswegen die ungleiche Erwärmung der Libelle bei genauen Beobachtungen zu verhüten suchen, um sich das Verdrießliche wiederholter Verification zu ersparen.

§. 70.

Clitometer, Bergwaage. (Fig. 32.)

Um die Neigungswinkel eines abhängigen Terrains (Bergabdachung) mit hinlänglicher Genauigkeit zu bestimmen, um ferner bei einer sehr gründlichen Basismessung, wobei die Maßstäbe gewöhnlich etwas gegen den Horizont geneigt liegen, nach Maßgabe dieser Neigung die schief genommenen Längen auf den Horizont von dem einen Endpunkt des Maßstabes reduciren zu können, mag ein nach Fig. 32. sorgfältig angefertigtes Instrument dienen.

Das Gestelle ECF von gutem Holze hat Aehnlichkeit mit der Setzwaage der Maurer und Zimmerleute. An dasselbe ist mit Schrauben ein eingetheilter Kreis, am besten von Metall, befestigt; für die Praxis wird es hinreichen, wenn die Bogen von 0^0 nach beiden Seiten bis 30^0 oder 45^0 gehen, oder der Bogen AB im Ganzen 90^0 beträgt; für Basismessungen ist

---

*) Von diesen Abweichungen spricht Lalande in seiner Astronomie; auch Delambre in Base du Système métrique etc. Tom. II. p. 190 sq. Delambre leitet sie aber von einer andern Ursache ab, welche ich in der Folge erwähnen will.

es mit 6° bis 10° genug. Anstatt des unvollkommenen Bleilothes bewegt sich am Gestell um C, als Centrum des Bogens AB, eine Alhidade CD, welche bei D einen Nonius als Index hat, der sich längs dem Limbus des Bogens AB fortschieben läßt. Vermittelst des Nonius kann man die Neigungs- (Abdachungs-) Winkel bis auf 1′ oder auch Theile einer Minute erhalten, welches für die allermeisten practischen Fälle eine überflüßige Genauigkeit giebt. An der Alhidade ist bei L eine Libelle so angebracht, daß die Luftblase in der Mitte steht, wenn die Alhidade CD vertikal liegt, und umgekehrt. Zeigt nun der Index der vertikalen Alhidade auf 0° des Limbus AB, so muß eine durch die Basis des Werkzeugs, nehmlich durch E, F gelegte Ebene horizontal, und demgemäß die Länge der Füße CE, CF berichtigt seyn. Wird ein solches genau eingerichtetes Werkzeug mit seinen Füßen E, F auf eine schiefe Fläche in einer Vertikalebene aufgesetzt, so muß begreiflich der Index der Alhidade, um diese in eine senkrechte Lage (die Luftblase an ihr Zeichen in der Mitte) zu bringen, um eben so viel Grade am Limbus fortbewegt werden, als der Neigungswinkel der Abdachung beträgt. Man kann auch die Beobachtung des Winkels durch Umkehrung des Werkzeuges in derselben Vertikalebene wiederholen, um mehr Gewißheit zu erlangen.

Diese Sache ist ungemein leicht zu begreifen; schwerer möchte es aber werden, ein solches Instrument geometrisch genau anzufertigen.

Wird weniger Genauigkeit verlangt, wie z. B. zum Profilzeichnen eines unebenen bergigten Terrains die Abdachungswinkel (Tiefen- und Höhenwinkel) selten genauer als auf 1° oder $\frac{1}{2}$° gemessen werden, so kann man sich mit einer einfachern weniger kostbaren Einrichtung recht gut behelfen. Statt der Alhidade mit Nonius und Libelle kann dann vom Centrum des einge-

theilten Bogens, nehmlich von C, ein sogenanntes Bleiloth herabhängen, dessen dünner Faden am Limbus, bei vertikalem Stand desselben, den Grad des Neigungswinkels abschneidet. So ungefähr war die von Rothe (Beschreibung einer neuen Bergwaage ꝛc. Leipzig, 1758) angegebene Einrichtung. Mayer beschreibt dieselbe und ihren Gebrauch sehr ausführlich in seiner pract. Geom. Bd. 3. S. 530 ꝛc. An der Rotheschen Waage hat zugleich die Entfernung der Füße EF eine bestimmte Länge = 10 Fuß, um bei einer schiefen Lage von EF und dem gegebenen Neigungswinkel = α, ohne weitläufige Rechnung, mittelst der natürlichen Sinustafeln, die Länge EF auf ihre horizontale Projection FG zu reduciren. Es ist hier FG = 10 . cos. nat. α in Füßen; ist z. B. der ∠α = 5°, so wird FG = 10 × 0,9961947 = 9,96 Fuß sehr nahe. Die Berechnung ist bequem, und die Einrichtung zu kleinern Operationen ganz brauchbar.

§. 71.

Astrolabium nach der gewöhnlichen Bedeutung. (Fig. 33.)

Die Einrichtung und der Gebrauch dieses Winkelmessers gründet sich auf den einfachen geometrischen Begriff, daß der Durchmesser (als Absehenlinie) um den Mittelpunkt eines in Grade eingetheilten Kreisbogens sich nach der Richtung zwei entfernter Objecte bewegen läßt, und somit auf dem eingetheilten Rand einen Bogen beschreibt, welcher in Gradmaß gleich ist dem gesuchten Sehewinkel vom Orte der Beobachtung aus nach bestimmten Punkten der entfernten Objecte u. s. w.

Die älteren Astrolabien bestehen entweder aus ei-

nem in halbe, auch Viertelgrade eingetheilten meſſingenen Halbkreis, oder was auf jeden Fall vorzüglicher iſt, aus einem Vollkreis. Um das Centrum C läßt ſich vermittelſt einer ſcheibenförmigen Vorrichtung, welche gewiß weit unvollkommener iſt als die neuere verbeſſerte Bewegung um einen genau centrirten Zapfen, eine Alhidade A B mit gewöhnlichen Dioptern (wie beim gemeinen Diopterlineal) herumdrehen. Der Index dieſer Alhidade iſt an den ältern Werkzeugen ein gemeiner zugeſpitzter Zeiger, an den neuern hingegen ein Nonius; an den beſſer gearbeiteten und ſorgfältiger getheilten Aſtrolabien trägt die Alhidade wohl zwei Nonien an beiden Enden A und B, in einer Bogenentfernung von 180°. Dieſe letztere beſſere Conſtruction dient dazu, die Richtigkeit des Inſtruments zu prüfen, und durch das arithmetiſche Mittel aus den Angaben beider Nonien dem wahren Werth des geſuchten Winkels näher zu kommen. Daher hüten ſich auch Mechaniker, welchen die Hülfsmittel zu einer ſehr genauen Theilung und Centrirung abgehen, vor zwei Nonien, und laſſen es lieber bei einem bewenden. Einen Nonius aber muß bei dem jetzigen Zuſtand der practiſchen Geometrie und der damit verwandten mechaniſchen Kunſt ein jedes noch ſo einfache Aſtrolabium haben; die ältern ohne Nonien, welche die Winkel kaum auf Viertelgrade genau geben, müſſen ganz verworfen werden, und haben ſolche zuweilen in Auctionen noch vorkommende Prachtſtücke jetzt wirklich nur den Werth von altem Meſſing.

Außer den Dioptern der Alhidade ſind noch zwei andere Dioptern D, E am Rande des Kreiſes oder in einer geringen Entfernung davon befeſtigt. Alle vier Dioptern ſind doppelt durchbrochen zum Behuf des Vorwärts- und Rückwärts-Viſirens. Die Diopternebenen von A, B und D, E müſſen nicht allein vollkommen

senkrecht auf die Ebene des Kreises stehen, sondern auch genau durch den Mittelpunkt desselben gehen, Bedingungen, welche die Anfertigung eines guten Astrolabiums, wenn es auch die Winkel nur auf 3 oder 2 Minuten genau geben soll, eben nicht leicht machen. Um der Bequemlichkeit des Transportirens willen richtet man auch zuweilen die Dioptern so ein, daß sie sich abnehmen, oder vermöge besonderer Scharniere niederlegen lassen.

Als eine kostbare, und wie mir scheint, entbehrliche Zugabe haben zuweilen Englische und nach ihnen auch Deutsche Künstler dem Astrolabium noch eine kleinere Boussole, auf der Mitte des Alhidadenlineals beigefügt. Hierdurch kann man den gesuchten Winkel auf doppelte Art, und, was wirklich bei einer Landvermessung oft Nutzen schafft, die Orientirung der visirten Winkel (Linien) gegen den magnetischen Meridian und somit gegen den wahren Meridian annähernd erlangen.

Die Diopternebenen von DE läßt man insgemein durch 0^0 und 180^0 des Gradbogens gehen. Bei einer einfachen Winkelmessung wird dann der Kreis so gedreht, daß die Visirlinie durch die unbeweglichen Dioptern DE nach einem der entfernten Zielpunkte geht, sodann wird der Kreis festgestellt und die Alhidade um ihr Centrum so weit herumgedreht, bis die Visirlinie durch die Dioptern AB nach dem zweiten entfernten Zielpunkte geht. In diesem Falle giebt die Bogengradzahl, worauf der Noniusinder zeigt, gleich unmittelbar den gesuchten Winkel. Es ist klar, daß man mit einem gut construirten Astrolabium die Messung eines terrestrischen Winkels auf eine leidliche Weise auch repetiren kann.

Das Gestelle und die Vorrichtungen zur Bewegung können bei einem solchen Werkzeuge so beschaffen seyn, wie oben beim Meßtisch erinnert worden. Es ist

gut, wenn man den Kreis in jede Lage gegen den Horizont bringen und in solcher befestigen kann; auch in eine schiefe, um Winkel in schiefgeneigten Ebenen als solche zu messen, in eine vertikale Lage, um Höhenwinkel damit zu bestimmen. In letzterm Falle aber muß eine Libelle mit der Alhidade des Astrolabium in Verbindung gesetzt werden. Große Genauigkeit in den Höhenwinkeln darf man jedoch auf diesem Wege nicht erwarten; eine solche kann nur durch eigne Quadranten zu Vertikalwinkeln und in einem möglichst vollkommenen Grade durch einen repetirenden Kreis erhalten werden.

Insgemein wird das Astrolabium nur in der niedern Erdmessung — Feldmeßkunst — zur Bestimmung der Winkel zwischen nahe gelegenen fixen Punkten gebraucht, und zwar will man hier die Winkel sogleich auf den Horizont reducirt erlangen. Zu dem Ende muß die Ebene des Kreises horizontal gestellt werden, wozu man die dosenförmige oder die röhrenförmige berichtigte Libelle gebraucht. Kleine Fehler in dieser horizontalen Stellung sind bei der beschränkten Absicht, welche man mit dem Astrolabium zu erreichen trachtet, als unbeträchtlich außer Acht zu lassen. Aus eben diesem Grunde wollte ich nicht rathen, ein solches Werkzeug mit einem Fernrohr zu versehen. Denn die Kosten für ein solches Instrument würden nicht viel geringer seyn, als für einen vollkommneren kleinern Repetitionskreis — Theodolit —, welcher die Winkel in jedem Fall um sehr Vieles genauer giebt. Zu feinern Operationen der Erdmessung, zu größern Triangulirungen wenn auch nur einer mäßig großen Erdstrecke — kleinern Provinz — sollte fernerhin durchaus kein andres Instrument mehr als ein Theodolit der Art, wie er im folgenden §. beschrieben steht, angewendet werden; das Astrolabium mit gemeinen Dioptern, die Winkelboussole nebst dem

Meßtiſch, ſollten nur zu kleinern Detailaufnahmen dienen.

Ein eigner Quadrant (Viertelkreis) zu Höhenwinkeln (Vertikalwinkeln), wie er in der practiſchen Aſtronomie, als Mauerquadrant, vorkommt, läßt ſich in der Erdmeſſung füglich entbehren. Zur weniger genauen Meſſung der Höhenwinkel bis auf Minuten dient beim Theodolit ein eigens hierzu angebrachter kleiner Halb- oder Vollkreis; zu ganz genauen Meſſungen der Art, wie ſie z. B. die aſtronomiſche Beſtimmung der Längen und Breiten auf der Erde verlangt, muß ein guter Bordaſcher Kreis gebraucht werden. Ein ſolcher macht andere ſchwerfälligere Inſtrumente, z. B. die ältern ſehr großen Sectoren, ganz entbehrlich.

§. 72.

Der Theodolit nach der neueſten Form, oder Repetitions-Theodolit. (Fig. 34.)

Dieſer Winkelmeſſer wird gegenwärtig faſt überall nach der in München zuerſt angewandten Form conſtruirt. Er beſteht aus einem Dreifuß (Trépied) ABC (Fig. 34.), deſſen Füße ſich durch drei Stellſchrauben erhöhen und erniedrigen laſſen; auf ſeiner Mitte trägt der Dreifuß eine Centrumhülſe a; in dieſer bewegt ſich das glockenmetallene Centrum (etwas koniſch zulaufender Zapfen) eines an der Seite mit doppelten Rändern verſehenen Horizontalkreiſes, worin wiederum der ſtählerne Zapfen (Centrum) der ebenfalls kreisförmigen Alhidade ſich herumdrehen läßt.

Der untere jener beiden Ränder wird von einer Klemme f gehalten, an der ſich eine gewöhnliche Mikrometerbewegung vorfindet, und welche zugleich durch

die Stange c mit einer Hülse von rothem Metall zusammenhängt, wodurch ihr eine geringe concentrische Bewegung um die Centrumhülse a gestattet wird.

An dieser Hülse von rothem Metall ist das Versicherungsfernrohr b befestigt, welches sich in der Vertikalebene etwas auf und niederbewegen läßt, und eben so das Knie d, welches mittelst einer Feder und der Kopfschraube e festgepreßt gegen einen der Füße A, B, C gehalten wird. Wenn man daher diese Kopfschraube e dreht, so kann man das Versicherungsfernrohr und die Klemme an der Stange c mikrometerartig um die Achse bewegen, und sowohl den Nullpunkt des Kreises als ein entferntes Object auf den Kreuzfaden des Versicherungsfernrohres einstellen.

Die kreisförmige Alhidade hi trägt mittelst der Stützen (Träger) k eine Queerachse, welche aus zwei mit den Grundflächen zusammen verbundenen Kegeln besteht; durch diese ist in senkrechter Richtung gegen die Querachse der Kegel das obere eigentliche Beobachtungsfernrohr mn durchgesteckt; bei g führt der Alhidadenkreis zugleich eine Klemme mit der gewöhnlichen Mikrometerschraube zu sanften Bewegungen.

An dem einen Ende trägt die Achse einen Vertikalkreis H zur Messung der Höhen- und Tiefenwinkel, bis zu der Genauigkeit von 1 oder $\frac{1}{2}$ Minute. Der zugehörige Nonius ist seitwärts am Träger befestigt. Sie kann mittelst eines Aufsatz-Niveau's (Libelle) horizontal gestellt werden *), und ruht an beiden Seiten in Pfannen von der Form eines Y, gleichwie bei einem

*) Die Verbindung einer Libelle mit dem Fernrohr eines Winkelmessers und die Berichtigung ihrer gegenseitigen Lage geschieht so, wie am Niveau. Siehe §. 81. 82.

Passagen-Instrument. Solche Pfannen oder Unterlagen heißen bei den Engländern Y's; ein cylindrischer Zapfen, so wie auch ein Fernrohr, ruhen in solchen Y's, welche Tangenten gegen jene bilden, offenbar fester und sichrer, als in den sonst üblichen runden kreisförmigen Pfannen. Die Form der Träger und des Fernrohrs wird zum Theil aus der Seitenansicht (Fig. 34.) deutlich werden.

Die Forderungen, welche sich an einen solchen Theodolit machen lassen, sind hauptsächlich diese:

Der Kreis muß genau getheilt und centrirt seyn; da der Alhidadenkreis vier Nonien, in Entfernungen von 90°, oder wenigstens zwei in der Entfernung von 180°, führt, so läßt sich die Richtigkeit der Theilung und Centrirung leicht prüfen.

Das obere Fernrohr muß sich genau in einer Ebene bewegen, welche senkrecht auf die Kreisebene durch den Mittelpunkt derselben geht, eine Bedingung, die durch die angebrachten Correctionsschrauben leicht zu erhalten und unerläßlich ist, weil sonst in die gemeßnen Horizontalwinkel beträchtliche Fehler kommen. Daher muß auch die Wellenachse parallel zur Kreisfläche seyn.

Da der Theodolit mehrentheils zur Bestimmung von Horizontalwinkeln unmittelbar, ohne vorgängige Reduction, angewendet wird, so muß der Hauptkreis vollkommen horizontal gestellt werden können. Dies geschieht mit Hülfe der Fußschrauben und der oben erwähnten Aufsatz-Libelle. (Siehe Libelle oben).

Bei gewöhnlichen weniger genauen Messungen bringt indessen, wie wir in der folgenden Abtheilung sehen werden, eine geringe Neigung der Kreisfläche gegen den Horizont — etwa von 1 oder $\frac{1}{2}'$ — keinen beträchtlichen Fehler in die gemessenen Horizontalwinkel; bei Arbeiten hingegen, die schon mehr ins Große gehen, muß man in dieser Hinsicht größere Sorgfalt anwenden.

Die Art, mit diesem ganz vortrefflichen Instrumente, welches zu allen terrestrischen Aufnahmen in jeder Beziehung das brauchbarste und selbst dem Bordaschen Kreise (dieser eignet sich mehr zu astronomischen Bestimmungen) vorzuziehen ist, Horizontalwinkel zu nehmen, besteht kürzlich in Folgendem:

Der Theodolit wird auf eine sehr feste Unterlage horizontal aufgestellt, und das untere Versicherungsfernrohr auf irgend einen Punkt des Horizontes, der ein deutliches Bild giebt, gerichtet.

Alsdann wird die Alhidade mit dem obern Fernrohr auf den Kreis so gestellt, daß der Nullpunkt (o Grad) desselben auf den Anfangspunkt eines der zwei oder vier Nonien einsteht. Man dreht nun, nachdem man die Klemme f geöffnet, zugleich Kreis und Fernrohr auf das entfernte Object, nehmlich einen bestimmten Punkt desselben, welcher den Anfang der Messung machen soll. Die feinere Einstellung auf den Mittelpunkt des Fadenkreuzes im Fernrohr geschieht bei geschlossener Klemme f mittelst der daran befindlichen Mikrometerschraube.

Steht dies alles so fest, so richtet man das obere Fernrohr bei ausgelöster Klemme g auf den zweiten entfernten Gegenstand; die genaue Einstellung geschieht auch hier bei geschloßner Klemme g mittelst der an ihr befindlichen Mikrometerschraube.

Nach dieser ersten Operation wird der Nonius der Alhidade den einfachen Winkel angeben; zur Controlle kann man auch die Bogen bemerken, welche die übrigen Nonien dabei beschrieben haben. Zu größerer Sicherheit nimmt man aus den Angaben aller (2 oder 4) Nonien, wenn sie um eine sehr geringe Differenz abweichen sollten, das arithmetische Mittel.

Löst man nun die Klemme f auf, so kann man das obere Fernrohr zugleich mit dem Kreis wiederum

auf das erste Object einstellen, von dem vorhin gefundenen Winkelpunkt der Alhidade ausgehend nochmahls auf das zweite Object einrichten, und sonach das doppelte Bogenmaß des gesuchten Winkels erlangen. Man kann überhaupt diese einfache Repetition so oft wiederholen, als man will, und bei gehöriger Vorsicht sich dem wahren Winkel gleichsam ins Unendliche nähern, wie im §. 62 bei der Repetition der Winkelmessung erklärt worden ist.

Höhen- und Tiefenwinkel lassen sich mit dem kleinen Vertikalkreis dieses Theodoliten ungefähr bis auf $\frac{1}{2}$ Minute genau messen, welches zu den allermeisten geodätischen Arbeiten völlig ausreicht. Die Vertikalität des Höhenkreises, ein Haupterforderniß bei Höhenmessungen, erlangt man hier mit großer Sicherheit, da der Kreis rechtwinklicht auf der Wellenachse abgedreht worden, und letztere mittelst einer sehr empfindlichen Hakenlibelle horizontal gestellt, auch während einer Beobachtung immer berichtigt werden kann. Zu genauern astronomischen Höhen- (Zenithdistanzen) Bestimmungen muß man ein andres Instrument, z. B. einen Bordaschen Kreis, gebrauchen.

Einfachere Theodoliten, als der hier beschriebene, etwa ohne Repetition und Versicherungsfernrohr, zu Triangulirungen vom zweiten oder dritten Range brauchbar, lassen sich nun gar leicht gedenken und mit weniger Kostenaufwand aufführen.

Einen Repetitionstheodolit, sehr ähnlich dem hier angegebenen, nebst zwei andern einfachern, angefertigt von Rößler in Darmstadt, beschreibt Eckhardt in einer kleinen daselbst 1813 erschienenen Broschüre.

Theodoliten, besonders nach Ramsden's Erfindung, sehr zweckmäßig jedoch ohne Repetition, wie solche noch jetzt in England mehrentheils angewendet werden, findet man beschrieben und abgebildet in

Zweite Abth. Besonderer und gemeinschaftlicher Theil.

Zweiter Titel. §§. 81

Eine neue gemeinschaftliche Ordnung ist es zu nennen, wenn die Gemeinschaft, welche bisher nur in Ansehung der Nutzungen bestand, auch in Ansehung der Substanz eingeführt wird, oder wenn die Theilung der Substanz aufgehoben wird.

81. Ist es zu einer neuen Regulirung der gemeinschaftlichen Angelegenheiten gekommen, so kann jeder Theilnehmer, wenn sich seine Verhältnisse wesentlich geändert haben, eine abermalige Regulirung verlangen.

Eine wesentliche Veränderung der Verhältnisse ist es, wenn sich die Zahl der Theilnehmer vermehrt oder vermindert hat, oder wenn sich die Größe des Antheils eines Theilnehmers geändert hat.

gesetzten Fernröhren bewegen, deren Achsen in jeder Lage des Kreises parallel zu dessen Ebene bleiben. Beide Alhidaden lassen sich an dem ausgedrehten, gleichsam in zwei Limben getheilten Rande des Kreises mit Klemmschrauben feststellen. Der Kreis nebst seinen Alhidaden kann mittelst einer stählernen Achse in einer starken messingenen Hülse B sanft und stetig umgedreht und so nach jedem Azimuth gerichtet werden. Die Achse steht unterhalb mit einer trommelförmigen mit Blei ausgegossenen Vorrichtung c in einer solchen Verbindung, daß durch eine Schraube ohne Ende, welche in den gezahnten Rand der Trommel eingreift, eine langsame Drehung derselben möglich wird.

Die obere Alhidade trägt an beiden Enden Nonien *), deren Bogen concentrisch mit dem Limbusbogen sind. Die Gestalt dieser gewöhnlich facettenartig zugetheilten Nonien, die Vorrichtung zur groben und sanften Bewegung der Alhidade mit ihren Nonien längs dem eingetheilten Limbus, so wie zur Feststellung derselben, muß man an irgend einem andern guten Winkelmesser, z. B. an einem Sextanten, nachsehen.

O und U sind zwei an Größe und Gestalt gleiche achromatische Fernröhre, durch besondere Ansätze auf die Alhidaden gestellt, mit Kreuzfäden zum Visiren nach einem bestimmten Punkt eines entfernten Objectes. Die Achse des obern Fernrohrs O liegt nach der neuern Construction in einer durch den Mittelpunkt des Kreises senkrechten Ebene, und ihr Umdrehungspunkt senkrecht über den Kreismittelpunkt; nach der ersten von Borda

---

*) Man bringt auch wohl 4 Nonien an; ich denke aber, zwei könnten ausreichen, und durch ihre Reibung den Limbus und dessen Theilung nicht so schnell abnutzen, als es vier thun.

ausgeführten Bauart war das obere Fernrohr etwas excentrisch. Das untere Fernrohr U muß, wie man leicht begreift, etwas excentrisch seyn, nehmlich seine Achse liegt ungefähr um 1,5 Zoll vom Kreismittelpunkt entfernt. Die Achsen beider Fernröhre müssen am Bordaschen Kreise mit der Kreisebene parallel seyn. Das Fadenkreuz ist auf die Oeffnung einer kleinen Röhre ausgespannt, welche man innerhalb der Fernröhren durch eine besondere Vorrichtung etwas rückwärts oder vorwärts bewegen, um ihre Achse drehen, und somit das Fadenkreuz genau in den Brennpunkt bringen kann. Zu diesem Kreuz, dessen Durchschnittspunkt in der Sehachse des Fernrohrs liegt, gebraucht man Silberfäden so fein als möglich oder noch besser Spinnefäden um die Parallelaxe beim Visiren so weit als nur irgend möglich zu vermindern.

Die Einrichtung der Fernröhre ist astronomisch; man sieht damit die Bilder umgekehrt, welches bekanntlich bei Beobachtungen nichts schadet. Um das deutliche Sehen des anvisirten Objectes und des Fadenkreuzes zu erlangen, läßt sich, wie gewöhnlich, die Okularröhre gegen die Objectivröhre gehörig verschieben.

Ueber den Nonien der obern Alhidade sind Mikroskope aufgestellt, welche eine mit dem Kreise parallele Bewegung und eine solche Verrückung gestatten, daß man nicht bloß die Theilungen der Nonien und des Limbus deutlich ablesen, sondern auch die Mikroskope über die ganzen Noniusbogen hinführen kann.

Die Hülse B der stählernen Achse ist mit einer gleich starken Welle in Form eines rechtwinklichten Kreuzes fest verbunden. Diese Welle ruht an beiden Enden mit ihren sorgfältig bearbeiteten Zapfen in ähnlichen Pfannen auf den Trägern T. Durch die Umdrehung dieser Welle um ihre Achse kann man demnach den

obern Kreis mit seinen Fernröhren in jede gegen den Horizont geneigte Lage bringen. Es muß aber die Achse dieser Welle gegen die Achse des Kreises genau rechtwinklicht gestellt seyn. Um den Kreis in irgend einer schiefgeneigten Lage fest erhalten zu können, hat man an einem Ende der Welle einen kleinen Quadranten befestigt, dessen Centrum in der Wellenachse liegt, und dessen Bogen bei der Drehung der Welle nahe am Träger concentrisch mit fortgeht. Durch eine besondre Fingerschraube S läßt sich der Quadrant, folglich auch der obere Kreis in jeder Lage feststellen. Auch bringt man wohl bei dem Quadranten eine Schraube ohne Ende zu feinern Bewegungen an, welche bei Azimuthalbeobachtungen und bei der Stellung des Kreises in eine Vertikalebene große Bequemlichkeit verschafft.

In die gezahnte Scheibe am untern Ende der Trommel greift eine Schraube ohne Ende ein, vermittelst deren sich der obere Kreis mit seiner Achse in der Hülse B sehr fein und sanft herumdrehen läßt; man kann aber auch auf eine ähnliche Weise, wie oben beim Meßtisch gezeigt wurde, die Schraube so weit von der gezahnten Scheibe entfernen, daß sie nicht in dieselbe eingreift; dann läßt sich der Kreis frei und geschwinder um seine Achse drehen.

Der gabelförmige Träger TT wird mit seinem untern Queerstück auf einer starken messingenen etwas hohen Säule befestigt; hierzu dienen ein besonderer Ansatz und die Fingerschrauben HH. Demzufolge besteht das ganze Instrument aus zwei Theilen; der obere mit seinem gabelförmigen Träger läßt sich beim Verpacken und Transport vom untern abnehmen. Der Träger muß genau über der Mitte des Fußes zu liegen kommen, aus Gründen, die sogleich in die Augen fallen.

Der Fuß der Säule K ruht in der Mitte eines eingetheilten, am Rande gezahnten Kreises, welchen

man insgemein Azimuthalkreis nennt. Um den Mittelpunkt desselben läßt sich mittelst eines sehr genau gearbeiteten Centrumzapfens die Säule K, also auch der obere Kreis, herumbewegen und nach jedem Azimuth stellen. An der Grundfläche der Säule ist, wie man in der Zeichnung sieht, die Alhidade des Azimuthalkreises befestigt. An einem Ende der Alhidade befindet sich ein Nonius mit Mikrometerschraube, welche in den gezahnten Rand des Kreises eingreift, um der Säule eine sanfte Bewegung zu geben; man kann diese Schraube auch auslösen, wenn man die Säule schneller herumdrehen will. Am andern Ende der Alhidade dient eine Fingerschraube zum Feststellen derselben und der Säule. Die Theilung und der Nonius am Azimuthalkreis geben die Azimuthalwinkel auf 1′ oder auch noch genauer.

Der untere Kreis und das ganze Instrument stehen endlich in fester Verbindung mit einem Fuß von drei starken Aermen, durch deren Enden drei vertikal stehende Stellschrauben gehen. Da diese etwas grobe Gewinde haben, und bei einer geringen Drehung den Kreis schon bedeutend in seiner Lage verändern können, so ist, wenigstens unter eine der Stellschrauben, noch ein kleiner Hebel mit einer feinern Schraube angebracht, um nach einer gröbern Bewegung durch die großen Stellschrauben noch eine sanftere unmerklichere Erhöhung oder Erniedrigung des ganzen Instruments erreichen zu können.

Da der Bordasche Kreis sehr häufig zur Messung von Vertikalwinkeln, Zenithdistanzen, angewendet, und hierbei die Methode der doppelten Repetition (§. 62.) mit Vortheil ausgeführt wird, so müssen zwei Libellen mit ihm in gehörige Verbindung gesetzt werden, die einige längere (ungefähr von 8 Zoll) mit dem untern Fernrohr, die zweite kleinere mit der Achse des obern Kreises. Die Figur 36. stellt den obern

Kreis in einer Vertikalebene und die gewöhnliche Verbindung der Libelle mit dem untern Fernrohr vor. Dieses dient hier bloß als Libellenträger; die Luftblase wird bei Bestimmung von Zenithdistanzen auf die Mitte zwischen ihre Zeichen eingestellt, in dem Augenblick, wo der Beobachter den Kreuzfaden des obern Fernrohrs auf ein entferntes (himmlisches) Object richtet. Das Nähere hierüber in der sechsten Abtheilung, wo von den Messungen mit dem Bordaschen Kreise gesprochen werden soll. Es ist nicht durchaus nothwendig, die Libelle gegen das Fernrohr so zu ajustiren, daß die Achse des letztern beim mittlern Stand der Luftblase horizontal werde.

Die Figur 37 deutet den obern Kreis in vertikaler Lage, von der Seite betrachtet, mit seiner Achse in der Hülse B ꝛc. an. Mit dieser Achse ist eine zweite kleinere Libelle (Queerniveau) durch Scharnier und Stellschraube so verbunden, daß sie sich etwas erhöhen oder erniedrigen läßt. Diese kleine Libelle dient, beurtheilen zu können, ob der einmahl mit Hülfe eines feinen Bleilothes vertikal gestellte Kreis während einer Beobachtung diesen Stand unverändert beibehält. Die Libelle kann dahin berichtigt werden, daß jene vertikale Lage des Kreises immer durch sie angezeigt wird. Davon ein Näheres in der sechsten Abtheilung.

Das bisher Gesagte wird, wie ich glauben darf, genügen, um solchen Lesern, die noch keinen Bordaschen Repetitionskreis gesehen, einen deutlichen Begriff zu verschaffen von den wesentlichen Bestandtheilen desselben und den Forderungen, die man an ein solches Werkzeug zu machen hat. Was die Bewegungen desselben anlangt, so folgt aus der Beschreibung, 1) daß beide Fernröhre gedreht oder befestigt werden können, jedoch unabhängig von einander; 2) daß der obere Kreis um seine Achse gedreht werden kann, indem die Säule K

gleiche, sowie in Band II und III von Bücher, von p. 1 bis, von der Wissenschaft der Sprachwissenschaft,

gen, daß Staubkörnchen, welche zwischen die an einander concentrisch laufenden Ränder des Limbus- und Alhidaden-Kreises möglicherweise kommen können, nach und nach diese Ränder etwas abzuscheuern vermögen u. s. w. Statt einer Trommel, als Gegengewicht, befinden sich am Reichenbachschen Kreis deren zwei; steht der obere Kreis zur Beobachtung von Zenithdistanzen in einer Vertikalebene, so haben die beiden Trommeln mit ihren Trägern gegen den untern Azimuthalkreis, der hier höher gestellt ist wie sonst gewöhnlich, eine solche Lage, daß man mit den Augen nicht bequem genug an den Index des untern Kreises gelangen kann; ein Uebelstand, der mir sehr auffält, und der sich durch eine etwas niedrigere Stellung des Azimuthalkreises wohl vermeiden läßt. Die Einrichtung der Drehungs-Achsen ist übrigens nach den besten Principien ausgeführt, wie man solche zum Theil auch in der früher erwähnten Schrift von Tabor angedeutet findet. Das Ganze ist vortrefflich gearbeitet, und kann, wenn dem erwähnten Fehler noch abgeholfen wird, wie ein genau angefertigter Bordascher Kreis, nach der oben beschriebenen Construction, recht gut die Stelle eines tragbaren Observatorium vertreten. Das Gewicht eines solchen Instrumentes wird aber nach der Natur der Sache immer viel beträchtlicher seyn müssen, als dasjenige einfacherer Winkelmesser. Auch muß bei allen guten Beobachtungen für eine äußerst feste, nicht wankende noch oscellirende Unterlage, wozu ein großer Granitblock sich immer am besten eignete, gesorgt werden.

§. 74.

Theorie des Spiegelsextanten.

(Fig. 38. 39. 40.)

Alle Winkelmesser, bei welchen durch gemeine Dioptern oder Fernröhre ein unmittelbares, directes Visiren nach zwei entfernten Objecten Statt findet, um das Maß des Winkels zu finden, den sie mit dem Ort (Auge) des Beobachters bilden, bedürfen eines festen Standes, irgend eines Stativs, Fußes mit unbeweglicher Unterlage. Zu dieser Klasse gehören alle bisher beschriebenen Winkelmesser, auch die repetirenden Kreisinstrumente.

Es finden sich aber oft Hindernisse, dem Winkelmesser einen festen Stand zu geben und ihn mit einem Stativ zu verbinden; man sieht wohl, daß dieser Fall besonders auf der See Statt findet, wo die Bestimmungen der Längen und Breiten durch eine astronomische Winkelmessung so äußerst wichtig sind.

Wahrscheinlich ist man also wohl schon in frühern Zeiten auf die Erfindung eines Winkelmessers bedacht gewesen, welcher einen festen Stand und daher ein Stativ entbehrlich machen könnte.

Die Erfindung eines solchen, hauptsächlich zu See, aber auch auf dem festen Lande sehr brauchbaren Instrumentes gebührt dem Engländer Hadley; denn wiewohl nach dem Bericht eines Englischen Schriftstellers Ludlam schon Newton die Idee zu einem reflectirenden Quadranten in einer Handschrift angegeben hat, so hat doch zuerst Hadley nach seinem eignen Ermessen die Sache wirklich in Ausführung gebracht. Die Construction und der Gebrauch des von ihm erfundenen Winkelmessers gründet sich auf die zweifache Reflexion eines Licht- oder Seh-Strahls vermittelst zweier

Spiegel. Man kann daher solche Winkelmesser, welche den einen Visirstrahl nach einem von den entfernten Objecten indirect durch Spiegelreflexion, den zweiten aber direct ohne Reflexion geben, katoptrische oder vielmehr katoptrisch-dioptrische nennen, wenn die vorerwähnten bloß dioptrische heißen.

Uebrigens führt ein solches Spiegelwerkzeug die verschiedenen Benennungen eines Spiegeloctanten, oder Spiegelsextanten, Spiegelquadranten oder auch eines Spiegelkreises, je nachdem der dazu gehörige Limbusbogen entweder 45° oder 60° u. s. w. ist. Das zuerst von Hadley angegebene und ausgeführte (im J. 1731) Instrument der Art war ein Octant von Holz, später von Messing. Solche hölzerne Octanten werden noch jetzt zum Theil von Englischen Seefahrern, in einer Größe von 10 Zoll oder mehr im Halbmesser, angewendet. Die dauerhafteren weniger biegsamen aus Messing, wie unsere Spiegelsextanten zu Lande zu seyn pflegen, verdienen den Vorzug.

Um die vollkommenere, besonders in Hinsicht der Theilung richtigere Construction der Octanten und Sextanten hat sich besonders der große Englische Künstler Ramsden sehr verdient gemacht. Sie werden gegenwärtig nicht allein in England, sondern auch in Deutschland von Künstlern, die mit genauen Theilmaschinen nach Ramsden ausgerüstet sind, in großer Vollkommenheit und Eleganz angefertigt. Indessen sind sie, auch die aus berühmten Englischen Werkstätten eines Troughton, Cary ꝛc. hervorgehenden nicht ausgenommen, selten von allen Fehlern der Theilung und der Centrirung ganz frei; man muß folglich, wenn man einen guten Sextanten zu größern genauern Vermessungen in Ermangelung eines repetirenden Theodoliten, oder zur Beihülfe, gebrauchen will, immer zuvor

die nicht mehr abzuändernden Fehler des Werkzeuges auszumitteln trachten, um sie bei Beobachtungen in Rechnung zu bringen. Diese Prüfung und Correction kann in der Art geschehen, wie die früher angezeigte von Benzenberg ist. Es können aber auch am Sextanten andere Fehler Statt finden, denen sich durch besondere Vorrichtungen abhelfen läßt.

Man findet in mehreren Schriften die theoretische Erklärung und Beschreibung des Spiegelsextanten; in keinem Buche aber so vollständig und gründlich, als in dem Werke von Bohnenberger:

Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten, mit Kupfern. Göttingen 1795.

Ich rathe jedem Leser, welcher sich einen Sextanten anschaffen, und damit operiren will, sich jenes Werk gleichzeitig mit anzukaufen und fleißig zu studiren. In dieser Voraussetzung glaube ich hier die Theorie und Beschreibung des Spiegelsextanten etwas kurz zusammenfassen zu dürfen.

Die unterscheidende Eigenthümlichkeit der Winkelmesser mit Spiegeln überhaupt gründet sich auf diesen optischen Satz:

Wenn ein Lichtstrahl auf eine ebene Spiegelfläche auffällt, so wird er nach der entgegengesetzten Seite (Richtung) unter demselben Winkel zurückgeworfen (reflectirt), unter welchem er auffiel, oder der Einfallswinkel und Zurückwerfungswinkel sind gleich; und zwar fallen die beiden Ebenen, welche man sich durch den einfallenden und zurückgeworfenen Lichtstrahl senkrecht auf die Spiegelfläche denkt, in eine Ebene zusammen. Die Erklärung dieser gewissen Thatsache versucht die Physik zu geben.

Hieraus fließen für die Theorie des Sextanten

folgende Sätze, die ich zur schnellern und deutlichern Uebersicht in wenig Worte mit abgekürzten Bezeichnungen in den Figuren zusammendränge:

1) AB und CD (Fig. 38.) mögen zwei ebene Spiegel vorstellen, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, und zwar sollen AB, CD die Durchschnittslinien der Spiegel in der Ebene bedeuten u. s. w. Stehen nun die spiegelnden Flächen einander zugekehrt und parallel, so wird ein unter einem schiefen (nicht rechten) Winkel auf den Spiegel CD auffallender Lichtstrahl LK unter gleichem Winkel nach der zweiten Spiegelfläche reflectirt u. s. w. In diesem Falle werden der auffallende und der zuletzt reflectire Lichtstrahl zu einander parallel seyn, und zwar liegen beide in einer durch die Spiegelflächen senkrechten Ebene. Der Beweis dafür ist ganz elementarisch. Es wird aber hierbei angenommen, daß der Spiegel AB eine solche Lage gegen CD habe, daß der reflectirte Strahl KH auf seine Fläche treffen kann u. s. w.

2) In Figur 39 stellen wieder AB, CD zwei Spiegel in der Lage wie in 1) vor; jedoch sind ihre Ebenen gegen einander geneigt; der Neigungswinkel ist, wie man sogleich erkennt, AEC = n. Der zuerst auffallende Strahl LK und der zuletzt reflectirte HI schneiden einander, gehörig verlängert in I unter dem Winkel LIH = o. Es ist immer dieser Winkel o doppelt so groß, als der Neigungswinkel n beider Spiegel. Der Beweis dafür ist nach den ersten Sätzen der Elementargeometrie, mit möglichst kurzer Bezeichnung also zu führen:

$$m = x + o$$
$$p = y + n, \text{ auch } r = v,$$
$$\text{also } p - r \text{ oder } m = y + n - v,$$
$$\text{daher } x + o = y + n - v,$$
$$\text{folglich } o = y - x + n - v = z + n - v$$

Nun ist $n = u - v$ und $z = u$, daher $z - v = n$, mithin $o = 2n$.

Da der Winkel o demzufolge unveränderlich bleibt, wenn sich der Neigungswinkel n beider Spiegel nicht verändert, so begreift man leicht, daß der reflectirte Strahl HI seine Richtung oder Lage gegen den einfallenden LK beibehält, wenn man beide Spiegel auch um die Drehungspunkte K, H zu gleicher Zeit so bewegt, daß ihr Neigungswinkel n unveränderlich derselbe bleibt.

3) In Figur 40 stellen wieder unter denselben Bedingungen, wie vorher, AB und CD zwei ebene Spiegel vor. Das kleine Planglas mit parallelen Flächen sey zur Hälfte, KD, belegt, also reflectirend (spiegelnd), die andre Hälfte CK unbelegt, durchsichtig. AB sey ein zweiter ganz belegter Spiegel, dem kleinern Spiegel CD nahe. Man denke sich CD in einer festen gegen eine Ebene senkrechten Lage, den größern Spiegel AB hingegen um ein fixes Centrum H beweglich, doch so, daß er immer in jeder Stellung senkrecht auf derselben Ebene bleibt, auf welcher CD steht.

L bezeichne einen fixen unveränderlichen Punkt, das Auge eines Beobachters oder den Visirpunkt durch ein gemeines oder Fernrohrdiopter; LKI einen dioptrischen Visirstrahl, der durch den unbelegten Theil von CD in seinem Mittelpunkt K nach einer unveränderlichen Richtung LI durchgeht. LK bedeute zugleich einen Lichtstrahl, der von L nach dem belegten Theil von CD bei K geht, oder umgekehrt von K nach L reflectirt wird. Die Richtung der Visirlinie LK, so wie die Stellung des Spiegels CD, seyen unveränderlich, folglich auch der Winkel $LKD = CKH$ unveränderlich. Gesetzt also, ein Lichtstrahl LK fiele auf DK in K unter dem Winkel LKD, so würde er unter gleichem Winkel auf den Spiegel AB reflectirt

werden, wenn letzterer eine schickliche Lage gegen CD hat; der reflectirte Strahl KH würde hierauf zum zweiten Mahl von AB unter dem Winkel AHI = BHK zurückgeworfen werden, und, wenn BHK kleiner als 90°, verlängert LKI in I schneiden. Fiele umgekehrt ein Lichtstrahl von I auf AB in H, so würde er in der Richtang HK auf den Spiegel DK fallen, und von hier zum zweiten Mahl reflectirt in der Richtung KL nach L gelangen. So begreift man, daß ein Auge in L einen sichtbaren (leuchtenden) Punkt I von einem entfernten Object zweimahl in der Mitte oder Scheidungslinie des Glases CD sieht, einmahl direct (dioptrisch) durch das unbelegte Glas, das zweite Mahl indirect (katoptrisch) durch doppelte Reflexion der beiden Spiegel. Da man nun beide Bilder vom Punkte I in derselben gleichen Richtung sieht, so fallen sie zusammen; das Spiegelbild muß, durch zweimahlige Reflexion geschwächt, nothwendig immer weniger Lichtintensität besitzen als das directe dioptrische, welches bei seinem Durchgang durch das unbelegte Glas weit weniger an Lichtstärke verliert.

Nach Nro. 2) muß auch hier der Winkel bei I doppelt so groß seyn, als der Neigungswinkel beider Spiegel. Man wird ohne mein Erinnern durch eine simple geometrische Construction begreifen, daß, je weiter der Gegenstand I in der Direction LI von den Spiegeln sich entfernt, desto mehr sich der Winkel HIL vermindern, und also auch die Lage der Spiegel AB und CD gegen einander der parallelen annähern müsse. Ist I ein Himmelskörper, so kann man den Winkel bei I, als folglich auch den Neigungswinkel der Spiegel als Null ansehen; dies ist auch schon bei weit entlegenen terrestrischen Objecten, Thurmspitze ꝛc. sehr annähernd richtig. Hierauf gründet sich die Methode, mittelst des Visirens nach einem sehr entlegenen sichtbaren

Object (Punkt), die beiden Spiegel eines Sextanten parallel zu stellen, und den sogenannten Inderfehler zu bestimmen, wie weiter unten gezeigt wird.

4) Der um den Mittelpunkt H bewegliche Spiegel (Inderspiegel beim Sextanten) werde aus der Lage AB, (Fig. 40.), in welcher der entfernte Punkt I zweimahl in der Direction LK gesehen wird, wie in 3) erklärt worden, in die Lage ab gedreht. Da KH seine Lage nicht verändert, weil $\angle$ LKD = CKH constant sind, so wird der Winkel BHK um den Winkel bHB verändert (vermindert), um welchen sich der Spiegel in seiner Stellung verändert hat; der Reflexionswinkel wird also jetzt bHK. Um eben den Winkel bHB muß nothwendig auch der zweite Reflexionswinkel AHI verändert (vermindert) werden. Da dieser aber durch die Drehung des Spiegels AB in die Lage ab um den Winkel AHa = bHB vergrößert worden, so muß dieser vergrößerte Winkel aHI um den doppelten Winkel bHB oder 2mn in Gradbogen = pq° vermindert werden, so daß nun Winkel aHF = bHK wird, folglich der Lichtstrahl HI in die Lage HF übergeht. Wofern also in der Direction HF bei dieser gegenseitigen Stellung beider Spiegel ein sichtbarer Punkt F liegt, so wird sein Bild durch doppelte Reflexion ins Auge bei L gelangen, und zwar in der Richtung LK, in welcher direct auch das Bild des Punktes I gesehen wird. Die Bilder beider Punkte I und F werden in K sich demnach zu berühren, oder zusammenzufallen (coincidiren) scheinen. Ist mit dem Inderspiegel AB eine Alhidade Am fest verbunden, so hat diese, wenn die Bilder von I und F zur Bedekkung gebracht worden, einen Bogen mn beschrieben, der die Hälfte des Winkels oder Bogens pq ist, welchen I und F mit dem Centrum oder Drehungspunkte H des Spiegels AB bilden. Der Bogen mn doppelt

genommen giebt folglich das Gradmaß des Bogens p q oder des gesuchten Winkels I H F. Eigentlich wird aber der Winkel verlangt, welchen F und I mit dem Visirpunkt (Auge des Beobachters) in L bilden. Da indessen L sehr nahe bei H und die Entfernungen der Punkte F und I dagegen gewöhnlich sehr beträchtlich sind, so wird der Fehler dieser Winkelexcentricität, nehmlich die Differenz der Winkel I H F und I L F so gering, daß sie meistens als verschwindend außer Acht gelassen werden kann; bei astronomischen Beobachtungen wenigstens ist sie immer gleich Null zu setzen. Man wird die Größe dieses Fehlers, welchen man gewöhnlich die Parallaxe des Sextanten nennt, aus dem beurtheilen, was in der folgenden Abtheilung vom Centriren der Winkel bemerkt werden soll.

Die hier vorgetragene Theorie des Sextanten muß ein Anfänger sich zuvörderst ganz geläufig machen, wenn er den Bau und Gebrauch dieses nützlichen Werkzeuges deutlich einsehen will. Ich glaube diese Theorie in Wort und Bezeichnung — etwas abweichend von andern Schriftstellern — so einfach und klar dargestellt zu haben, daß sie ein auch mit diesem Gegenstand noch gar nicht vertrauter Anfänger sogleich begreifen wird.

Nach dieser Theorie wird von einem Sextanten, Octanten u. dergl. gefordert, daß a) die Spiegel A B und C D vollkommen senkrecht auf der Ebene des Gradbogens stehen, wozu der Bogen m n in unserer Figur gehört; b) daß die Visirlinie L K und demnach die Achse eines, der Deutlichkeit wegen, hierzu gebrauchten Fernrohrs parallel laufe zur Ebene des Gradbogens; c) daß die anvisirten Punkte I und F in der Ebene des Instrumentes, oder vielmehr in einer Ebene liegen, welche durch K und H gelegt, parallel läuft zur Ebene des Gradbogens; d) daß endlich die Spiegel vollkommen ebene seyen, und wenn es gläserne sind, zugleich beide

Parallelgläser. Nach meinem Ermessen ließe sich wohl der unbelegte Theil des kleinern Spiegels CK', welcher auch spiegeln und in gewissen Fällen die Beobachtung stören kann, entbehren und durch eine andere Einrichtung ersetzen.

Die Fehler, welche daraus entspringen, daß die Construction und Stellung eines Sextanten den eben erwähnten Forderungen der Theorie nicht ganz genau entspricht, so wie die davon abhängenden Berichtigungsmethoden, findet man sehr ausführlich erläutert in dem angeführten Werke von Bohnenberger. Hier soll der Sextant so beschrieben werden, wie er der Theorie gemäß seyn müßte, aber nicht immer ist.

§. 75.

Construction des jetzt gebräuchlichen Sextanten. (Fig. 41.)

Alle Theile eines Sextanten, die Gläser ausgenommen, werden insgemein aus Messing bearbeitet. Die Gradbogen des Limbus und des Nonius macht man indessen lieber von eingelegten (eingesprengten) dünnen Silberplatten.

Da der Sextant jetzt schon sehr bekannt ist, und eine wirkliche Ansicht desselben in Hauptstädten leicht zu erlangen steht, so kann ich hier die Anzeige seiner einzelnen Theile kurz zusammenfassen. Hierbei habe ich einen mir gehörigen 5zölligen Sextanten aus Pistor's Werkstätte hieselbst vor Augen, welcher vortrefflich gearbeitet ist, und mir bei meinen Winkelmessungen zeither sehr gute Dienste geleistet hat.

AB ist ein Gradbogen von 170 halben Graden an meinem Sextanten; vor 0^0 ist noch eine Theilung von 10 halben Graden, welche man das excedens

nennt; ein ſolches excedens hat auch der Nonius nach beiden Seiten ſeines Bogens. Seiner Benennung zufolge braucht aber der Bogen eines Sextanten nur 120 halbe Grade, die hier ganze Grade vorſtellen, oder 60 ganze Grade = dem ſechsten Theil der Kreisperipherie zu enthalten. Der Halbmeſſer dieſes Bogens AB iſt mehrentheils 5 Zoll, ſonſt auch wohl 7 oder 10 Zoll. Ein 10zölliger Sextant iſt ſchon für das längere Halten mit der Hand etwas zu ſchwerfällig, und ein fünfzölliger genau gearbeiteter giebt faſt oder ganz dieſelbe Genauigkeit. Die Mittelpunktsplatte c beſteht mit dem Bogen AB durch vier Verbindungsſtücke M, N, R, S aus einem Stück, welches durchaus gleichförmig ungefähr $2\frac{1}{2}$ bis 3 Linien dick iſt. Dadurch erhält das Ganze hinlängliche Feſtigkeit. Oft haben die Sextanten noch mehr Verbindungsſtücke, ich glaube ohne Noth. Die Alhidadenregel F läßt ſich um das Centrum des Bogens auf der Mittelpunktsplatte C vermittelſt eines koniſchen Zapfens drehen, in einer ähnlichen koniſchen Hülſe, welche durch vier Schrauben an der untern Fläche des Sextanten befeſtigt iſt, und einen Fuß deſſelben bildet; zwei andere gleich hohe Füße befinden ſich an den Speichen M, N nahe am Gradbogen. Auf der runden Platte, in welche ſich die Alhidadenregel über der Mittelpunktsplatte endigt, iſt der um den Mittelpunkt des Bogens AB bewegliche Inderſpiegel G ſenkrecht durch drei Schrauben befeſtigt. Dieſer iſt in einen meſſingenen Rahmen gefaßt. Ihm gegenüber iſt der kleinere halbbelegte Spiegel K auf einem hervorſpringenden Theil der Speiche M in der Art aufgeſtellt, daß er eine Drehung um ſein Centrum und auch vermittelſt einer kleinen Schraube an ſeiner hintern Fläche eine berichtigende Neigung gegen die Fläche des Sextanten zuläßt. Auf ſolche Weiſe hat man es in ſeiner Gewalt, den kleinern Spiegel in ſeiner Lage

gegen den größern zu corrigiren, parallel zu stellen. An der Speiche N befindet sich, dem kleinen Spiegel gegenüber, ein Träger L, der sich durch eine künstliche Vorrichtung an der untern Fläche des Sextanten erhöhen oder erniedrigen läßt. Diese Vorrichtung wird aus Wortbeschreibung nicht verstanden, und muß wie viele andere künstliche Einrichtungen angeschaut werden. Durch ein rundes Loch oben am Träger läßt sich ein gemeines Diopterrohr oder ein zum Instrument gehöriges Fernrohr, welches astronomisch ist, einschrauben. Die Einrichtung muß vom Künstler so getroffen seyn, daß die Visirlinie oder die Achse des Fernrohrs, man mag sie erhöhen oder erniedrigen, immer parallel zur Ebene des Bogens bleibt. Zwischen dem großen und kleinen Spiegel befinden sich an meinem Sextanten 3 gefärbte Parallelgläser von verschiedenen Graden der Durchsichtigkeit. Diese sind um Scharniere beweglich, und lassen sich demnach zurücklegen, oder zu 3, 2 oder 1 derselben zwischen die beiden Spiegel in senkrechter Lage gegen die Ebene des Sextanten stellen. Eben so befinden sich um Charniere beweglich 3 gefärbte Parallelgläser hinter dem kleinen Spiegel, welche sich in die Höhe vor die unbelegte Glasfläche des Spiegels richten, oder auch niederlegen lassen. Ich glaube, daß je 3 gefärbte Parallelgläser überflüßig, und bei Sonnenbeobachtungen u. s. w. schon 2 ausreichen könnten. Man bedenke übrigens, wie schwer es hält, nur ein Parallelglas geometrisch genau zu machen, und daß die Fehler im Parallelismus dreier Gläser sich vermehren. Ich brauche diese 6 gefärbten Gläser nicht bei einer Sonnenbeobachtung, sondern blende das Licht durch ein sehr dunkles Parallelglas, welches ich zu diesem Behuf vor das Okular des Fernrohrs anschraube. Muß aber ein Winkel zwischen der Sonne und einem andern Object, dessen Licht keiner Blendung bedarf, genommen werden, so

lasse ich das dunkle Glas vor dem Okular weg, und blende das Sonnenbild durch eins, nehmlich das dunkelste, der vorerwähnten Gläser, ohne hierbei dem Auge zu schaden. Bei Beobachtung terrestrischer Objecte, selbst des Mondes, werden die gefärbten Gläser gar nicht gebraucht.

Die Alhidade F endigt sich wie gewöhnlich in einen Nonius, der an meinem Sextanten die Winkel auf $\frac{1}{2}$ Minute angiebt; durch Schätzung lese ich dieselben auf $\frac{1}{4}' = 15''$ ab. Die Theilung des Limbus könnte aber noch feiner seyn, so daß der Nonius die Winkel auf 15″ oder selbst auf 10″ angäbe, und die Schätzung nach dem Augenmaß auf 5″ ginge. Der Nonius steht in Verbindung mit einer Mikrometerschraube und einer Klemme am Rande des Limbus. Wird mittelst einer Handschraube die Klemme am Rande festgestellt, so läßt sich vermöge der Mikrometerschraube der Nonius längs dem Limbus sanft fortbewegen. Auf der Alhidadenregel F nahe dem Nonius ist der Träger eines Mikroskops befestigt, welches sich um denselben drehen, und über jede Stelle des Noniusbogens bringen läßt. In ein rundes Loch in der Mitte der Speiche R läßt sich ein Träger T einschrauben, dessen Griff von Holz ist. Vermittelst dieses Trägers hält man den Sextanten in der Rechten, wenn man aus freier Hand, ohne Stativ, Winkel nehmen will. Man kann indessen dies Werkzeug auch mit einem Stativ in Verbindung bringen; dann muß aber durch besondere Schraubenvorrichtungen dafür gesorgt werden, daß man die Ebene des Sextanten nicht allein in eine horizontale, sondern auch in jede andre gegen den Horizont geneigte Lage feststellen kann. In den meisten Fällen möchte die Regierung des Sextanten aus freier Hand, ohne Stativ, vorzuziehen seyn, weil die feste Stellung desselben in die Ebene schiefgeneigter Winkel zu viel Zeit erfordert. In gewissen Fäl-

len kann es nöthig werden, die Ebene des Sextanten horizontal zu stellen; dann müßte man denselben mit seinen drei Füßen auf eine Platte mit 3 Stellschrauben (Trépied) setzen, und seine Ebene mittelst einer aufgesetzten berichtigten Libelle, Röhrenlibelle oder Dosenlibelle, nivelliren. Zur Messung der Vertikalwinkel ließe sich ferner am Sextanten eine Röhrenlibelle fest anbringen; ich halte jedoch die Mitanwendung eines künstlichen Horizontes zu diesem Zweck für sicherer und bequemer.

Im Brennpunkt des achromatischen Fernrohrs, welches beim Visiren nach weit entlegenen Objecten statt des gemeinen Diopterrohrs angesetzt wird, sind über der Blendung zwei feine Silberfäden parallel zu einander, von der Achse ungefähr $\frac{1}{2}$ Linie abstehend, ausgespannt. Eben so können in dem Rohr des gemeinen Diopters ohne Gläser zwei parallele Fäden in gleichen Abständen von der Achse desselben, welche zur Ebene des Sextanten parallel ist, ausgespannt werden.

Der kleine Spiegel K wird so gestellt, daß er gegen den großen Inderspiegel G parallel steht, wenn der Inder, d. h. der Nullpunkt vom Nonius, mit welchem der Spiegel G sich gleichzeitig um gleiche Winkel fortbewegt, auf 0^0 des Limbus steht oder zeigt. Hierzu braucht man ein sehr weit entlegenes Object, z. B. die Spitze eines etwa 1 bis 2 Meilen entfernten Thurms, noch besser einen himmlischen Körper — ich brauche zu dieser Berichtigung immer die Sonne — deren dioptrisches und katoptrisches, oder directes und indirectes Bild (nehmlich von einem bestimmten Punkt, Grenze desselben) man in der Mitte des kleinen Spiegels zur Bedeckung bringt. Man sehe, was in dieser Hinsicht im §. 74. N° 3 am Ende erinnert worden.

Es leuchtet ein, daß, nachdem die parallele Lage beider Spiegel durch ein gleichsam unendlich weites Ob-

ject berichtigt ist, der Index des Nonius, nehmlich sein Anfangspunkt, nicht mehr auf 0^0 des Limbus zeigen, sondern um mehr oder weniger davon abstehen wird, wenn man nun das dioptrische und katoptrische Bild eines viel nähern Gegenstandes im kleinen Spiegel zur Bedeckung bringt. Diese Abweichung heißt insgemein der Inderfehler, ist aber eigentlich kein Fehler, wenigstens kein Fehler im Bau des Sextanten, läßt sich bei jeder Winkelbeobachtung ungemein leicht finden und in Rechnung bringen, wie wir im folgenden §. sehen werden. Es ist klar, daß dieser Inderfehler für irgend einen entfernten Punkt I bald negativ bald positiv wird, d. h. bald unter, bald über 0^0 des Limbus hinausfällt, je nachdem der Punkt, wornach die parallele Lage der Spiegel annähernd berichtigt worden ist, mehr oder weniger entfernt vom Beobachtungsort liegt, als der Punkt I. (Vergl. Fig. 40.)

Was die Form der einzelnen Theile an einem Sextanten anlangt, so erinnere ich nochmahls: Man muß ein so künstliches Werkzeug in natura mit eignen Augen anschauen.

§. 76.

Gebrauch des Sextanten zu Winkelmessungen. (Fig. 40.)

Wir wollen hier annehmen, ein Sextant entspreche den am Ende des §. 74. angezeigten Forderungen.

Es soll von dem Standort L aus (Fig. 40.) der Winkel gemessen werden, welcher zwei entfernte sichtbare fixe Punkte I und F mit dem Punkt L bilden, nehmlich der Winkel I L F. Dieser Winkel kann in einer durch L gelegten Horizontalebene oder auch in einer gegen diese schiefgeneigten Ebene liegen, schiefgeneigter Winkel.

Man halte den Sextanten an seinem Träger in der rechten Hand, und bringe seine Ebene nach dem Augenmaß — wozu einige Uebung gehört — in die Ebene des gesuchten Winkels. In dieser Ebene richte man den kleinen Spiegel CD gegen das Object I linker Hand, so daß man I in der Mitte dieses Spiegels durch das unbelegte Glas in der Direction LKI erblickt. Man suche nun den Inderfehler (Collimationsfehler) für die Entfernung des Punktes I, indem man den größern Spiegel so weit dreht oder in eine solche Lage bringt, daß jener Punkt I auch durch doppelte Reflexion in der Richtung LKI gesehen wird. Hat man dergestalt das dioptrische und katoptrische Bild des Punktes I in K zur Berührung (Bedeckung) gebracht, so sehe man zu, auf wie viel Grad und Minuten ꝛc. des Limbus der Inder (Anfangspunkt) des Nonius zeigt; dieser Punkt am Limbus ist der Anfangspunkt des Bogens für den gesuchten Winkel. Zeigt der Inder auf 0^0 des Limbus, welches wegen der sehr verschiedenen Entfernungen der Richtpunkte sehr selten der Fall ist, so ist auch der Inderfehler = Null. Zeigt aber der Inder auf einen Theilstrich des Limbus unter 0^0 (excedens), z. B. auf — 5, so ist der Inderfehler (— 5′) negativ; dieser Fehler muß begreiflicherweise am Ende der Messung zum Bogenmaß des gesuchten Winkels (von 0^0 des Limbus an gerechnet) addirt werden. Zeigte z. B. am Ende der Inder am Limbus in n auf $37^0\,13'$, so wäre der gesuchte Winkel = $37^0\,13' + 5' = 37^0\,18'$. Der Inderfehler muß immer negativ werden, wenn die parallele Stellung der beiden Spiegel durch ein sehr weit entlegenes Object annähernd berichtigt worden ist, der Punkt I hingegen dem Auge bei L weit näher liegt, und zwar wird dieser negative Inderfehler immer um so größer, je näher I an L liegt. Bei ganz nahe gelegenen Punkten kann der Fehler wohl bis auf

1° steigen u. ſ. w. Zeigt endlich unter den oben bemerkten Umſtänden der Inder auf einen Punkt des Limbus über 0° z. B. auf + 5′, ſo iſt der Inderfehler (+ 5′) poſitiv. Dieſer poſitive Fehler muß im Gegentheil am Ende der Meſſung vom Bogenmaß des geſuchten Winkels (von 0° des Limbus an gerechnet) ſubtrahirt werden. Wenn z. B. am Ende der Inder am Limbus in n auf 37° 23′ zeigte, ſo wäre wegen des Inderfehlers + 5′ der geſuchte Winkel = 37° 23′ — 5′ = 37° 18′. Unter welchen Umſtänden aber der Inderfehler für einen entfernten Punkt I poſitiv werden müſſe, kann der Leſer, ohne fernere Erklärung von meiner Seite, aus dem vorher Geſagten beurtheilen.

Iſt bei der Stellung des Inder auf 0° des Limbus die Berichtigung der Spiegellagen vermittelſt eines nur mäßig weit entfernten Punktes, z. B. einer ½ Stunde weit entlegenen Thurmſpitze ein für allemahl gemacht worden, ſo kann der Inderfehler für den Punkt I bald poſitiv bald negativ werden u. ſ. w.

Bei jeder Winkelmeſſung muß man durchaus zuerſt den Inderfehler für den links liegenden Richtpunkt I ſo genau wie möglich aufſuchen, und zuletzt in Rechnung bringen. Eine Nachläßigkeit in dieſer Hinſicht kann ſehr nachtheiligen Einfluß auf eine ganze Vermeſſung haben.

Nachdem der Fehler des Inder für den links liegenden Punkt I genau bemerkt worden, drehe man ferner mit der linken Hand die Alhidade und den damit feſt verbundenen größern Spiegel um das Centrum des Sextanten von der Linken zur Rechten ſo weit, bis das Bild des Richtpunktes F rechts, durch doppelte Reflexion in der Richtung L K, nehmlich dicht am Punkte K des belegten Spiegels K D erſcheint, ſo daß alſo die beiden Bilder von F und I einander in K zu berühren (bedecken) ſcheinen. Hat man dies ſo genau

wie möglich erreicht, so ist nach §. 74. der Winkel bHB = ½ Winkel FHI, oder Bogen mn = ½ Bog. pq. Dem zu Folge giebt die wahre Gradzahl des Bogens mn, welchen der Index am Limbus beschrieben, doppelt genommen das Gradmaß des Winkels FHI. Halbe Grade am Limbus des Sextanten werden daher als ganze Grade betrachtet, und durch die aufgestochenen Ziffern als solche notirt. Wäre z. B. der Bogen mn = 60 halbe Grade, so würde der gesuchte Winkel = 60° seyn u. s. w. Mithin kann man mittelst eines Sextanten, dessen Bogen eigentlich seiner Benennung gemäß nur 60° = 120 halbe Grade seyn sollte, bloß Winkel von 0° bis 120° messen. Größere Winkel nahe an 180° oder darüber muß man durch Zwischenpunkte (natürliche oder künstliche Signale) in kleinere Winkel gleichsam zerlegen, und die einzeln gemeßnen Winkel summiren. So kann man alle Winkel rund herum im Horizonte messen und summiren; giebt diese Summe 4R = 360° genau oder doch bis auf eine sehr geringe Differenz sehr nahe, so zeugt dies Resultat für die Güte des Sextanten.

Bei der erwähnten Operation ist der Winkel IHF gemessen worden, dessen Centrum der Drehungspunkt H des Inderspiegels ist. Eigentlich verlangt man aber den Winkel ILF vom Visirpunkt L aus betrachtet. Da die Punkte L und H am Sextanten nur um ein paar Zolle von einander entfernt liegen, so beträgt der Fehler des gemessenen Winkels wegen der Parallaxe bei beträchtlichen Weiten der Punkte I und F so wenig, daß er meistens ganz außer Acht gelassen werden kann. Auch ziehen diesen Fehler selbst die vorzüglichsten Schriftsteller, z. B. Bohnenberger, in gar keine Betrachtung.

Auf die Größe des Winkels IHF hat die Entfer-

nung des Punktes F gar keinen Einfluß; ein in der Richtung HF viel weiter entfernter Punkt F' giebt denselben Winkel. Hingegen kann die größere oder geringere Entfernung des Punktes I den Inderfehler kleiner oder größer machen. Bringt man den Mittelpunkt H des Sextanten so genau wie möglich senkrecht über den Stationspunkt auf der Erde, so verschwindet auch der an sich ganz unbedeutende Fehler wegen der Parallaxe. Die entfernten Objekte I und F sind keine Punkte, sondern geben Bilder von einer größern oder geringern Ausdehnung; diese Bilder werden daher im kleinen Sextantenspiegel zur Berührung oder Bedekkung (mit Fernrohr) gebracht; indessen nimmt man immer in beiden Bildern gewisse bestimmte Grenzpunkte oder Scheidungslinien für Richtpunkte an, z. B. bei entfernten Thürmen ihre obersten Spitzen oder ihre mittlern Durchschnittslinien (gleichsam Achsen), bei Himmelskörpern die äußersten Ränder.

Das katoptrische Bild vom rechtsliegenden Object F verliert durch den zweimaligen Contact mit Spiegeln, welche Luft verschlucken und in sich binden, beträchtlich an Lichtintensität, noch viel schwächer wird dies Bild bei seinem Durchgang durch die Gläser eines Fernrohrs. Bei starker Beleuchtung des Vordergrundes und des Inderspiegels kann das katoptrische Bild von einem sehr entfernten Object im Fernrohr so schwach werden, daß man es kaum bemerkt; ein Umstand, der die Winkelmessung mit dem Sextanten oft sehr erschwert. Bei nahen Gegenständen wird man lieber mit bloßen Augen, wenn sie klar sehen, durch das gemeine Diopterrohr als vermittelst des Fernrohrs visiren.

Braucht man das Fernrohr, dessen Sehachse sich mittelst der Schraubenvorrichtung am Träger gegen die Ebene des Sextanten mehr oder weniger erhöhen läßt, so kann man das Objectiv gegen den kleinen Spiegel

so stellen, daß beide Bilder, das dioptrische und katoptrische (reflectirte), bei ihrer Bedeckung oder Berührung ungefähr gleich hell erscheinen.

Nach §. 74. wird sich die Lage der beiden Bilder, die man im kleinen Spiegel einmahl zur Bedeckung gebracht hat, nicht ändern, wenn sich das Instrument um sein Centrum in der Ebene des Winkels etwas bewegt u. s. w. So begreift man, warum ein Sextant eines Statives nicht nothwendig bedarf, und in so fern nicht allein zur See, sondern auch auf dem festen Lande sehr nützliche Dienste leistet.

Indessen ist ihm da, wo man dem Winkelmesser einen festen Stand geben kann, ein Repetitions-Theodolit nach der vorher beschriebenen Art nach meiner Ueberzeugung und nach den von mir deshalb angestellten vergleichenden Versuchen immer vorzuziehen. Ein Theodolit giebt erstlich die terrestrischen Winkel sogleich auf den Horizont reducirt, wie solche insgemein verlangt werden; diesen Vortheil können Spiegelwerkzeuge ihrer Natur nach nicht verschaffen. Letztere gewähren ferner ihrer Lichtschwäche wegen für terrestrische Objecte nicht den Grad der Schärfe und Deutlichkeit im Visiren, wie ein Theodolit mit Fernrohr. Dieser ist weniger Fehler in seiner Structur ausgesetzt, als ein Sextant, bedarf daher weniger Correctionen. Endlich gewährt ein Theodolit den ausgezeichneten Vortheil einer unmittelbaren Repetition der Winkelmessung. Es läßt sich zwar, wie D. Benzenberg in einem Aufsatz des astron. Jahrb. von Bode, 1806, bemerkt, etwas dieser Repetition Aehnliches mit einem Sextanten vornehmen, indem man damit einen Winkel wiederholentlich mißt, und aus allen Beobachtungen das arithmetische Mittel nimmt, so daß sich hier die Fehler entweder gegen einander geradezu aufheben, oder die übrigbleibenden, durch die Zahl der Beobachtungen dividirt,

vermindern; allein der Grad von Genauigkeit und Zuverläßigkeit, wie ihn der repetirende Theodolit oder bei astronomischen Beobachtungen der multiplicirende Bordasche Kreis gestattet, ist durch das sehr verschiedene Multipliciren der Winkel mit dem Sextanten sicherlich nie zu erreichen. Seine Anwendung sollte daher bei sehr genauen Landesvermessungen nur auf solche Fälle beschränkt werden, wo ein fester Stand des Theodoliten nicht möglich ist, z. B. wenn man beim Trianguliren von einzelnen Thürmen aus nach andern Richtpunkten visirt; sowohl wegen des gewöhnlich sehr beengten Raums als auch wegen der elastischen Bewegung (Federung) der Thurmspitzen kann man hier den repetirenden Kreisen keinen ganz festen Stand geben. Auch bei kleinern Triangulirungen und Aufnahmen, wo die Horizontalwinkel oder Vertikalwinkel etwa nur bis auf 1′ genau verlangt werden, ist der Sextant ein sehr bequemes und brauchbares Werkzeug.

Für solche kleinere Messungen werden jetzt, nach dem Muster des größern Sextanten von Englischen und Deutschen Künstlern — hier von Pistor — auch kleine, etwa 2zöllige, Dosensextanten (box sextants) angefertigt, deren nähere Beschreibung ich hier übergehen muß. Diese bequemen kleinen Winkelmesser, welche man in der Tasche bei sich führen kann, geben die Winkel bis auf 2′ oder auch 1′ genau; weiter möchte sich aber ihre Genauigkeit selten erstrecken. Ich besitze einen solchen Dosensextanten mit kleinem achromatischen Fernrohr, aus der Werkstatt des Künstlers Cary in London, sehr gut gearbeitet und getheilt u. s. w., womit ich den Sonnen- oder Mond-Durchmesser jederzeit bis auf 1′ und durch ungefähre Schätzung auch wohl bis auf $\frac{1}{2}$′ genau erlange.

Was sonst noch über die Handhabung eines Sextanten erinnert werden könnte, das erlernt man am

beſten durch Uebung und aufmerkſamen Gebrauch des Inſtrumentes ſelbſt.

§. 77.

Meſſung der Höhenwinkel (Vertikalwinkel) vermittelſt des Sextanten und eines natürlichen oder künſtlichen Horizonts.

(Fig. 42.)

Es ſey A ein Standpunkt (Beobachtungsort) auf der Erdoberfläche; MH bezeichne den durch A gehenden (gelegten) ſcheinbaren Horizont, S irgend ein über dieſen Horizont erhöhtes Object, z. B. die Sonne. Denkt man ſich durch SA eine Vertikalebene auf die Ebene des ſcheinbaren Horizonts gelegt, ſo wird dieſe von jener in MAH geſchnitten, und es heißt der Winkel MAS = m der Höhenwinkel (Elevationswinkel) des Punktes S über A, d. h. über den ſcheinbaren Horizont von A. Steht AZ ſenkrecht auf dem Horizont von A, ſo liegt ſie auch in der Vertikalebene SAM; der eingebildete Punkt Z heißt das Zenith für A und der Winkel SAZ heißt die Zenithdiſtanz des Punktes S in Beziehung auf den Punkt A. Die Zenithdiſtanz iſt das Complement des Höhenwinkels zu 90^0 und umgekehrt. Demnach iſt es ganz gleichgültig, welchen man von beiden Winkeln mißt, um das Gradmaß des einen zu erhalten.

Soll nun mit einem Sextant der Höhenwinkel MAS gemeſſen werden, ſo kann dies auf zwei verſchiedene Arten geſchehen:

1) Wenn AM eine ſichtbare Horizontale iſt, die in M irgend einen natürlichen oder künſtlichen deutlichen Bewegungspunkt hat, ſo mißt man den einfachen Winkel SAM auf ganz ähnliche Weiſe, wie irgend einen

andern horizontalen oder schiefgeneigten Winkel nach §. 76.

Man hält nehmlich in A den Sextanten so, daß seine Ebene in die Vertikalebene des Winkels S A M fällt, — wobei Uebung das Beste thut, — richtet die Achse des gemeinen Diopters oder Fernrohrs auf den Punkt M, so daß man M durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels erblickt, und bewegt bei unverrücktem vertikalen Stand des Instruments die Alhidade ꝛc. so weit fort, bis das katoptrische reflectirte Bild von S mit dem dioptrischen M zur Berührung oder Bedeckung kommt, so zeigt der Index, dessen Fehler für M vorher genau bestimmt worden, den Winkel S A M in Graden, Minuten ꝛc. an. Siehe §. 76. — Die vertikalstehende Ebene des Limbus hat hierbei der Beobachter zur Linken, und den untern Richtpunkt M im Horizont sieht er direct durch den kleinen Spiegel. In dieser beschränkten Beziehung auf Höhenbeobachtungen zur See nennen denselben die Engländer das Horizontalglas. Man wird aber, besonders wenn man einen Sextanten zur Hand hat, bald einsehen, daß man die Methode der Beobachtung auch umkehren kann, indem man die vertikal stehende Ebene des Limbus zur Rechten hat, dann den obern Richtpunkt S direct durch den kleinen Spiegel betrachtet u. s. w. Eine ganz ähnliche Umkehrung kann ebenfalls bei Messung von Horizontal- und andern Winkeln Statt finden, welches keiner weitern Erklärung bedarf. In mehreren Fällen kann es gerathener seyn, statt der einen Beobachtung die umgekehrte oder auch zu größerer Sicherheit beide Methoden zugleich anzuwenden. So viel mir bewußt ist, vergessen die Schriftsteller, welche vom Sextanten handeln, diese Umkehrung anzuzeigen. Bei Beobachtungen von Sonnen- Mond-

oder Stern-Höhen zur See nimmt man den natürlichen Meereshorizont zu Hülfe; die äußerste Begrenzung deſſelben wird auf offener See durch eine kreisbogenförmige Linie beſtimmt, in welcher der Himmel (Luft) und der Waſſerſpiegel rund herum einander zu berühren (zuſammenzutreffen) ſcheinen. In dieſer Begrenzung wird daher der ſichtbare Punkt M unſrer Figur liegen. Bei Nacht hat natürlich eine Beobachtung auf ſolchem Wege ihre Schwierigkeiten; der Meereshorizont kann durch große Dunkelheit oder zwiſchenliegende Hinderniſſe, z. B. Landerhöhungen auch wohl ganz verſteckt werden. — Bei Höhenbeobachtungen zu Lande hat man ſelten oder nie einen natürlichen zuverläßigen Horizont. Gilt es nur wenig genaue Höhenmeſſung, ſo beſtimmt man die Horizontale A M nach dem Augenmaß durch ein ſichtbares Merkmahl in M, A u. ſ. w. Handelt es ſich hingegen um ſehr genaue Meſſung eines Höhenwinkels S A M, ſo muß man ſchlechterdings irgend einen künſtlichen Horizont in Verbindung mit dem Sextanten gebrauchen. Was die Correction des auf erwähnte Art gefundenen Höhenwinkels, wegen der Refraction und des ſcheinbaren Horizontes, anlangt, ſo ſehe man, was hierüber in der vierten Abtheilung gelehrt wird.

a) Wenn A M eine künſtliche Horizontale in einer ſpiegelnden Ebene iſt, ſo mißt man den doppelten Winkel S A M, nehmlich S A U (Fig. 42.). Einen künſtlichen Horizont (Horizontalebene) für einen Punkt A auf der Erdoberfläche erhält man auf zweierlei Arten:

a) Durch die ruhig ſtehende Oberfläche einer Flüßigkeit, welche wie ein ebener Spiegel die auffallenden Lichtſtrahlen reflectirt. Daher hat man Queckſilberhorizonte, Oelhorizonte u. dergl. in

Vorschlag gebracht. Einen künstlichen Quecksilberhorizont beschreibt unter andern Bohnenberger a. a. O. Da die Oberfläche eines solchen Horizontes durch jede selbst schwächere Erschütterung in ihrer Nähe, auch durch Wind in Bewegung gesetzt, und somit seine ebene horizontale Fläche mehr oder weniger gestört wird, so wird dadurch sein Gebrauch sehr eingeschränkt.

b) durch die völlig ebene spiegelglatte Fläche eines festen Körpers, welche vermittelst einer Libelle horizontal gestellt, nivellirt wird. Man wendet hierzu ebene Metallspiegel oder unbelegte Glasspiegel an. Die Glashorizonte sind brauchbarer und dauerhafter, als die metallenen.

Einen Glashorizont, welchen zuerst der Graf v. Brühl in London und Hr. v. Zach angaben und näher beschrieben, will ich hier kürzlich so schildern, wie ich mir zu meinem Gebrauch einen solchen selbst habe anfertigen lassen.

Das wesentliche Hauptstück desselben besteht in einer kreisrunden Glasscheibe, etwa 5 Duod. Zoll im Durchmesser und gegen 3 Linien dick, auf der einen Seite mit der größten Sorgfalt vollkommen plan, auf der andern Seite aber matt geschliffen. Auf die Farbe des Glases kommt wenig an, dunkle Gläser scheinen indessen etwas schärfer begrenzte Bilder, obwohl mit geringerer Lichtintensität, ins Auge zu senden, als ganz weiße. Mein Glasspiegel hat dunkelgrüne Farbe, und giebt die reflectirten Bilder ungemein rein, klar und scharfbegrenzt in noch höherm Grade, als sich ohne dem die Bilder der Objecte directe dem Auge darstellen; andere nehmen hierzu dunkelrothes Glas u. s. w. Man muß, um einen guten Horizont zu erlangen, mit der größten Aufmerksamkeit nur eine völlig reine, blasen- und schnieren-freie Glasscheibe hierzu aussuchen. Auch

muß der Spiegel so lange berichtigt werden, bis er alle Prüfungen auf geometrische Planität besteht. Das vollkommene Planschleifen ist allerdings eine der schwierigsten Aufgaben der practischen Optik, aber durch Geschicklichkeit und eigensinnige Beharrlichkeit des Optikers läßt sie sich gewiß auflösen. Mein Spiegel ist plan, so weit nur das Auge und die strengsten Prüfungsmethoden es zu erweisen im Stande sind. Die beste Prüfung besteht darin, daß man mit dem Sextant das dioptrische und katoptrische Bild der Sonne an ihren äußersten Rändern zur Berührung bringt, — man braucht hier das Fernrohr —, und somit den Sonnendurchmesser in Minuten ꝛc. mißt, hierauf aber dasselbe mit dem vom nivellirten Glashorizonte reflectirten Sonnenbilde thut. Bleiben hierbei die Sonnenbilder genau in Berührung, oder zeigt sich der Sonnendurchmesser bei beiderlei Beobachtungen gleich, so ist die untersuchte Stelle auf dem Spiegel plan; im Gegentheil werden sich die beiden Bilder bei gleicher Stellung des Index trennen oder in einander verschieben. So lassen sich alle Stellen des Planspiegels untersuchen. Man kann auch von einer scharfbegrenzten Thurmspitze das dioptrische und das vom Glashorizont reflectirte katoptrische Bild im Fernrohr des Sextanten sehr genau zur Berührung bringen, und nun an verschiedenen Stellen des Glashorizontes untersuchen, ob sie unverändert in Berührung bleiben u. s. w. Die groben Fehler der gemeinen Planspiegel werden geradezu schon durch die Verzerrung der von ihnen reflectirten Bilder — besonders gerader Linien — ganz leicht bemerkt.

Das Gestell, worauf der Spiegel gelegt wird, besteht aus einer dosenförmigen hölzernen Fassung mit einer oben ausgedrehten Vertiefung mit 3 kleinen kugelförmigen Aufsätzen von Siegellack, worauf man das Glas legt, und 3 elfenbeinernen Stellschrauben, welche

durch drei Muttern von Elfenbein in dem untern hervorstehenden Rand gehen. Man kann auch Marmor, Serpentin, Porzellan ꝛc. zur Fassung nehmen.

Außer diesem kleinen Gestell, welches bloß zur Messung von Höhenwinkeln dient, habe ich mir noch ein andres mit etwas hohen Füßen machen lassen; diese tragen einen oben vertieft eingedrehten messingenen Ring, in welchen ich den Glashorizont mit der Spiegelfläche nach unten einlegen kann. Die obere mattgeschliffene Fläche ist nach mehreren Berichtigungen parallel zur untern Spiegelfläche gemacht worden. So kann ich durch Nivelliren der obern matten Fläche mittelst einer aufgesetzten Libelle auch zugleich die untere Spiegelfläche in den scheinbaren Horizont bringen, und nun auf eine ähnliche Weise, wie man Höhenwinkel mit dem Sextanten und künstlichen Horizont nimmt, auch Tiefenwinkel (Depressionswinkel) messen. Geht die Genauigkeit hierbei auch nur bis auf 1′, so reicht sie zu dem gewöhnlichen Behuf, besonders zur Reduction der schiefgemessenen Winkel auf den Horizont, wie ich glaube, hinlänglich aus.

Das Horizontalstellen, Nivelliren, des künstlichen Glashorizontes (ein Quecksilber- oder Oel-Horizont bedarf dessen nicht) vermittelst der Libelle ist schon in dem Artikel: Libelle angezeigt. Bei genauen Winkelmessungen brauche ich gewöhnlich eine ungefaßte unten angeschliffene Röhrenlibelle, bei weniger genauen Messungen hingegen eine Dosenlibelle.

Man hat auch versucht, eine Dosenlibelle, vermittelst dreier Stellschrauben, zugleich zu einem künstlichen Horizont zu machen. Die völlig ebene Oberfläche des Glasdeckels vertritt hier die Stelle des Spiegels, und dieser wird nivellirt, indem man durch die, gewöhnlich metallenen, Stellschrauben die Luftblase in die Mitte bringt. Ein solches Werkzeug hat viele Vorzüge, wenn

es genau gearbeitet ist; ich glaube aber, daß es nur mit sehr vieler Mühe zu erlangen seyn möchte.

Soll nun mittelst eines Sextanten und eines künstlichen Horizonts ein Vertikalwinkel SAM gemessen werden, so wird der Glashorizont über A (so nahe wie möglich) nivellirt; ein Queckfilber- oder Oel-Horizont thut dies von selbst. Der auf die Spiegelfläche in A auffallende Lichtstrahl wird unter dem Winkel OHA = Winkel SAM reflectirt, und zwar liegen beide Winkel in einer auf den Horizont vertikalen Ebene. Man denke sich OA rückwärts verlängert, so wird W. n = n' = m, also W. SAU = 2 W. SAM. Ein Auge in o sieht also das reflectirte Bild von S in der Richtung OAU, gleichsam als läge S in U; liegt zwischen O und S kein Hinderniß des Sehens, so fällt das Bild von S zum zweiten Mahle directe in der Richtung SO ins Auge. Folglich sind S und U gleichsam zwei verschiedene Richtpunkte, die mit dem Orte der Beobachtung den Winkel SOU bilden.

Man bringe die Ebene des Sextanten in die Vertikalebene durch SA, das Diopter in die Richtung OA, so daß man durch das unbelegte Glas des kleinen Spiegels das vom Horizont reflectirte Bild von S erblickt; hierauf bewegt man den Inder längs des Limbus so weit fort, bis man auch das von beiden Spiegeln zweimahl reflectirte Bild von S ins Sehefeld bekommt; vermittelst der Mikrometerschraube bringe man beide Bilder in der Mitte zwischen den beiden parallelen Fäden des Fernrohrs genau zur Berührung. Ist dies geschehen, so giebt die Gradzahl, worauf der Inder steht, mit gehöriger Berücksichtigung des Inderfehlers, den Winkel SOU, der bei der sehr geringen Distanz des Sextant von A dem W. SAU gleichgesetzt werden darf, um so mehr, wenn S in Rücksicht auf AO ein unendlich weit entferntes Object, z. B. die Sonne oder ein

andrer Himmelskörper, oder auch ein weit entlegenes terreſtriſches Object iſt. In dieſem Fall kann man den parallactiſchen Winkel $ASO = o^0$ ſetzen, alſo AS parallel OS, mithin Winkel $SAU = SOU$ annehmen.

Der gefundene Winkel halbirt giebt den einfachen Höhenwinkel SAM. Nimmt man auf ſolche Weiſe eine Sonnenhöhe, und bringt man beide Sonnenbilder nicht zur Bedeckung, ſondern zur Berührung der Ränder, welches immer ſichrer iſt, ſo muß man zur gefundenen einfachen Höhe (Winkel) den halben Durchmeſſer der Sonne (in Minuten ꝛc.) addiren, um die Erhöhung des Sonnenmittelpunkts über den ſcheinbaren Horizont zu erhalten. Der Grund hiervon iſt nicht ſchwer zu finden. — Wenn man Sonnenhöhen nimmt, ſo blendet man ihre zwei Bilder durch ein paar gefärbte Gläſer des Sextanten; ich ſelbſt bediene mich gewöhnlich nur eines dunkeln Glaſes vor das Okular geſchraubt, ohne dem Auge zu ſchaden.

Es muß hier noch ein für allemahl bemerkt werden, daß man erſt einige Uebung haben, und mit dem Sextant gewiſſermaßen vertraut ſeyn muß, um die Bilder bei einer Winkelmeſſung leicht ins Sehefeld zu bekommen, und dann zur Bedeckung oder Berührung zu bringen. Anfängern macht dies, wie ich bei meinen Zuhörern bemerkt habe, immer einige Schwierigkeit, beſonders wenn ſtatt des gemeinen Diopters das Fernrohr gebraucht wird.

Da man mit dem Sextant und dem künſtlichen Horizont immer die doppelten Höhenwinkel mißt, ſo laſſen ſich damit nur einfache Winkel der Art nehmen, die höchſtens auf 60^0 ſteigen. Terreſtriſche Elevationswinkel von dieſer Größe kommen ſelten vor.

§. 78.

Kurze Notiz von den Fehlern und den Berichtigungen eines Sextanten.

Außer den Fehlern, welche ein Sextant mit andern Winkelmessern gemein haben kann, z. B. in Hinsicht der Ebene seines Gradbogens, der Theilung, Centrirung, sind ihm noch einige andere eigenthümlich, und zwar von der Beschaffenheit, daß sie sich entweder durch besonders angebrachte Correctionsmittel berichtigen lassen, oder als constante Fehler einzelner Theile des Werkzeugs unabänderlich verbleiben, wenn diese Theile selbst in ihrer Form nicht verbessert werden. Zu diesen Fehlern gehören hauptsächlich folgende:

a) die mangelhafte, besonders prismatische, Gestalt der Spiegel; b) die nicht vollkommen senkrechte Stellung des großen und kleinen Spiegels auf die Ebene des Sextanten; c) die Achse des Diopters oder Fernrohrs, als Visirlinie (Collimationslinie) läuft nicht parallel zur Ebene des Gradbogens; d) die gefärbten Blendegläser sind nicht genaue Parallelgläser.

Diese Fehler und ihr Einfluß auf die gemessenen Winkel werden also gefunden:

a) Wie man die Ebene einer spiegelnden Fläche prüfen könne, habe ich im vorigen §. angezeigt. Ob die beiden Flächen eines Spiegels parallel oder unter einem kleinen Winkel gegen einander geneigt sind (prismatischer Spiegel), erfährt man, indem man das vom Spiegel reflectirte Bild eines möglichst weit entfernten Objects, vorzüglich der Sonne oder des Mondes, genau beobachtet, am besten durch ein gutes kleines Fernrohr; sind die Flächen des Glases parallel, so sieht man nur ein scharf begrenztes Bild, im Gegentheil wenigstens zwei Bilder, wovon das eine bläßer und neblicht erscheint, und welche um so weiter von einan-

der abliegen, unter einem je schiefern Winkel das Object sein Licht auf den Spiegel wirft. Auch Parallelspiegel, z. B. der kleine Spiegel des Sextanten, machen von sehr nahen Objecten zwei Bilder, welche aber bei einer nur mäßigen Entfernung der Objecte in Eins zusammenfallen. Daher dieser Fehler am Sextanten bei der gewöhnlichen Winkelmessung als Null zu betrachten ist. Prismatische Spiegel muß man an seinem Sextanten durchaus nicht dulden, und einen solchen von einem Optikus genau berichtigen lassen, um die stets unsichern Berichtigungen, welche ein so fehlerhafter Spiegel nöthig machen würde, ganz entbehren zu können. Man hat, um der Gefahr prismatischer Glasspiegel zu begegnen, Metallspiegel, besonders von Platina, in Vorschlag gebracht; diese Idee ist aber im Allgemeinen nicht wohl ausführbar. Wollte man den Indexspiegel von sehr dunklem undurchsichtigen Glas machen, so würden die reflectirten Bilder, etwa das der Sonne ausgenommen, zu viel an Licht oder Helligkeit verlieren. Der beste Rath ist also dieser, daß man für genau parallele, belegte Glasspiegel sorge.

b) Ob der größere Indexspiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehe, wie es zu genauer Winkelmessung damit verlangt wird, erfährt man am besten also: M und N (Fig. 43.) sind zwei zu diesem Behuf besonders eingerichtete Stell-Instrumente. Jedes derselben besteht aus einer rechtwinklicht umgebogenen oder noch besser aus zwei sehr eben gearbeiteten und genau senkrecht an einander gesetzten (gelötheten) kleinen Metallplatten. Die untere Fläche zum Aufsetzen muß sorgfältigst eben gemacht werden. In der aufrecht stehenden Platte von M ist eine feine Oeffnung (Loch) bei O durchbohrt; die aufrecht stehende Platte von N ist durchbrochen, und in gleicher Höhe über seiner Grundfläche, wie die Oeffnung O über der Grundfläche

und B. B. in der Form Ihres Briefes, die ich Ihnen zurück-
schicke, gewiß gut Ihre Absichten. Ungern
würde ich Ihnen, wenn Sie es wünschen, die Ver-
sicherung geben, daß ich Ihnen nicht schaden will,
denn ich will es nicht, und Sie wissen es auch
wohl. Ich bin gern bereit, Ihnen die Ver-
sicherung zu geben, daß ich Ihnen nicht schaden will.

Ich habe Ihnen gesagt, daß ich Ihnen nicht schaden will.

Findet man einen Fehler im vertikalen Stand des Spiegels, so muß er verbessert werden, welches durch gehörige Verkürzung eines der unter dem Spiegel befindlichen Stifte geschieht. Man kann auf solchem Wege den Spiegel so weit berichtigen, daß seine Neigung gegen die Ebene des Gradbogens nicht mehr als etwa 2 bis 3′ betragen kann. Der Fehler, welcher hieraus in den gemessenen Winkeln entsteht, kommt bei diesem Instrument in wenig oder gar keine Betrachtung. Wäre z. B. die Neigung des Spiegels = 10′, so betrüge selbst der Fehler in einem Winkel von 120° kaum 2″, bei kleinern Winkeln noch weniger. — Der große Spiegel wird schon vom Künstler in seiner Lage gehörig berichtigt, und in derselben so stark als möglich befestigt, damit dem Beobachter die öftern Correctionen durch besondre Schrauben, welche das Instrument zu sehr zusammengesetzt machen würden, ganz erspart werden.

Ist einmahl der große Spiegel senkrecht auf die Ebene des Sextanten gestellt, so läßt sich ferner auch der senkrechte Stand des kleinen Spiegels leicht untersuchen und corrigiren. Man bringe wie gewöhnlich das dioptrische und katoptrische Bild von irgend einem scharf begrenzten Punkt (am besten einem geradlinigten Rand) im kleinen Spiegel zur Bedeckung oder Berührung. Ist diese Bedeckung oder Berührung sehr genau, so steht der kleine Spiegel senkrecht auf der Ebene des Gradbogens. Kann man hingegen das directe und indirecte Bild nicht genau zur Bedeckung bringen, sondern geht eins über oder unter dem andern bei Bewegung des Index vorüber, so steht der kleine Spiegel nicht gleich dem großen senkrecht auf der Ebene des Gradbogens. Durch zwei besondere am kleinen Spiegel angebrachte und wirklich nothwendige Correctionsschrauben läßt sich dann die senkrechte Lage desselben

berichtigen, indem man durch Anziehung der einen oder andern Schraube und gegenseitiges Losmachen der entgegengesetzten die erwähnte Berührung oder Bedeckung bewirkt. Diese Correction geschieht am zuverläßigsten durch helle Sterne. Die Erklärung hiervon ist leicht, besonders wenn man einen Sextanten wirklich zur Hand nimmt, und aufmerksam betrachtet. Auf der See braucht man zur Berichtigung den ziemlich scharf begrenzten Rand des Meerhorizontes. Man kann annehmen, daß sich diese Berichtigung bis auf $\frac{1}{2}$ Minute oder noch genauer erlangen läßt. Der hieraus entstehende Fehler in gemessenen Winkeln, wenn sie nicht sehr klein sind, kommt in keine Betrachtung.

c) Wenn die Achse des Diopters oder Fernrohrs — als Visirlinie — nicht genau parallel zur Ebene des Sextanten läuft, so heißt dies der Deviationsfehler des Instruments. Dieser hat auf die gemessenen Winkel schon einen nachtheiligern Einfluß, als die vorerwähnten. Insgemein wird die parallele Lage der Sehachse des Fernrohrs also untersucht:

Nachdem man den Sextant horizontal aufgesetzt und die Fäden im Fernrohr parallel zur Ebene des Gradbogens gestellt hat, setzt man das Stell-Instrument M (Fig. 43.) neben das Fernrohr, das andre N neben den kleinen Spiegel so auf die Ebene des Gradbogens, daß eine gerade Linie durch ihre Mitte nach dem Augenmaß parallel zur Achse des Fernrohrs wird. Durch einige Erhöhung des Sextant von der einen oder andern Seite kann man den Faden von N auf einen scharfbegrenzten entfernten Punkt richten. Wenn man nun diesen Punkt zugleich auch mitten zwischen den horizontalen Fäden des Fernrohrs erblickt, so läuft seine Achse, wenigstens sehr nahe, parallel zur Ebene des Gradbogens. Die Sache bedarf für denkende Leser keiner weitern Erläuterung. Findet sich ein bemerklicher Fehler der Art, so

muß ihm vom Künſtler, der das Inſtrument verfertigt, ſchlechterdings abgeholfen werden, welches immer möglich iſt. Es ſind nach Annäherungsformeln der ſphäriſchen Trigonometrie eigne Tafeln berechnet worden, welche für kleine Deviationsfehler eines Sextanten die zugehörigen Korrectionen der gemeſſenen Winkel aber nur von 10 zu 10° angeben, weil die Zwiſchendifferenzen ſehr gering ſind. Borda giebt in ſeiner Schrift: Description et usage du cercle de Reflexion etc. eine ſolche Tafel der Deviationsfehler für kleine Winkel von 10′ bis 1°, und dann für die übrigen Winkel von 10° zu 10°. Eine ähnliche Tafel findet ſich auch in Bohnenberger's Werk über die geographiſche Ortsbeſtimmung ꝛc. Damit doch der Leſer einen Begriff von dieſer Art zuſammengehöriger Fehler bei einem Sextanten bekomme, möge folgende abgekürzte Tabelle hier ſtehen:

Deviationswinkel der Seheachse:	Größe der gemessenen Winkel in Graden:												
		0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0	100^0	110^0	120^0
	Correction der gemessenen Winkel													
10′		0	0″	0″	0″	1″	1″	1″	1″	1″	2″	2″	3″	3″
15′		0	0″	1″	1″	1″	2″	2″	3″	3″	4″	5″	6″	7″
20′		0	1″	1″	2″	3″	3″	4″	5″	6″	7″	9″	10″	12″
25′		0	1″	2″	3″	4″	5″	6″	8″	9″	11″	13″	16″	19″
30′		0	2″	3″	4″	6″	8″	9″	11″	13″	16″	19″	23″	27″
35′		0	2″	4″	6″	8″	10″	12″	15″	18″	21″	26″	31″	37″

Ist z. B. die Sehachse des Diopters um 10′ gegen die Ebene des Gradbogens geneigt, so wird nach dieser Tabelle ein Winkel von 120°, den der Index angiebt, um 3″ falsch, nehmlich zu groß u. s. w.

d) Der Parallelismus der farbigen Gläser, welche man bei Sonnenbeobachtungen zur Blendung ihres starken Lichtes anzuwenden pflegt, kann folgendermaßen untersucht werden. Sind nehmlich diese Gläser nicht vollkommen parallel, so bleiben die auffallenden Lichtstrahlen nicht parallel zu den auf der andern Seite durchgehenden, wie in der Optik gezeigt wird. In letzterm Falle kann sich also auch der sogenannte Inderfehler für einen entfernten Punkt nicht gleich bleiben, wenn man einmahl ohne die gefärbten Gläser, sodann mit denselben das dioptrische und katoptrische Bild im Sehefeld des Diopters zur Bedeckung bringt. Man kann den Inderfehler für den Mond zuerst ohne Blendegläser, sodann mit denselben einzeln, so wie in Combinationen zu zweien u. s. w. aufsuchen. Bleibt nun der Inderfehler, welcher auch = o seyn kann, bei Anwendung der farbigen Gläser nicht derselbe, wie er sich ohne dieselben zeigte, so sind sie keine vollkommenen Parallelgläser. Weil es immer sehr schwer halten wird, sie alle ganz geometrisch genau zu erhalten, da schon eins derselben in so hoher Vollkommenheit sich selten findet, so ist der beste Rath dieser, daß man den Inderfehler, den diese farbigen Gläser, einzeln und in Verbindung, für die Sonne und den Mond geben, genau bemerke, und dann bei Winkelmessungen, wobei diese Körper zu Richtpunkten dienen, gehörig in Rechnung bringe. Wendet man nehmlich jederzeit immer dieselben Gläser auf das Object an, für welches man den von ihnen erzeugten Inderfehler genau beobachtet hat, so kommt dadurch kein erheblicher Irrthum in die gemeßnen Winkel.

Wird bei astronomischen Beobachtungen bloß das

Sonnenbild gebraucht, z. B. um den Sonnendurchmesser oder die Sonnenhöhe mit Zuziehung des künstlichen Horizontes zu finden, so halte ich für das Rathsamste, bloß ein dunkelfarbiges kleines Parallelglas vor das Ocular des Fernrohrs zu setzen.

Noch ausführlichere Erörterung der dem Sextanten eigenthümlichen, in diesem §. angezeigten, Fehler enthält Bohnenberger's Schrift über die geograph. Ortsbest. Das Nützlichste und Brauchbarste über diesen Gegenstand aber glaube ich hiermit gegeben zu haben.

§. 79.

Historische Erwähnung einiger anderer Winkelmesser mit und ohne Spiegel.

Nach der wirklich höchst schätzbaren Erfindung des Hadleyschen Sextanten (zuerst Octanten) wurde von dem berühmten Astronom Mayer ein Vollkreis mit reflectirenden Spiegeln, und zugleich mit einer Vorrichtung zum Repetiren der Winkel versehen, in Vorschlag gebracht. Borda in Paris brachte an diesem Reflexionskreis noch einige Verbesserungen an, und beschrieb sein von dem Künstler Lenoir angefertigtes Instrument in der oben citirten Schrift: Description et usage du cercle de reflexion etc. — Ein solcher Mayer-Bordascher Spiegelkreis würde außer dem Vortheil eines Sextanten, nehmlich der Entbehrlichkeit eines Stativs, noch den in sich schließen, daß durch die Repetition einer Winkelmessung die Fehler der Theilung und Excentricität sich aufhöben; allein da dies Werkzeug schon eine bedeutende Größe und ein beträchtliches Gewicht erhält, so kann es zu sehr genauen Beobachtungen und sicherm Ablesen der Winkel eines Sta-

tivs und festen Standes nicht wohl entbehren; auch würde es nur für einen hohen Preis vollkommen herzustellen seyn. Man sieht also wohl ein, warum dasselbe nicht mehr in Aufnahme gekommen ist, und jetzt, so viel ich weiß, zu Lande nicht mehr gebraucht wird. Die Englische Marine bedient sich indessen des Spiegelkreises jetzt vorzugsweise zu astronomischen Beobachtungen auf der See. Ein 8zölliger, weniger kostbarer, Repetitionstheodolit giebt, wo nicht größere, doch gleiche Genauigkeit als ein Spiegelkreis, und übertrifft letztern ganz besonders in Hinsicht der Helligkeit der Bilder, wodurch die Schärfe im Visiren gewinnt. Wo man aber nicht so außerordentliche Annäherung, als die Repetition beabsichtigt, verlangt, da kann auch ein gut gearbeiteter Sextant ein genügendes Resultat gewähren.

Ein dem Sextant, in Construction und Theorie, sehr ähnliches kleines Spiegelwerkzeug ist der von dem Englischen Oberst Douglas erfundene reflectirende Halbkreis (the Semicircle reflecting), hier zu Lande unter dem vagen Namen Reflector bekannt. Er unterscheidet sich hauptsächlich dadurch vom Sextant, daß mittelst desselben die Winkel nicht bloß in Gradmaß (der gewöhnlichen Angabe nach bis zu 2′ genau) gemessen, sondern auch zugleich geometrisch auf einen Plan (Papier) verzeichnet werden können. Zu schnellen militärischen Aufnahmen, wobei eben keine große Schärfe verlangt wird, ist dieser kleine leicht transportable Winkelmesser und zugleich Transporteur mit aufgestochenen verjüngten Maßstäben wirklich recht brauchbar und empfehlungswerth. Zu etwas genauern Triangulirungen und Vermessungen hingegen ist ihm, da er noch mehreren Fehlern als ein Sextant ausgesetzt ist, und nach meinen Beobachtungen die Winkel gewöhnlich nicht viel genauer als auf 3 bis 4′ giebt, ein Dosensextant und der Meßtisch vorzuziehen.

Man findet diesen Reflector gut beschrieben und die Theorie desselben erörtert in der Schrift: das militärische Aufnehmen, von Decker, Preuß. Major ꝛc. Berlin, 1816. Der Verfasser empfiehlt den Reflector und die kleine Handboussole von Schmalkalder mit besondrer Vorliebe und fast ausschließlich zu militärischen Aufnahmen.

Man hat auch in frühern und neuern Zeiten versucht, die Winkel durch ihre Sehnen, Sinus und Cosinus oder auch Tangenten, folglich durch gerade Linien zu messen, und demgemäß eigne Winkelmesser zu construiren. So etwas findet man schon in einer alten Schrift von Gutschoven im J. 1674 angegeben, nehmlich einen Quadranten, dessen innere Fläche ein sogenanntes rete trigonometricum (trigon. Netz) überzieht, wovon 90 zu dem einen Halbmesser parallele gerade Linien die Sinus, 90 andere zum andern Halbmesser parallele Linien aber die Cosinus der Grade von 0° bis 90° in Beziehung auf die Länge des Sin. tot. vorstellen u. s. w. Nachricht von einem Kunstwerk der Art ertheilt Kästner in seinen geometr. Abhandl. 2te Samml. S. 603. — Diesem sehr ähnlich sind der vom ältern Tob. Mayer angegebene und von dessen Sohn in seiner pract. Geom. B. I. S. 408 beschriebene Recipiangle, ingleichen die sogenannten Cathetometer, welche mehrmahls von Neuem in Anregung gebracht und als neue Erfindungen bald unter diesem bald unter jenem Namen dem Publikum producirt worden sind. Sogar in den jetzigen Zeiten, wo wir bereits die vollkommensten Winkelmesser an den Repetitionskreisen besitzen, hat sich der Erfindungsgeist in jener Art thätig bewiesen, und durch seine Schöpfungen nicht bloß eine bequemere und genauere Winkelmessung, sondern auch die Ersparung trigonometrischer Rechnungen möglich machen wollen. Eine vollständige Geschichte aller dieser vergebli-

chen Versuche würde hier zu nichts nützen. Einige solcher Erpfindungen mögen dem wirklichen Eifer für die Wissenschaft, andere auch wohl nur dem Verlangen, etwas Neues erfunden zu haben, ihre Entstehung und ihr kurzes Daseyn verdanken. Jeder denkende Leser wird ohne weitere Erklärung begreifen, warum gerade Linien zu einer genauen sichern Winkelmessung sich nicht so gut wie Kreisbogen eignen, warum folglich jene unzuverläßigen Winkelmesser vom mathematischen Publikum nicht angenommen worden. Eben dieser Tadel der Unbrauchbarkeit trifft auch einige dem Sextant nachgekünstelte Spiegelwerkzeuge.

Ein genau eingetheilter Kreisbogen, eine um dessen Centrum bewegliche Alhidade mit Nonius und mit gemeinem oder besser Fernrohr-Diopter werden immer die Hauptelemente eines guten Winkelmessers bleiben. Daher können die oben beschriebenen Winkelmesser nebst dem Meßtisch, auf welchen die Sehewinkel geometrisch construirt werden, allen Winkelmessungen theils der niedern theils der höhern Erdmessung vollkommen Genüge leisten. Es ist möglich, daß jene Werkzeuge im Fortschritt der Zeit noch größere Vollkommenheit, besonders in Hinsicht der Theilung, erlangen werden; allein ein ganz neuer verbesserter Winkelmesser, der in Hinsicht der erwähnten Hauptelemente von den jetzt gebräuchlichen abwiche, läßt sich kaum gedenken.

Wie sich auch vermittelst eines guten Meßtisches ein Winkel im Felde nach Gradmaß mit einer erträglichen Genauigkeit bis auf eine oder einige Minuten bestimmen lasse, werden wir in der vierten Abtheilung sehen.

Zum Auftragen der Winkel auf Papier bediene man sich, wenn die Planzeichnung nur einige Genauigkeit verlangt, statt des gemeinen Transporteurs lieber eines vollkommneren, welcher aus einem Vollkreis be-

ſteht; um das richtig beſtimmte Centrum deſſelben bewegt ſich eine Alhidade mit Noniusinder; dieſe trägt am Ende zwei Aerme mit ſcharfen Spitzen, welche über den Limbus hinaus übergelegt werden können, um einen gewiſſen Winkel auf dem untergelegten plan ausgeſpannten Papier mit feinen Punkten abzuſtecken u. ſ. w. Ich beſitze einen bequemen Goniograph der Art, welcher die Winkel bis auf 2′ genau aufs Papier abſetzt.

Inſtrumente zum Nivelliren

im engern Sinne des Worts.

Zum Nivelliren (Waſſerwägen) in der beſchränkten Bedeutung, wie man dieſen Ausdruck gewöhnlich nimmt, gehören einige beſondere Werkzeuge, nehmlich:

a) genau eingetheilte geradlinigte Maßſtäbe mit verſchiebbaren Zielſcheiben; b) eine ſogenannte Waſſerwaage, Nivellirwaage, welche man ſchlechtweg auch wohl Niveau heißt. Jede Nivellirwaage hat die Abſicht, eine Ziel-Linie oder Viſirlinie zu verſchaffen, welche in der durch einen Punkt, auf oder über der Erdoberfläche, gelegten Horizontalebene liegt, nehmlich eine ſcheinbare Horizontale iſt. Zu dieſer Abſicht ließen ſich einige der vorher beſchriebenen Winkelmeſſer, z. B. der Bordaſche Kreis oder der Theodolit, an welchen ein Fernrohr mit Libelle verſehen iſt, recht gut gebrauchen.

Indessen hat man der Wichtigkeit und Bequemlichkeit des Geschäftes wegen für das Nivelliren besondere Instrumente ausgedacht. Wir wollen uns hier, wie Mayer in seiner pract. Geom. thut, mit der Beschreibung der vielen verschiedenen zum Theil ganz zwecklosen unbrauchbaren Abänderungen, welche dies Werkzeug vom Erfindungsgeist verschiedener Zeiten erfahren hat, und welche im Wesentlichen auf Eins hinauslaufen, gar nicht aufhalten, sondern sogleich ohne Umschweif das Beste der Art kennen lernen. Es giebt zwei Hauptarten der Nivellirwaage: eine ohne Libelle, gewöhnlich mit gemeinen Dioptern ohne Fernrohr, zu weniger genauem Nivelliren; eine andre mit Libelle und Fernrohr, vorzugsweise Niveau genannt, zu genauern Bestimmungen der Höhenunterschiede verschiedener Punkte auf der Erde, welche das Nivelliren eigentlich bezweckt.

§. 80.

Nivellirwaage ohne Libelle, gemeine Wasserwaage, (Kanalwaage). (Fig. 44.).

A B ist ein kupfernes cylindrisches Rohr, an beiden Enden rechtwinklicht umgebogen; in diese umgebogenen Enden werden zwei Glasröhren D, E eingesetzt und so luftdicht eingekittet, daß das Ganze eine zusammenhängende communicirende Röhre bildet. Die Unterstützung und das Stativ dieser Wasserwaage können wie bei einem Meßtisch eingerichtet seyn, dergestalt, daß man sie nach Belieben erhöhen, erniedrigen und herumdrehen kann.

Beim Gebrauch gießt man reines oder mit einer Farbe tingirtes Wasser in die communicirende Röhre, ungefähr so viel, daß zwei Drittel der Glasröhren D, E

damit erfüllt werden. Das Wasser steigt in beiden Röhren gleich hoch, d. h. so, daß eine gerade Linie M N durch die beiden höchsten Standpunkte gelegt, eine Horizontallinie wird. Ein Visirstrahl nach dieser Richtung wird daher auch eine Horizontale, wobei jedoch wegen der Unvollkommenheit, in solcher Art zu visiren, etwas gefehlt werden kann. Um das vollkommnere Visiren zu erleichtern, kann man noch an den Glasröhren auf irgend eine Art verschiebbare Dioptern anbringen, das eine mit einem Fadenkreuz, das zweite mit einem sehr feinen Loch als Ocular. Indem man nun die Visirlinie der Dioptern über die beiden höchsten Wasserstände einrichtet, so wird sie horizontal u. s. w. Uebrigens lassen sich diese Dioptern leicht so einrichten, daß ein Vorwärts- und Rückwärts-Visiren möglich wird.

Die beiden Glasröhren müssen sehr hell und durchsichtig, auch von gleichen Dimensionen seyn. Denn, streng genommen, kann man die beiden Wasseroberflächen der Erfahrung gemäß nicht als vollkommen horizontal betrachten; haben die cylindrischen Röhren einen kleinen Durchmesser, so steht die Flüßigkeit an den Wänden der Röhre sehr merklich höher als in der Mitte oder in der Achse der Wassersäule, wenn wir uns diese vertikal gedenken; daher erscheint die ganze Oberfläche der Flüßigkeit in der Mitte concav, eine Folge der Anziehungskraft des Glases. — Wollte man zur Füllung des Rohres Quecksilber anwenden, so würde eine entgegengesetzte Wirkung Statt finden, nehmlich die Oberfläche desselben conver erscheinen. Nach den von Lavoisier und Laplace über das Barometer angestellten Versuchen kann jedoch das Quecksilber, wenn man es lange genug in einer Glasröhre kochen läßt, die convexe Gestalt seiner Oberfläche verlieren und selbst eine concave annehmen, indem durch das anhaltende Kochen die dünne

wäßrige Zwischenlage entfernt wird, welche die Innenseite der Glasröhre bedeckt, und die gegenseitige Anziehung des Queckſilbers und Glaſes hindert.

Wären nun beide Röhren D, E ungleichweit, ſo müßte nach den Geſetzen der Erſcheinungen, welche bei Haarröhren von ungleichen Weiten Statt finden, auch die Waſſerhöhenſtände in beiden Röhren ungleich ſeyn. Die Phyſik lehrt, daß ſich die Waſſerſtände in beiden cylindriſchen Röhren umgekehrt verhalten werden, wie die Durchmeſſer dieſer Röhren oder vielmehr der Ringe, welche die höchſten Waſſerſtände begrenzen. So begreift man, warum dieſe Röhren ſo nahe wie möglich gleiche Durchmeſſer haben und zwar am beſten vertikal ſtehen müſſen; wenn man dadurch eine richtige horizontale Abſehenlinie erlangen will. Den vertikalen Stand der Röhren D, E und den horizontalen des Rohres AB kann man ſehr annähernd durch ein am letztern aufgehängtes Bleiloth (Senkblei) erhalten.

Die Concavität der Waſſeroberflächen in beiden Röhren macht die horizontale Viſirlinie vermittelſt derſelben immer etwas zweifelhaft, da ſie eigentlich durch die unterſten Punkte der beiden concaven Waſſerflächen gehen ſollte, welche ſich nicht wohl abſehen laſſen. Nimmt man dafür die Seitenbegrenzungen, welche in einer geringen Entfernung dem Auge als dunkle Linien erſcheinen, zur Richtſchnur, ſo erhält man jedoch einen Grad der Genauigkeit, wie ihn der beſchränkte Gebrauch der Kanalwaage erheiſcht.

Man muß dafür ſorgen, daß zwiſchen das Waſſer, womit die communicirende Röhre gefüllt wird, während des Eingießens und während des Transports von einem Ort zum andern keine Luftblaſen kommen, da ſolche den horizontalen, gleich hohen, Stand der Waſſeroberflächen ſtören können. Wenn nehmlich die beiden Säulen der Flüßigkeiten in D und E nicht gleiches ſpe-

zifisches Gewicht haben, so werden sie zwar im Gleichgewicht, aber ihre Oberflächen nicht gleich hoch, horizontal, stehen. Dies muß aber immer geschehen, wenn die Röhre nach der einen oder andern Seite hin Luftblasen in sich schließt. Sollten dergleichen in das Rohr A B gekommen seyn, so wird man durch eine schickliche Neigung desselben bewirken, daß sie sich über das Wasser erheben. Im Uebrigen bedarf die Kanalwaage keiner besondern Berichtigung.

Die Länge des Rohrs A B kann ungefähr 2 Fuß, die Weite der Glasröhren D, E gegen $\frac{3}{4}$ Zoll betragen.

Es ist gar nicht schwer, Nivellirinstrumente auszusinnen, welche der eben angezeigten Kanalwaage in Hinsicht ihrer nur mittelmäßigen Genauigkeit gleich kommen. Von dieser Art ist das Nivellirlineal, welches Bugge in seiner Anleit. zum Feldmessen, übers. von Tobiesen — angiebt. Wir wollen nun ohne Weiteres gleich das vollkommenste Werkzeug zum Nivelliren kennen lernen.

§. 81.

Nivellirwaage mit Fernrohr und Libelle, Niveau à lunette et à bulle d'air. (Fig. 45.)

Die wesentlichen Hauptstücke dieses Instrumentes sind ein achromatisches etwa 18zölliges Fernrohr A B, in dessen Brennpunkt ein Fadenkreuz sich befindet, und eine mit demselben verbundene Röhrenlibelle, welche sich parallel zur Achse des Fernrohrs stellen läßt, dergestalt, daß die Visirlinie in der Richtung jener Achse horizontal wird, wenn die Luftblase zwischen ihren Zeichen in der Mitte der Libelle steht.

Das Fernrohr wird von zwei Trägern T unterstützt, welche oben die Form eines Y haben, und wel-

che daher von den Engländern insgemein mit dem Namen Y's bezeichnet werden. In diese Y's wird das Fernrohr mit seinen zwei genau geschliffenen glockenmetallenen Ringen, wie sonst in runde Pfannen, eingelegt. Die innern Seiten der Yförmigen Pfannen sind gleichsam Tangenten der cylindrischen Ringe am Fernrohr; auf einer solchen Unterlage liegt dasselbe fester als in runden Pfannen, und läßt sich sehr sanft und stetig um seine Achse drehen.

Die untern Enden der Träger stehen senkrecht auf einer starken Stange; der eine geht mit einem prismatisch abgearbeiteten untern Stück durch die Stange, und läßt sich mittelst eines geränderten Knopfes G erhöhen oder erniedrigen, um das Instrument waagerecht zu stellen.

Die Libelle wird mit dem Fernrohr am einen Ende mittelst eines Scharnieres, am andern mittelst einer Fingerschraube befestigt, so daß der Beobachter es in seiner Gewalt hat, dieselbe gegen das Fernrohr höher oder tiefer zu stellen.

Mit der Stange, welche die senkrechten Träger hält, steht eine konische stählerne Achse R in fester Verbindung. Diese Achse läßt sich in einer vollkommen anschließenden Hülse umdrehen, welche mit einem Trépied von drei geschweiften starken Füßen ein Ganzes ausmacht. Der Trépied ist mit drei Stellschrauben (Fußschrauben) versehen. Diese gehen in aufgeschlitzten Schraubenmuttern, welche sich durch ränderirte Schraubenknöpfe mehr oder weniger verengen, und gegen die Stellschrauben beliebig anpressen lassen. Das Ganze wird auf ein sehr festes Gestell gesetzt, wozu man ein Stativ nach neuerer Art mit unverrückbar vereinigtem Gebälk (Leisten) anwenden kann. Ist die Achse R erst annähernd vertikal auf der Unterlage, so kann ihr vertikaler Stand durch die Stellschrauben des Dreifußes noch weiter berichtigt werden.

Nach sonst üblicher Weise ruht das Niveau, wie ein Astrolabium oder ein Meßtisch, auf einem Stativ mit drei beweglichen Füßen. Es leuchtet aber ohne weitere Erklärung ein, daß die hier angegebene Einrichtung sich besser zu einem festen sichern Stand des Niveau's eignet, worauf bei sehr genauen Nivellements so ungemein viel ankommt.

Was die gute Beschaffenheit der Libelle anlangt, so ist im §. 68. das Nöthige bemerkt worden. Wird sie mit einem Fernrohr zur Horizontalstellung seiner Sehachse in Verbindung gesetzt, so ist sie insgemein in Messing gefaßt (montirt); oben hat die Faßung zwei Oeffnungen, um den Stand der etwas langen Luftblase zwischen ihren Zeichen, die durch eingeschnittene oder eingeätzte Theilstriche in gleichen Abständen von beiden Enden mit gleichen Nummern bezeichnet sind, bemerken zu können.

Das Fadenkreuz im Fernrohr läßt sich durch besondere Schrauben in der Richtung seiner Achse und senkrecht gegen dieselbe verrücken, um den Durchschnittspunkt der Fäden genau in die Umdrehungsachse des Rohrs und der glockenmetallenen Ringe zu bringen. Das Fernrohr hat zwei Auszüge; die Deutlichkeit eines entfernten Objectes erlangt man durch Herausziehen des Objectivrohres, die Deutlichkeit des Fadenkreuzes hingegen durch Herausziehen des Ocularrohres.

Die Y's haben oben in Scharnieren bewegliche halbringförmige Halsbänder, um das eingelegte Fernrohr fest zu halten, oder erforderlichen Falles herausnehmen zu können.

Was sonst noch vom richtigen Bau dieses Niveau's gesagt werden könnte, wird der Leser nach der Figur gewiß selbst ermessen.

§. 82.

Berichtigung oder Ajustirung (Verification) des Niveau's.

Diese Berichtigung besteht darin, das ganze Niveau bei einer Operation so einzurichten,

a) daß die Sehachse des Fernrohrs, die durch den Mittelpunkt des Fadenkreuzes geht, genau mit der Umdrehungsachse des Rohres oder vielmehr seiner glockenmetallenen Ringe zusammenfällt;

b) daß die Libelle parallel zu dieser Achse wird, so nehmlich, daß diese nach jedem Azimuth horizontal steht, wenn die Luftblase in der Mitte zwischen ihren Zeichen bleibt;

c) daß endlich die Umdrehungsachse R auf ihrer Unterlage vertikal gegen den scheinbaren Horizont steht, und die Sehachse bei ihrer Azimuthalbewegung um die Achse R horizontal bleibt.

Um die Bedingung a zu erfüllen, stelle man das ganze Instrument auf eine feste Unterlage und visire durch das Fernrohr auf einen entfernten scharfbegrenzten deutlichen Punkt, so daß derselbe vom Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes gleichsam bedeckt wird. Hierauf drehe man das Fernrohr, welches mit seinen geschliffenen Ringen in den Y's liegt, allmählig um seine Achse; bedeckt hierbei der Mittelpunkt des Fadenkreuzes überall den entfernten Punkt, so ist die Lage des Fadenkreuzes gegen die Umdrehungsachse der cylindrischen Ringe die richtige. Im entgegengesetzten Falle geschieht die Berichtigung durch drei kleine stählerne Schrauben, welche hierzu am Ocular besonders angebracht sind, so lange, bis bei jeder Drehung des Fernrohrs der Mittelpunkt seines Fadenkreuzes ein und denselben entfernten Punkt deckt. Der Grund dieser Correction leuchtet ein; ist sie ein-

mahl richtig vollbracht, so ist eine Verrückung des Fadenkreuzes bei gehöriger Vorsicht nicht leicht weiter zu besorgen. Indessen kann man von Zeit zu Zeit diese Richtigkeit von neuem untersuchen.

Um b) die parallele Lage der Libelle mit der Achse des Fernrohrs zu prüfen und zu berichtigen, welches bei genauen Nivellements eine Hauptsache ist, verfahre man also: Die Träger, Y's, stelle man so, daß einer derselben senkrecht über einer der Fußschrauben steht; die Visirlinie des Fernrohrs sey jetzt nach einer gewissen Himmelsgegend, z. B. von Nord nach Süd, gerichtet. Man bringe durch Erhöhung oder Erniedrigung jener Fußschraube die Luftblase in die Mitte der Libelle oder doch nahe dahin; nehme dann das Fernrohr aus seinen Y's heraus, und lege es in umgekehrter Richtung wieder ein, nehmlich den vorher nördlich gelegenen geschliffenen Ring in das südlich stehende Y u. s. w. Geht jetzt die Luftblase von ihren Zeichen nach dem einen Ende der Libelle hin, wie dies gewöhnlich geschieht, so ist die Achse des Fernrohrs nicht horizontal, auch nicht parallel zur Libelle. Man verbessere den Fehler zum Theil vermittelst der Fußschraube, zum Theil mittelst der Fingerschraube an der Libelle; vergl. §. 69. — Es ist rathsam, anfänglich nur wenig mit der Libellenschraube zu corrigiren, weil wahrscheinlich der Fehler größtentheils in der Ebene liegt, worauf das Niveau ruht; daher auch die Correction jetzt noch größtentheils mit der Fußschraube bewirkt wird. Dies Umwenden des Fernrohrs und Einstellen der Libelle muß so oft erneuert werden, bis die Luftblase zwischen ihren Zeichen bleibt, wie man auch das Fernrohr einlegen mag. Der Grund dieser Berichtigung ist nicht schwer einzusehen.

Nach den erwähnten zwei Hauptcorrectionen ist die dritte c) nehmlich die Berichtigung der Umdrehungsachse und der auf ihr senkrechten Ebene, ohne viel Mühe

weiter zu vollbringen. Man befestigt nehmlich das Fernrohr vermittelst der Halsringe auf seinen Y's, und dreht die vertikale Achse R so weit, um 180°, herum, daß das vorher nördliche Ende des Fernrohrs nun südlich zu stehen kommt. Bleibt die Luftblase in der Mitte, so haben die Y's ihre richtige Lage; im entgegengesetzten Falle verbessert man die Hälfte des gefundenen Fehlers (Abweichung) durch die am untern Ende (Prisma) des einen Y angebrachte Kopfschraube, die zweite Hälfte durch die Fußschraube. Hat man auf solche Weise das Niveau in der Ebene von Süd nach Nord horizontal gestellt, so bedarf es noch einer Berichtigung der Ebene von Ost nach West. Man drehe also das Niveau um die Achse R nach dieser Richtung, und verbessert dann, wenn die Libelle nicht gehörig einspielt, die Abweichung zum Theil durch die östliche, zum Theil durch die westliche Fußschraube. Ist die Berichtigung so weit gediehen, daß beim Umdrehen des Fernrohrs und seiner Libelle um die Achse die Luftblase immer zwischen ihren Zeichen bleibt, so steht das ganze Instrument in der zum Nivelliren erforderlichen Lage.

Niveau's von der hier beschriebenen Construction, welche auf jeden Fall die sonst gebräuchlichen an Genauigkeit weit übertreffen, werden hier zu Berlin in Pistor's Werkstatt sehr vollkommen angefertigt. Das Fernrohr hierzu ist 18zöllig, der Werth der Abtheilungen zwischen je zwei geäzten Theilstrichen der Libelle ungefähr gleich 5 Sek. im Bogen, so daß also das Fortrücken der Luftblase um sechs solcher Theilstriche eine halbe Minute des Neigungswinkels anzeigt; eine Genauigkeit, welche zu den feinsten Nivellements vollkommen ausreicht.

Auf eine ähnliche Art, wie hier am Niveau die Berichtigung des Fadenkreuzes gegen die Achse des Fernrohrs und der Libelle gegen dieselbe angezeigt wor-

den, geschieht solche auch an Winkelmessern, deren Fernrohr mit einer Libelle in Verbindung steht, um eine horizontale Visirlinie zu erhalten.

Niveau's nach andrer Bauart, z. B. mit zwei Fernröhren, oder nach Picard mit einem Bleiloth statt der Libelle u. s. w. kann der Leser, welchem daran etwas liegt, in verschiedenen Schriften, z. B. in Mayer's pract. Geometrie, in Adams geom. und graph. Versuchen ꝛc. nachsehen.

Einige andere nützliche Bemerkungen über den richtigen Gebrauch des Niveau's sollen in der fünften Abtheilung, wo vom practischen Nivelliren gehandelt wird, nachfolgen. Das hier Gesagte beruht auf einfachen Sätzen der Elementargeometrie, und wird durch Betrachtung eines Nivellirinstrumentes erst recht anschaulich.

§. 83.

Eingetheilte Maßstäbe und Zielscheiben zum Nivelliren.

An den Punkten auf der Erdoberfläche, deren Höhenunterschied durch Nivelliren gefunden werden soll, müssen senkrecht gerade Stangen mit Signalen aufgestellt werden, auf welche die durch ein Niveau erhaltene horizontale Visirlinie gerichtet wird. Hierzu braucht man insgemein viereckige prismatische Stäbe von gutem festen Holze, sehr gerade bearbeitet, etwa 10 Fuß lang und 4 Zoll nach allen Seiten breit, nebst einer Zielscheibe, welche sich längs der Stange auf und abwärts bewegen und an jeder Stelle derselben befestigen läßt.

Jeder Nivellirstab ist von unten nach oben in Fuße, Zolle und Linien oder nach irgend einem andern Maße eingetheilt; unten ist der Stab mit Eisen beschlagen;

mit diesem flachen Ende wird er auf den Boden oder noch besser auf das oben ebene Ende eines in die Erde eingetriebenen Holzpfahls senkrecht aufgesetzt, so daß der Nullstrich der Theilung mit dem Punkt über der Erde, dessen Erhöhung oder Erniedrigung über einen andern gesucht wird, so genau wie möglich zusammenfällt. Um aber den Stab vollkommen senkrecht aufzustellen, welches bei Arbeiten der Art unerläßlich ist, bedient man sich eines Bleilothes auf die bekannte Weise.

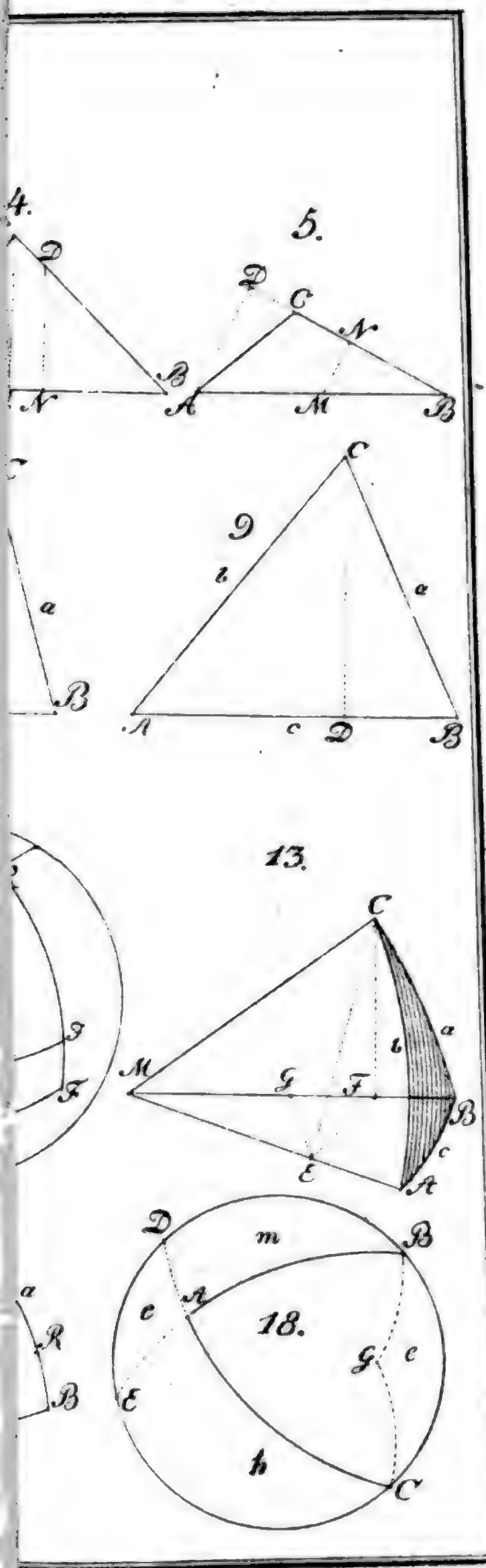
Die Zielscheibe hat die Form eines Quadrats, etwa 1 Fuß ins Gevierte; sie wird entweder zur Hälfte schwarz, zur Hälfte weiß angestrichen, so daß die Scheidungslinie zwischen Schwarz und Weiß zur Ziellinie dient, oder man theilt sie durch zwei Senkrechte in vier gleiche Quadrate, wovon zwei entgegengesetzte weiße, die zwei andern hingegen schwarze Farbe erhalten, so daß hier der Mittelpunkt der quadratischen Scheibe zum Zielpunkt dient. Die Abmessungen der Zielscheiben an beiden Nivellirstangen müssen völlig gleich gemacht werden; in diesem Falle hat man nicht nöthig, beim Nivelliren die Höhen vom untern Ende einer Stange bis zum Mittelpunkt seiner Zielscheibe zu nehmen, sondern nur die Höhen, welche der untere Rand einer jeden Zielscheibe an seinem eingetheilten Rand anzeigt; sonst kann man auch zu dieser Höhe die halbe Breite jeder Scheibe addiren u. s. w. Diese Scheiben kann man aus dünnen Holzplatten oder noch besser aus dünnem ebengeschlagenen Eisenblech machen. Um sie längs der Stäbe auf und abwärts bis auf einen gewissen Theilstrich bewegen und in diesem Stande befestigen zu können, lassen sich mancherlei Einrichtungen gedenken. Nach der gewöhnlichen bekannten Weise läßt sich die Zielscheibe mittelst einer Hülse und einer Schnur, welche oben über eine Rolle läuft, durch Anziehen oder Nachlassen derselben, höher oder tiefer am Nivellirstab stel-

len; durch das Anbinden der Schnur an einem Stift des Stabes wird dieselbe in einer bestimmten Lage erhalten. Besser wird es seyn, wenn man sie mit einem Stab (Lineal) in feste Verbindung setzt, diesen Stab in einer Fuge des größern Nivellirstabes verschiebbar macht, und durch eine Schraubenvorrichtung beide Stäbe zusammen befestigen kann, um die Zielscheibe an einer gewissen Stelle zu erhalten u. s. w.

Ich will in ein weiteres Detail über diesen an sich sehr leichten Gegenstand nicht eingehen. Eine andre Vorrichtung der Art mit zwei Zielscheiben an jedem Nivellirstab kann der Leser in Mayer's pract. Geom. 3r Bd. S. 588. nachsehen.

Digitized by Google

Tab. I.


4.
D
N
B
5.
D
C
N
N
A
M
B
C
a
B
D
b
a
A
c
D
B
13.
C
D
F
M
b
a
G
F
B
E
c
A
D
m
B
a
c
R
18.
R
G
c
B
E
h
C

Digitized by Google

Systematisches Handbuch

der gesammten

Land- und Erd-Messung

mit

ebener und sphärischer Trigonometrie

auch

Beschreibung

der neuern brauchbaren Meßinstrumente

von

August Schulz-Montanus

Doctor Philos., Math. et Phys.

Zweiter Band.

Mit 8 Kupfertafeln.

Berlin,

bei August Rücker.

1819.

zed by Google

Vorerinnerung.

Auch in diesem Theile habe ich überall unnütze Weitläufigkeiten vermieden, und nur das Nöthige mit der möglichsten Kürze vorgetragen. Deßhalb sind auch nur wenige Zahlenbeispiele gegeben, wodurch Raum erspart und der Preis des Werkes bedeutend ermäßiget worden ist.

Uebrigens wird es für den Leser nicht schwer fallen, sich jeden Satz und jede Aufgabe mit Zahlenbeispielen zu belegen, und hierzu fodere ich dringend auf, indem dadurch die einzelnen Sätze, unbedenklich an Klarheit und Anschaulichkeit gewinnen, ihr Studium erleichtert, das Selbstdenken aber geübt wird.

Weitere Belehrungen über die in der sechsten Abtheilung vorgetragenen astronomischen Sätze enthalten:

Bode's Erläuterung der Sternkunde, 2 Theile, (ungemein faßlich und populär geschrieben).

Bürja's Lehrb. der Astronomie, 5 Theile, (zwar mit vielen sonderbar verdeutschten Kunstausdrükken, sonst aber deutlich und gründlich.)

Schubert's theoret. Astronomie, 3 Bände, und populäre Astronomie, 2 Theile.

Klügel's Astronomie, im 3ten Theil seiner Encyklopädie.

Rößler's Astronomie, 2 Theile.

Bohnenberger's Lehrbuch der Astronomie, oder dessen geographische Ortsbestimmung u. s. w.

Auch mehrere physikalische Werke, z. B. Hube's Naturlehre, tragen die brauchbarsten astronomischen Sätze vor. Von französischen Werken verdienen hauptsächlich gelesen und ernstlich studirt zu werden:

Biot, Traité élémentaire d'astronomie physique, 2 Vol.

Laplace, Exposition du système du monde II Tom. (deutsch übers. von Hauff.)

Desselben Traité de mécanique céleste, IV Vol. (deutsch übersetzt von Burkhardt — unstreitig das scharfsinnigste und gründlichste aber auch zugleich das schwierigste Werk über Astronomie.)

ter den Sonnen- und Mond-Tafeln ſind die be-
:

v. Zach Tabulae motuum Solis iterum correctae etc.

Delambre Tables du soleil und Bürg, Tables de la lune. Beide ſind enthalten im 1ſten Theil der tabl. astron. publiées par le bureau des longitudes de France, Paris 1806.

Durch die Erinnerung eines ſehr achtungswer-
n Schriftſtellers, ſehe ich mich zu der nochmahli-
n Bemerkung veranlaßt: daß ich in der 3ten Ab-
eilung abſichtlich und plangemäß nur die vorzüg-
hſten und brauchbarſten Meßinſtrumente beſchrieben,
ıd dagegen einige andere weniger nothwendige, wel-
e durch jene entbehrlich gemacht werden, unerwähnt
laſſen habe. So verhält es ſich mit einigen neuern,
ie mir ſcheint, zu complicirten und noch dazu koſt-
ıren Abänderungen des Meßtiſches, ingleichen mit
m Spiegellineal von Fallon. Dies letztere iſt,
enn es ganz vollkommen ſeyn ſoll, für ſeinen be-
hränkten Zweck, rechte, halbrechte Winkel ꝛc. im
elde zu beſtimmen und abzuſtecken, viel zu theuer.
)erſelbe Zweck läßt ſich auch mit einem nicht viel
oſtbareren Taſchenſextant oder reflectirenden Halb-
reis nach Douglas erreichen, und letztere Werk-
euge laſſen ſich zugleich zu kleinern Triangulirungen

anwenden, wozu ſich das Fallonſche Lineal, ſeiner Conſtruction zufolge, nicht eignet. Gleicherweiſe kann man den ſogenannten katoptriſchen Zirkel entbehren.

Inhalt

des zweiten Bandes.

Vierte Abtheilung.

Hauptsätze der Land- und Erdmessung.

		Seite
§. 84—87.	Absteckung gerader Linien auf der Erde	1—14
§. 88.	Messung derselben mittelst einer Meßkette	14
§. 89.	Fehler der Kettenmessung	19
§. 90.	Messung geradlinigter Distanz mit Maßstäben	23
§. 91.	Messung über Berg und Thal, Cultelliren der Berge	27
§. 92.	Flüchtige Distanzenmessung — Schallmessung	29
§. 93.	Messung und Verjüngung krummer Linien, Perpendikularmethode	36
§. 94.	Absteckung von rechten Winkeln, Perpendikularen im Felde	42
§. 95.	Absteckung gegebener Winkel im Felde	48
§. 96.	Absteckung von Parallelen	52
§. 97.	Winkelmessung, Genauigkeit derselben, Winkel des deutlichen Sehens, gemeine Dioptern und Fernrohr, Dicke der Fäden ꝛc.	58
§. 98.	Winkelmessung mit Kette und Stäben	63
§. 99.	Winkelmessung mittelst des Meßtisches	70
§. 100.	— mittelst eigner Winkelmesser	77
§. 101.	Reduction schiefgemessener Winkel auf den Horizont	80
§. 102.	Centriren der Winkel, 3 Methoden, Parallaxe des Sextanten	92
§. 103.	Indirecte Messungen durch Kette und Stäbe	101

§. 104. Allgemeiner Begriff von Meßtiſchaufnahmen, geometriſches Netz, Situationsbezeichnung — Seite 104

§. 105—108. Meßtiſchaufnahmen durch Vorwärtseinſchneiden — 111—121

§. 109—115. Meßtiſchaufnahmen durch Rückwärtseinſchneiden, 5 Methoden — 122—150

§. 116. Allgemeiner Begriff vom trigonometriſchen Trianguliren, Dreiecknetze erſter, zweiter und dritter Ordnung; Detailliren mit dem Meßtiſch — 150

§. 117—119. Einfachere Fälle des trigonometriſchen Trianguliren's — 153—157

§. 120—121. Pothenotſche Aufgabe, trigonometriſch aufgelöſt, 2 Methoden — 158—169

§. 122. Zuſammengeſetztere Fälle dieſes Problems, von Lambert ꝛc. — 169

§. 123. Höhenmeſſungen; geometriſche, trigonometriſche und barometriſche Methoden — 175

§. 124—129. Einfache und zuſammengeſetztere Höhenmeſſungen — 177—188

§. 130—133. Nebenaufgaben der Diſtanzen- und Höhen-Meſſung — 188—193

§. 134. Weitenmeſſung aus einer Station, Inſtrumente hierzu, als: Pantometer, Diſtanzenmeſſer, Diaſtimeter recenſirt — 193

§. 135. Reduction ſchiefgemeßner Diſtanzen auf ihre horizontalen Projectionen — 199

§. 136, 137. Reduction ſchiefgeneigter Dreiecke auf den Horizont eines beſtimmten Punktes auf der Erde — 200

§. 138. Unterſchied zwiſchen horizontalen Diſtanzen und den zugehörigen Bogenlängen auf der Erde — 201

§. 139. Wahrer und ſcheinbarer Horizont der Oerter auf der Erde — 203

§. 140. Gefälle zweier Oerter, Methode der Berechnung — 205

Seite

§. 141. Wie weit kann man von einem Berg, deſſen Höhe bekannt, rund herum im Horizont ſehen? 206

§. 142. Beſtimmung der Berghöhen aus entfernten Standpunkten 208

§. 143. Irdiſche Strahlenbrechung (Refraction), Größe derſelben, Correction der Höhenwinkel und Höhen wegen der Refraction 210

§. 144. Begriff von den zuſammengehörigen Fehlern in einem terreſtriſchen Dreieck 220

§. 145. Differentialgleichung für die zuſammengehörigen Fehler 223

§. 146. Vortheile einer langen Baſis zum Trianguliren 228

Fünfte Abtheilung.

Praxis der niedern Landmeſſung.

§. 147. Umfang und Methoden der Feldmeßkunſt 232

§. 148. Verjüngungsmaßſtab der Situationspläne und Charten. Allgemeine Darſtellung einer practiſchen Triangulirung mit dem Meßtiſch 239

§. 149. Recognoſcirung des aufzunehmenden Terrains 243

§. 150. Wirkliche Triangulirung mit dem Meßtiſch. Bild davon 246

§. 151. Fortſetzung derſelben auf mehreren Meßtiſchblättern 257

§. 152. Vom Aufnehmen mit der Bouſſole überhaupt 260

§. 153. Vorzüglicher iſt das Aufnehmen mit dem Aſtrolabium und Meßtiſch 263

§. 154. Andere Methoden, Figuren im Felde aufzunehmen 266

§. 155. Aufnahmen vermittelſt der Perpendikularmethode 270

§. 156. Aufnahmen von Terrainerhöhungen, Bergen, und Darſtellung derſelben auf Situationscharten, Lehmannſche Bergzeichnung erklärt und gewürdigt 275

Seite

§. 193. Längengradmeſſung, zur Zeit noch unvollkommen 443

§. 194. Gradlängen von Parallelkreiſen unter verſchiedenen Breiten 445

§. 195. Reduction großer Baſen und Aufnahmen auf den Horizont (Niveau) des Meeres 447

§. 196. Aus dem Breitenunterſchied zweier Oerter, die in einerlei Meridian liegen, werde ihre Entfernung im Bogen nach Meilenmaß gefunden 448

§. 197. Aus dem Breitenunterſchied und Längenunterſchied zweier Oerter werde ihre Entfernung im Bogen nach Meilenmaß gefunden 449

§. 198. Aus dem Breitenunterſchied und der Bogenentfernung (in Meilen) zweier Oerter werde ihr Längenunterſchied gefunden 449

§. 199. Aus der Entfernung zweier Oerter, aus der Breite des einen und dem Azimuth des zweiten werde die Breite und der Längenunterſchied des zweiten Ortes gefunden. 450

§. 200. Vom Flächeninhalt triangulirter Erdſtrecken im Allgemeinen 451

Vierte Abtheilung.

Hauptsätze und Aufgaben der Land- und Erd-Messung, einzeln betrachtet.

Bezeichnung und Messung geradlinigter Distanzen auf der Erdoberfläche.

§. 84.

In der niedern und höhern Geodäsie werden directe nur Winkel und geradlinigte Distanzen gemessen mit besonders hierzu erfundenen Werkzeugen, von welchen die vorzüglichsten und brauchbarsten in der dritten Abtheilung dieses Werkes beschrieben worden. Diese gemessenen Winkel und Längen werden die Grundlage zu anderweitigen zum Theil sehr weit ausgedehnten geodätischen Bestimmungen, und zwar erhält man letztere um so schärfer, je annähernder und gewisser man die Größen der Winkel und Distanzen zu finden vermag.

Obgleich die Instrumente zum Winkelmessen künstlicher, zusammengesetzter und schwerer anzufertigen sind, als die zu Längenmessungen dienlichen, so ist dennoch eine genaue Messung der letztern Art mit weit mehr Schwierigkeit verbunden, als eine auch noch so scharfe

Winkelbestimmung. Die Schwierigkeit wird um so größer, je länger die auszumessenden Distanzen und je genauer sie verlangt werden. Dieser Fall tritt bei Triangulirung einer sehr weit ausgedehnten Erdstrecke, eines großen Landes, so wie bei jeder Gradmessung zur Bestimmung der wahren Gestalt der Erde, immer ein; hier handelt es sich nehmlich zuvörderst um die richtige Bestimmung einer möglichst langen Grundlinie (Basis), an welche ein mehr oder weniger zusammengesetztes Dreiecksnetz angeknüpft werden soll. Auch bei kleinern Triangulirungen vermittelst geometrischer Construction, wozu man mit Vortheil den Meßtisch anwendet, hängt die Genauigkeit der ganzen Arbeit, die sichere Bestimmung gesuchter Abstände verschiedener Oerter und ihrer gegenseitigen Lagen großentheils von dem Grad der Genauigkeit ab, womit eine oder mehrere Standlinien ausgemessen werden. Fehler, welche hier begangen werden, pflanzen sich auf das ganze System einer trigonometrischen oder topographischen (geometrischen) Vermessung fort. Hieraus folgt, daß man bei Ausmessung geradlinigter Distanzen, hauptsächlich, wenn sie einem zusammenhängenden Dreiecksnetz zur Grundlage dienen sollen, die größte Sorgfalt anzuwenden habe, und hierin nicht leicht zu weit gehen könne. Wo große Genauigkeit erforderlich, wird eine lange Standlinie in dieser Absicht insgemein zweimahl gemessen, und aus beiden Endresultaten, wenn ihre Abweichung gering ist, das arithmetische Mittel genommen.

Es kommt immer auf die Absicht und den verlangten Grad der Genauigkeit einer Vermessung an, welche Werkzeuge zu Distanzenbestimmungen angewendet werden sollen. Zu großen geodätischen Operationen, z. B. Gradmessungen, werden metallene Maßstäbe, deren Längen man durch besondere sorgfältig eingetheilte Normalmaßstäbe (étalons) wiederholentlich bestimmt, bei

en, die weniger ins Große gehen, werden Meß-
mit hinlänglicher Zuverläßigkeit gebraucht, bei
kleinen Aufnahmen können selbst gut bereitete
nüre ausreichen, bei den gemeinen flüchtigen mi-
chen Aufnahmen müssen sogar Schritte — oft in
ndung mit sogenannten Schrittzählern in Form
Taschenuhr — und ein geübtes Augenmaß Ge-
leisten.

Die Größe einer auszumessenden Standlinie
ndlinie) richtet sich jederzeit nach der Größe der
igten Aufnahme. Bei einer sehr ausgedehnten
gulirung ist es eine wesentliche Bedingung, daß
gemessene Basis so lang wie möglich, zum wenigsten
nem schicklichen Verhältniß zu den übrigen Seiten
darauf gegründeten Dreiecksnetzes sey, und daß
brigens auf einem möglichst ebenen horizontalen
ain genommen werde. Von der Messung sehr lan-
Basen und den dabei erforderlichen Vorsichtsregeln
n der sechsten Abtheilung besonders gesprochen wer-
Hier wird fürs erste nur von der Ausmessung klei-
Distanzen gehandelt, wie sie bei beschränktern to-
graphischen Aufnahmen vorkommen.

Bevor eine solche Distanz, welche entweder durch
rliche Merkmahle oder durch besondere künstliche
male begrenzt wird, gemessen werden kann, muß
zuvor ihre geradlinigte Richtung durch Zwischen-
ale bezeichnen, um beim Fortgang der wirklichen
messung mit Kette u. s. w. in gerader Linie zwischen
beiden Grenzpunkten zu bleiben. Man nennt dies
gemein das Abstecken einer geraden Linie
dem Felde; gewöhnlich braucht man hierzu
e cylindrische Stangen (Absteckstäbe), 6 bis 12 Fuß
, unter gewissen Umständen auch wol noch länger.
Es bedarf übrigens kaum einer Erinnerung, daß
er der Distanz zweier Punkte auf der Erdoberfläche

im Allgemeinen ihr horizontaler Abstand verstand wird, der in einer durch beide Punkte gelegten Ver kalebene liegt. Seltener wird die Messung schiefer gen den Horizont geneigter Abstände in einer Vertik ebene begehrt.

§. 85.

Bezeichnung (Abstecken) einer geradlini ten Distanz auf der Erdoberfläche zw schen zwei bestimmten Punkten.

Es wird hier vorausgesetzt, daß zwei Punkte M u N, zwischen welchen eine gerade Linie oder Vertikalfl che abgesteckt werden soll, sich in einer nahe horizont len Ebene befinde, und daß man von M nach N u umgekehrt visiren könne.

Die gewöhnliche Methode, dies Abstecken zu werkstelligen, ist kürzlich diese:

Wofern die beiden Grenzpunkte M und N ni durch natürliche Merkmahle bezeichnet sind, so geschi dies durch vertikal aufgestellte Stangen, Absteckstäbe Der vertikale Stand derselben läßt sich am zuverläß sten durch ein Bleiloth (Bleifaden) erlangen, unvo kommener dadurch, daß man sie nach dem Augenm unter rechten Winkeln gegen den Grenzrand des sicht ren Horizontes aufrichtet. Man kann die Sorge

---

*) Um solche auf beträchtliche Entfernungen durch den Kont der Farben leichter zu erkennen, versieht man sie auch an ihrem obern Ende mit farbigen Fahnen, und streicht Stangen selbst abwechselnd aus schwarzer und weißer F be an.

vertikalen Stand der Stäbe nie zu weit treiben, es auf genaue Operationen ankommt.

Soll nun in der Direction M N oder in der durch und N gelegten Vertikalebene ein dritter Stab auf- ellt werden, so visirt man von M nach N so, daß Visirlinie die beiden Stäbe nach einer Seite der tikalebene gleichsam berührt, und läßt nun einen ülfen auf vorher verabredete Zeichen, z. B. rechts oder s winkende Bewegungen der aufgehobenen Hand oder gl. zwischen M und N etwa in der Mitte einen dritten ab in R so aufstellen, daß die Visirlinie von M h N zugleich alle drei Stäbe auf gleicher Seite be- rt, und zwar muß diese Berührung nach jeder Rich- ig in der Vertikalebene durch M und N erfolgen, nn die drei Stäbe genau eingerichtet und vertikal en. Man pflegt in diesem Fall zu sagen, daß sich Absteckstäbe decken. Beim Visiren von M nach N es rathsam, sich einige Schritte hinter M aufzustel-

, auch auf doppelte Art nach beiden Seiten an den äben hinzuvisiren, wenn diese von gleicher Dicke sind. aß der Stab R zwischen die Stäbe M und N nicht nau eingerichtet werden kann, wenn man sehr nahe im Stab M nach seiner Mitte hin zielt, leuchtet aus gemein bekannten Sätzen der Optik ohne weitere Er- rung ein.

Auf ganz gleiche Weise kann man ferner in die ertikalebene durch M und N mehrere Stäbe senkrecht ufstellen, zwischen M und R, zwischen R und N u. w. Wird der Grenzpunkt N durch ein fixes Object, B. einen Baum, einen Thurm oder ein anderes Ge- äude bezeichnet, so muß man immer nach einem be- timmten ausgezeichneten Punkt desselben, z. B. nach er Spitze des Thurmes hin visiren, um in gerader inie zu bleiben.

Soll von einem Ort nach einer beliebigen Rich-

tung eine Standlinie abgesteckt werden, welche man si
den Umständen der Aufnahme gemäß selbst auswähl
so ist das Verfahren hierbei wesentlich das eben ange
deutete. Man errichtet zuerst in einer mäßigen Ent
fernung, etwa von 100 Fuß, zwei Stäbe senkrecht
über den zweiten Stab hinaus richtet man durch Visi
ren einen dritten mit den beiden ersten in gerade Lini
(eine Vertikalebene) gehörig ein; so kann man die ab
zusteckende Linie durch Visiren nach mehreren bereit
abgesteckten Stäben hin beliebig verlängern. Soll die
selbe sehr lang werden, so wird die Arbeit schwierig
und erfordert die höchste Aufmerksamkeit. Man wird
viele Stäbe nöthig haben, indessen können beim Fort
gang der Arbeit einige früher ausgestellte Zwischenstäb
wieder ausgezogen und von Neuem gebraucht werden
Je mehr Stäbe man von einem Ort (Stab) aus sehen
und in Hinsicht ihrer Deckung prüfen kann, desto zu
verläßiger erreicht man seinen Zweck. Daß übrigens
zum richtigen Abstecken und zur Prüfung nicht allein
ein Vorwärts- sondern auch ein Rückwärts-Visiren von
später ausgestellten Stäben nach dem ersten im Anfangs
punkt M oder solche, welche gegen diesen hin stehen
Statt finden kann, versteht sich von selbst. Zum Be
huf des Rückwärtsvisirens pflegt man im Anfangspunkt
M der Absteckung ein sehr ausgezeichnetes weit hin sicht
bares Signal, z. B. eine sehr hohe Stange mit Flagge
Strohwisch oder desgl. aufzurichten. Läßt sich am End
punkt der abgesteckten Linie das Signal in M noch
deutlich sehen, und findet man die zuletzt aufgestellten
Stäbe noch in gerader Linie (alignement) mit dem An
fangs- und Endpunkt, so erhält man einen Beweis
mehr von der Genauigkeit der ganzen Operation. Der
Abstand der ausgesteckten Stäbe muß sich in jedem Fall
nach der möglichen Deutlichkeit im Visiren richten, wel
che besonders von der Schärfe der Augen und von der

guten Beleuchtung der Stäbe abhängt. Je weiter man aber diese Abstände nehmen kann, desto gewisser erreicht man seine Absicht.

Handelt es sich um eine sehr lange Standlinie, so erwählt man mit Vortheil zum beständigen Richtpunkt und zur wiederholten Prüfung des Absteckens ein weit entferntes, jedoch deutliches und scharfbegrenztes Object, z. B. eine Thurmspitze. Vermittelst eines solchen natürlichen Alignements wird man sichrer in der Direction der zuerst ausgesteckten Stäbe bleiben, wenn diese weiterhin nicht mehr sichtbar seyn sollten.

Es lassen sich über diesen Gegenstand noch manche Nebenbemerkungen machen, wie dies auch von mehreren Schriftstellern, z. B. von Mayer in seiner pract. Geom. geschieht; da indessen die Theorie der Sache ungemein leicht, und nur die Ausübung in gewissen Fällen mit Schwierigkeiten verknüpft ist, so glaube ich, daß hier die practische Uebung mit Verstand und einiger Aufmerksamkeit mehr thut, als der wortreichste Unterricht. Eine besondere Zeichnung für den Inhalt dieses §. hat mir überflüssig geschienen.

§. 86.

Bezeichnen (Abstecken) einer geradlinigten Distanz bei obwaltenden Zwischenhindernissen des Visirens. (Fig. 46. 47.)

Wir wollen zuvörderst den Fall betrachten, wo zwischen zwei Punkten auf der Erde M und N, welche so weit von einander entfernt liegen, daß man von dem einen nach dem andern nicht deutlich sehen kann, eine gerade Linie abgesteckt werden soll. Hierbei werden wenigstens zwei Personen, die beide gut visiren, erforder-

lich seyn. Das Verfahren besteht im Allgemeinen darin:

Man errichtet in den Grenzpunkten M und N (Fig. 46.) Signalstangen senkrecht, stellt sich ungefähr in der Mitte zwischen M, N nach dem Augenmaß annähernd in der Direction MN nehmlich in C auf, und errichtet hier eine Signalstange. Die zwei Beobachter, von denen wenigstens einer ein geübter Geometer seyn muß, mögen A und B heißen. A visirt von C nach M, und läßt von B ein Signal in der Visirlinie CM einsetzen, nehmlich in D, welcher Ort etwa einige hundert Schritt von C entfernt ist. Eben so visirt B von D nach N, und läßt von A die Signalstange aus C nach E in die Direction DN versetzen. Ferner visirt A von E nach M, und läßt von B die Signalstange aus D nach F versetzen, nehmlich in die Direction EM, eben so kommt durch Visiren von F nach N und gehöriges Einrichten das Signal E nach G in die Direction FN. Man sieht wohl, daß auf diesem Wege die beiden Zwischensignale sich immer mehr der Vertikalebene durch M und N nähern müssen. Fährt man nun mit dieser wechselseitigen Versetzung so lange fort, bis endlich die beiden Zwischensignale in H und K so stehen, daß man beim Visiren sowol H, K, N als auch K, H, M in gerader Linie (einer Vertikalebene) findet, so hat man seinen Zweck erreicht. Zwischen H und M, zwischen K und N lassen sich sodann weiter noch mehrere Stäbe (Signale) in die Direction MN einrichten.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ergiebt sich aus ganz einfachen Sätzen der Elementargeometrie. Es ist hier vorausgesetzt worden, daß man von den beiden Zwischenstationen nach beiden Grenzpunkten M und N der abzusteckenden Linie sehen kann. Wenn es auf weniger Genauigkeit ankommt, wie öfters bei militärischen Absichten, so braucht man zum Ein-

ichten in den Zwischenstationen statt der Signalstäbe die aufrechtstehende Gestalt derer, die das Geschäft ausrichten, zu Zielpunkten (points de vue) u. s. w.

Eine andere Methode, die erwähnte Absteckung zu bewirken, ist folgende:

Man wählt zwischen M und N (Fig. 47.) einen Standort C, von wo aus man die Signale M und N sehen kann, und zwar so, daß die in C aufgestellte Signalstange nach dem Augenmaß sich nahe in der Vertikalebene durch M und N befindet. Man läßt von einem Gehülfen eine Signalstange bei D in der Richtung CM aufstellen. Fände man nun beim Visiren in D oder E, die drei Stangen D, C, E in einer Vertikalebene, so ständen dieselben auch in der Vertikalebene durch M, N. Ist dies nicht der Fall, wie es sich im Anfang der Operation gewöhnlich ereignet, so bringt man die Signalstange aus C nach c in die Richtung oder Vertikalebene DE, läßt ferner die Stange aus D nach d in die Richtung cM, und die Stange aus E nach e in die Richtung cN versetzen. Findet man jetzt beim Visiren in d oder e die Stangen d, c, e in einer Vertikalebene, so stehen sie auch in der Vertikalebene durch M, N. Im entgegengesetzten Falle wiederholt man die erwähnte Operation so oft, bis endlich die drei Mittelstangen in eine solche Lage δ, γ, ε kommen, daß sowol δ, γ, ε, als auch γ, δ, M und γ, ε, N in einer Vertikalebene stehen. Dann befinden sich die Signalstangen δ, γ, ε in einer Vertikalebene durch M und N.

Auf eine ähnliche Weise verrichtet man die Absteckung zwischen zwei Punkten M und N, wenn ein dazwischen liegendes Hinderniß, nehmlich eine Terrainerhöhung, das Visiren von einem Grenzpunkt zum andern unmöglich macht.

Läge zwischen M und N ein Hügel, so müßte

man die Signalstange C zuerst auf dem höchsten Punkt desselben, die Stangen D und E aber ziemlich nahe dabei aufstellen, und zwar müßten letztere eine beträchtliche Höhe haben, wenn die Berghöhe nach der einen oder andern Seite stark abgedacht wäre.

Jede Absteckung von beträchtlicher Länge auf eine oder die andere Art wird immer nach Beschaffenheit der vorwaltenden Terraineigenheiten und Hindernisse ein mehr oder weniger langwieriges mühsames Geschäft. Indessen kürzt einige Uebung und ein richtiges Augenmaß diese Arbeit sehr ab. Man wird gleich anfangs das Signal C (Fig. 46.) annähernd zwischen M und N bringen, nach Maßgabe des Winkels M C N; je näher dieser Winkel 2 R = 180° kommt, desto richtiger wird die Lage von C gegen M N. Man muß, wofern die Terrainbeschaffenheit und die Deutlichkeit im Visiren es erlaubt, beim Einrichten die Weiten C D, D E, E F u. s. w. so lang wie möglich nehmen, um sich so schneller der wahren Vertikalebene durch M, N zu nähern. Nachdem man vom ersten Standort C aus das Signal D in C M eingerichtet, und dann C nach E zwischen D N versetzt hat, wird man beim Visiren von E nach D und M hin leicht mit den Augen abschätzen, ob man noch weit von M, N abweicht. Beträgt diese Abweichung viel, so kann man von E aus, anstatt das Signal D nach F in die Direction E M einzurichten, dasselbe gleich um einen größern Winkel D E R, folglich näher gegen M N hin vorrücken, und z. B. in O statt in F aufstellen lassen; dadurch kommt auch beim folgenden Act das Signal E nach I, statt nach G; mithin nähert man sich dann schneller der Vertikalebene M N, u. s. w.

Aus dem hier erläuterten einfachern Falle läßt sich das richtige Verfahren bei zusammengesetztern ohne Schwierigkeit ableiten, z. B. wenn zwischen M und N

ein hoher breiter Bergrücken oder zwei Hügel in solcher Lage ständen, daß man zwei verschiedene Standpunkte auf der Höhe wählen müßte, um von dem einen aus M, vom andern aus N zu sehen. Die gehörige Einrichtung in die Vertikalebene M N müßte hier mit 4 Zwischensignalen geschehen.

Jede Absteckung über Anhöhen und tiefe Thäler hinweg ist, wie man wohl einsieht, schwieriger, als die auf ebenem Terrain, erfordert daher mehr Zeit und Aufmerksamkeit wegen der dabei möglichen Fehler im Aufstellen der Stäbe und wegen der Hindernisse im Visiren gegen dieselben. Es müssen hier mehrere, zum Theil höhere Signalstangen angewendet, und solche bei beträchtlichen Terrainabdachungen näher gegen einander gestellt werden, als auf einer Ebene. Man lernt das rechte Maß und zweckmäßige Verhalten hierbei am besten durch practische Erfahrung mit gesunder Urtheils- und Augen-Kraft.

Die Absteckung durch Gehölz oder größere Waldung nach einer schon vor dem Gehölz bestimmten Richtung ist immer in der bisher gezeigten Art möglich, wenn die Umstände das im Wege stehende Holz zu fällen gestatten. Man kann sich hier, wie überhaupt da, wo die Absteckung und beliebige Verlängerung einer geraden Linie — Vertikalebene — nach einer willkührlichen Richtung, ausgeführt werden soll, neben den Signalstangen auch noch des Meßtisches mit gemeinem Diopterlineal oder Fernrohr zu größerer Genauigkeit bedienen.

Soll dagegen zwischen zwei Punkten M, N, zwischen denen ein Gehölz liegt, eine Vertikalebene abgesteckt werden, so läßt sich das bisher gezeigte Verfahren natürlicherweise nicht anwenden, sondern es wird zu diesem Behufe eine anderweitige geometrische oder

trigonometrische Aufnahme erfordert. Ein Beispiel möge zur Erläuterung solcher Fälle genügen.

§. 87.

Zwischen M und N soll eine Vertikalebene abgesteckt oder wenigstens durch einige Signale bezeichnet werden; ein dazwischen liegender Wald hindert aber das Visiren von einem Grenzpunkt zum andern. (Fig. 48.)

Wir nehmen an, es lasse sich außerhalb des Waldes seitwärts ein Standpunkt C finden, von wo aus man nach M und N visiren kann, und welcher mit diesen Punkten ein gutes Dreieck bildet, nehmlich mit nicht allzustumpfen noch allzuspitzen Winkeln.

Nun kann man, wie wir weiterhin sehen werden, das Dreieck CMN, nachdem die Distanzen CM, CN gemessen worden, bei C entweder geometrisch mittelst des Meßtisches nach verjüngtem Maß als $\triangle Cmn$ construiren, oder nachdem noch der Winkel MCN in Graden ꝛc. bestimmt ist, dasselbe trigonometrisch berechnen. Auf die eine oder andere Art erhält man die Winkel bei M und N, folglich die Richtungen ME und ND, welche in die durch M, N gelegte Vertikalebene fallen. Durch Aufstellung und gehörige Orientirung des Meßtisches, welcher $\triangle Cmn \sim \triangle CMN$ geometrisch auf Papier construirt enthält, oder eines Winkelmessers, Astrolabium, Boussole ꝛc. in M und N erhält man dann weiter die Visirebenen ME, ND, welche in die Vertikalebene M, N fallen. Setzt man daher in M, E, D, N Signalstangen ein, so ist der Gang der Absteckung bezeichnet, und kann solche sodann beliebig weit fortgesetzt werden.

Ist eine Aufnahme um den Wald herum von M nach N in mehr Seitenlinien, z. B. in Form des Po-

lygons MGCHN auf irgend eine Weise bereits vollbracht, und in einem Plane vorhanden, so erhält man auch hierdurch die Winkel GMN und HNM, und dem zufolge die Richtungen ME und ND der Abſteckung.

Bisweilen wird verlangt, eine gerade Linie (Vertikalebene), deren Direction durch zwei beſtimmte Merkmahle M, N (Fig. 49.) vor einem Gehölz (Wald) gegeben iſt, in ihrer Verlängerung, jenſeits des Gehölzes durch zwei, zu dieſer Beſtimmung hinreichende Signale H, BG zu bezeichnen. Zu dem Ende muß man mit dem Meßtiſch oder trigonometriſch ein Dreieck im Felde MNB beſtimmen, von deſſen Spitze B man in die Gegend jenſeits des Gehölzes freie Ausſicht hat. Das Dreieck MNB wird entweder mit Hülfe der gemeßnen Diſtanz MN, oder einer andern außerhalb derſelben gewählten und gemeſſenen Standlinie AB beſtimmt. Aus dem ſo gefundenen Winkel MNB ergiebt ſich ſein Nebenwinkel BNG, auch iſt die Länge NB bekannt. Um dieſe Beſtimmungsſtücke zu erlangen, reicht ſchon die Meſſung der Länge NB und des Winkels MNB in N hin. An BN lege man unter einem ſchicklichen Winkel eine Viſirlinie, eingebildete Vertikalebene, BR, welche durch die verlängerte MN in H geſchnitten wird. Durch die bekannten Größen BN, ∠ BNH und ∠ NBH iſt das Dreieck NBH, daher auch die Länge BH beſtimmt. Macht man nun von B aus in der Richtung BR vermittelſt der Meßkette oder desgl. die Weite BH der gefundenen Länge gleich, ſo erhält man einen Ort H, welcher in der Verlängerung von MN liegt. Eben ſo läßt ſich für eine zweite Direction oder Viſirlinie BS aus BN, ∠ BNG und ∠ NBG ein zweiter Ort G finden, welcher in die Verlängerung von MN fällt. Durch die zwei Punkte H und G aber wird die abzuſteckende Vertikalebene hinlänglich determinirt.

abgesteckt. Ein Kettenführer bringt das eine Ende der Meßkette senkrecht über den Anfangspunkt A der Messung, indem er den größern Grenzring über einen cylindrischen gegen 4 Fuß hohen Kettenstab schiebt, diesen Stab mit seiner eisernen Spitze in den Boden steckt, und in senkrechter Stellung festhält. Ein zweiter Kettenführer zieht die Kette in der Richtung A B aus, und stellt in ähnlicher Weise das zweite Ende der Kette (Ring an einem Kettenstab) senkrecht über dem Boden auf. Es versteht sich von selbst, daß hierbei die Kette so stark, nehmlich so geradlinig wie möglich angespannt werden, und die Linie, welche ihr Zug vorstellt, horizontal seyn, auch genau in die abgesteckte Vertikalebene fallen müsse u. s. w. Ihre horizontale Ausspannung pflegt man nach dem Augenmaß zu bewirken und zu prüfen, indem man die Kettenstäbe vertikal aufstellt, wobei man sich wohl eines Bleilothes bedienen kann, und die äußern Kettenringe gegenseitig so weit verschiebt, erhöhet oder erniedrigt, daß die ausgespannte Kette scheinbar unter einem rechten Winkel gegen jeden Stab steht. Die gerade Linie zwischen dem Anfangspunkt A und der nächsten Signalstange kann man durch eine dazwischen ausgespannte Schnur bezeichnen, um somit den Zug der Kette in der Vertikalebene zu erhalten; auch kann der erste Kettenführer den Kettenstab des zweiten durch Visiren in die wahre Direction einrichten, wie im vorigen §. gezeigt worden.

Nachdem dieser Act vollbracht ist, zieht der erste Kettenführer in A seinen Stab aus, und setzt dafür eine Signalstange ein, oder bezeichnet diesen Grenzpunkt auf eine andre Art, etwa durch Einschlagung eines hölzernen Pflocks; gleichzeitig zieht auch der zweite Kettenführer seinen Stab aus, und setzt in das Loch dieser Stelle ein kleineres sogenanntes Zeichenstäbchen, wovon er etwa 10, oder auch noch mehr, numerirt oder nicht,

bei sich führt. Beide Kettenführer gehen nun gleichzeitig mit ausgespannter Kette in der Richtung A B vorwärts, bis der erste in den vorigen Standort des zweiten gelangt; hier zieht er das Zeichenstäbchen N. 1. aus, steckt es in eine besondere Tasche, und setzt in das Loch dieser Stelle seinen Stab mit dem Kettenring von Neuem ein, der zweite Kettenführer zieht die Kette scharf an u. s. w. So wird der Act, wie das erste Mahl, wiederholt, bis etwa 10 Zeichenstäbchen ausgestreckt, und vom ersten Kettenführer eingesammelt worden sind. Beträgt nun eine Kettenlänge 5 Ruthen = 50 Rheinl. Dec.-Fuß, so ist bis hieher eine Länge von 500 Dec.-Fuß ausgemessen. Jetzt kann der erste Kettenführer die eingesammelten zehen Zeichenstäbchen wieder an den zweiten abgeben, auch kann die erste Messung von 10 Kettenlängen = 500 F. in einer Schreibtafel, und durch ein in den Endpunkt dieser Distanz eingesetztes Merkmahl (numerirten Pflock) bemerkt werden. So wird die Operation bis an das Ende der auszumessenden Linie fortgesetzt. Ist das letzte Stück derselben kleiner als eine Kettenlänge, so wird es in Theilen der Meßkette gemessen; noch kleinere Theile als ein Decimalfuß werden mittelst eines hölzernen oder metallenen eingetheilten Fußmaßstabes gefunden. Um am Ende der Messung genau zu wissen, wie viel Kettenlängen, Ruthen, Fuße u. s. w. die gemessene Weite beträgt, muß man in der erwähnten Art zu markiren nichts versäumen. Auch können, wenn ein geübter Geometer die Messung durch zwei oder mehrere Gehülfen leitet, wie es immer seyn sollte, die Distanzen von einzelnen oder wenigstens je zehn Kettenzügen in eine Schreibtafel notirt werden, und folglich nicht leicht Irrungen entstehen. Mir wenigstens sind dergleichen bei öfters ausgeführten Messungen zum Theil sehr langen Standlinien von 3 bis 6tausend Fuß noch nicht widerfahren.

Kommt auf die richtige Bestimmung einer Distanz viel an, wie z. B. solcher Standlinien, auf welche sich eine größere geometrische Aufnahme vermittelst des Meßtisches gründen soll, so thut man wohl, die gemessene Weite noch einmahl rückwärts, vom Endpunkt zum Anfangspunkt hin, zu messen. So wird man in den Stand gesetzt, die ganze Arbeit zu prüfen, und im Fall geringer Differenzen aus beiden Endresultaten das arithmetische Mittel zu nehmen.

Auf sehr ebenem Terrain findet die Kettenmessung keine besondere Schwierigkeit, hier kann man die äußersten Ringe an den Stäben ungefähr in gleiche Höhe über dem Boden erheben; mühsamer wird sie auf etwas erhöhtem Terrain, hier muß man öfters den Ring an einem Kettenstab höher oder niedriger schieben, als den am andern Ende, um die Kette in eine horizontale Richtung zu bringen. Geht die Messung theilweise über beträchtlichere Erhöhungen, so wird man solche Theile der horizontalen Distanz zuverläßiger und bequemer mit Maßstäben (siehe den folgenden §.) ausführen. Zur Ausführung über Berg und Thal eignen sich nur Maßstäbe.

Geht sie über kleine Vertiefungen, Gräben u. s. w., so hilft man sich durch übergelegte Breter, über welche sich die Kette horizontal ausspannen läßt.

Zuweilen kann der Messung ein Hinderniß, z. B. ein niedriges Gebüsch, das man nicht umhauen will, ein Gebäude u. s. w. in den Weg treten. Wie man dann verfährt, wird jeder sogleich erkennen; in diesem Falle weicht man nehmlich von der Vertikalebene in einer senkrechten Richtung um etwas ab, mißt parallel zur Vertikalebene die erforderliche Seitendistanz, und kehrt dann wieder unter einem rechten Winkel in die Vertikalebene zurück u. s. w. Indessen wird dieser Fall nur selten eintreten.

§. 89.

Fehler der Kettenmessung.

Die Fehler einer Kettenmessung, welche in geometrischer Schärfe wohl nimmermehr ganz vermieden, aber durch gehörige Vorsicht und Geschicklichkeit doch sehr vermindert und fast auf Null reducirt werden können, hängen von folgenden Umständen ab:

a) von der unrichtigen Bestimmung der wahren Kettenlänge;

b) von der Verbiegung, Verziehung der Kette während des Gebrauchs;

c) von dem nicht völlig senkrechten Stand der Kettenstäbe und Ketten-endringe über den zugehörigen Punkten auf dem Boden;

d) davon, daß die ausgespannte Kette nicht genau in die abgesteckte Vertikalebene fällt;

e) davon, daß sie nicht ganz gerade ausgespannt wird, nehmlich gegen den Bogen hin in einem kleinen Bogen gekrümmt hängt;

f) davon, daß sie nicht genau horizontal, sondern um etwas gegen den Horizont geneigt, ausgespannt wird.

Von der Prüfung (Verification) der wahren Kettenlänge ist schon in der dritten Abtheilung das Nöthige erinnert worden. Solche muß jeder genauen Distanzenmessung vorausgehen, und selbst während derselben, wenn sie beträchtlich und von großer Bedeutung seyn sollte, von Zeit zu Zeit wiederholt werden. Es lassen sich verschiedene Methoden einer solchen Untersuchung gedenken; genaue Maßstäbe gewähren die Mittel dazu. Man kann z. B. zuerst damit die Länge der ganzen Kette, sodann die Längen einzelner Theile derselben untersuchen, hierauf aber eine etwas beträcht-

liche Distanz zuerst mit Maßstäben und dann mit der Meßkette ausmessen u. s. w. Es versteht sich von selbst, daß man am Ende einer großen Messung nicht die angebliche Kettenlänge, z. B. 5 Ruthen = 50 Dec.F., sondern die verificirte in Rechnung bringen darf. Ein ganz unnützer Scrupel wäre es, wenn man bei Messungen mit der gewöhnlichen Meßkette auch auf die Temperaturveränderungen Rücksicht nehmen wollte.

Der Fehler, welcher daraus erwächst, daß die ausgespannte Kette nicht immer in der bestimmten Vertikalebene oder in der auszumessenden geraden Linie bleibt, läßt sich folgendergestalt beurtheilen:

Es bezeichne (Fig. 50.) A M ein Stück der auszumessenden Linie, A C eine seitwärts gemeßne Länge, C D den senkrechten Abstand (Abweichung) ihres einen Grenzpunktes C von der wahren Direction A M; so wird $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$. Ist nun die Größe der Abweichung C D wenigstens sehr nahe bekannt, so läßt sich die gemessene fehlerhafte Weite A C in die wahre A D leicht verwandeln. Gesetzt C D wäre = 10 Dec. Fuß (so groß ist aber wohl nie dieser Fehler), die Länge A C = 500 Dec. F., so wäre die reducirte Länge A D $= \sqrt{249900} = 499{,}9$ F. = 499 F. 9 Zoll. Folglich müßte man von der falsch bestimmten Länge A C = 500 F. 1 Zoll abziehen, um die wahre A D zu erhalten.

Eben so kann man den Fehler schätzen, welcher entsteht, wenn die Kette nicht vollkommen horizontal, sondern in eine gegen den Horizont etwas schief geneigte Lage ausgezogen wird, wie dies auf unebenem Terrain oft geschieht. Bedeutet (Fig. 50.) A M die Horizontale in der Vertikalebene, A C die fehlerhafte schiefe Lage der Kette, C D das Maß der Abweichung, so erhält man die reducirte Länge $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$. Wäre, wie dies wohl zuweilen geschieht, eine wissentlich

chiefgemeßne Distanz, und der Elevationswinkel A nnähernd bekannt, so würde die auf den Horizont von reducirte Länge $AD = AC \cdot \cos. A$. Insgemein nd die gefundenen Unterschiede für gewöhnliche Mes- ungen sehr unbeträchtlich. Dessenungeachtet wird man mmer wohl thun, dieselben zu berücksichtigen und in echnung zu bringen.

Ein den ebenerwähnten entgegengesetzter Fehler der Messung entspringt daraus, daß die Kette zwi- hen ihren vertikal stehenden Stäben nicht straff genug, lglich nicht ganz geradlinig ausgespannt wird. Ge- öhnlich ist dieser Fehler für eine Kettenlänge sehr un- edeutend; er läßt sich theoretisch so beurtheilen:

Es bezeichne (Fig. 51.) AB die an ihren Stäben usgespannte Kette, ACB den Bogen, nach welchem e gegen den Boden hin herabhängt, ADB den wah- en horizontalen Abstand ihrer Endringe, CD das un- efähre Maß ihrer Abweichung von der horizontalen Distanz AB; die Sehne des Bogens BC (halbe Ket- enlänge) kann hier ohne merklichen Irrthum dem Bo- en BC gleichgesetzt werden.

Demnach wird $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2}$, und statt er ganzen Kettenlänge muß der wahre horizontale Ab- tand $AB = 2\sqrt{BC^2 - CD^2}$ genommen werden. Be- rägt z. B. die Kettenlänge 5 Rheinl. Ruthen = 50 F., ie Abweichung $CD = \frac{1}{2}$ F. = 0,5′ (5 Dec. Zoll); so äre $BD = \sqrt{25^2 - 0,5^2} = \sqrt{624,75'} = 24,995'$, lso der horizontale Abstand $AB = 49,99'$ und mit- in um 1 Linie kleiner als die Kettenlänge = 50′ an- eigt. Da bei gehöriger Vorsicht die Abweichung CD och weniger beträgt, als 5 Zoll, so wird der Irrthum in der horizontalen Länge AB noch geringer. Ein so unbeträchtlicher Fehler kann daher bei den meisten Feld- messungsoperationen außer Acht gelassen werden; in-

dessen kann man ihn auch, da er sich bei Messung einer sehr großen Weite, etwa von 4000 bis 5000 Fuß, anhäuft, am Ende in Rechnung bringen, wenn man die Bogenabweichung der Kette, CD, durch Versuche oder eine ungefähre Schätzung kennen gelernt hat. Am rathsamsten wird es immer seyn, die Kette so scharf wie möglich anzuziehen; um aber ihre Bogenkrümmung möglichst zu verhüten, bediene ich mich bei meinen Messungen dieses, von den geodätischen Schriftstellern unerwähnt gebliebenen, Handgriffs: Indem zwei rüstige Kettenzieher die Kette straff anziehen, hebe ich in der Mitte derselben C die niederziehende Last so weit in die Höhe, daß der horizontale Zug der Kette erleichtert und nach dem Augenmaß vollständig erreicht wird ꝛc. Die Kette beim Ausziehen auf dem Boden aufliegen zu lassen, so wie dieselbe beim Fortgang der Messung am Boden hinzuschleifen, finde ich in jedem Fall verwerflich. Es ist überhaupt fast unglaublich, welche grobe leicht vermeidliche Fehler häufig bei Weitenbestimmungen mit der Kette begangen werden; ich bin einige Mahle Augenzeuge solcher Fahrläßigkeiten gewesen; meinen Erinnerungen dagegen wurde die tröstliche Einwendung gemacht: auf solche Kleinigkeiten komme in diesem Falle wenig oder nichts an. So begreift man zum Theil, woher so viele schlechte Aufnahmen, die sich nicht schließen, nicht zu einem harmonischen der Natur gemäßen Ganzen vereinigen wollen, und woher so viele fehlerhafte topographische und geographische Charten ihren Ursprung nehmen. Sapienti sat!

§. 90.

Ausmessung einer Distanz mit Hülfe etalonnirter Maßstäbe. (Fig. 52.)

Nicht allein zur sichern Messung groser Horizontalabstände, sondern auch kleinerer auf sehr unebenem Boden, sind Maßstäbe unumgänglich nothwendig. Der Gebrauch der Kette wäre in diesem Falle nicht allein unbequemer, sondern auch weit unzuverläßiger. Die einfachern und künstlichern Maßstäbe zu diesem Behuf sind in der dritten Abtheilung angezeigt. Es ist rathsam, die hölzernen gut bearbeiteten und eingetheilten Maßstäbe an beiden Enden mit metallenen (messingenen) Einfassungen zu versehen, und diese winkelrecht glatt abzufeilen, um so zwei Maßstäbe in einer geraden Linie zur genauesten Berührung bringen zu können. Bugge (in der Beschreibung seiner Ausmessungsmethode ꝛc.) rathet, das eine Ende eines jeden Maßstabes winkelrecht abzufeilen, das andere Ende hingegen zu einer halben Kugel abzudrehen, wodurch zwei an einander gelegte Stäbe zu genauerer Berührung gebracht werden können. Von der Verification derselben durch eigene metallene étalons, Maßstäbe, ist oben gesprochen worden. Daß Maßstäbe von fettem, harzigem Tannenholze durch den Wechsel der Temperatur nur sehr unmerkliche Dimensionsveränderungen erleiden, davon habe ich mich durch mehrere Versuche selbst überzeugt; daher ich solche für sehr brauchbar zu den gewöhnlichen Distanzenmessungen halte. Noch gehören dazu einige hölzerne Dreifüße mit Tischchen (Schemel), worauf die Maßstäbe gelegt werden; die Tischchen müssen sich durch eine leicht zu erdenkende Vorrichtung etwas erhöhen oder erniedrigen lassen. An beiden Enden eines jeden Maßstabes kann man etwa 1 Fuß hohe

gemeine Visirstifte aufsetzen, um die Lage der Stäbe nach einer bestimmten abvisirten Richtung legen zu können. Ihre horizontale Lage aber, worauf bei zuverläßigen Horizontalausmessungen so viel ankommt, erhält man mit weniger oder mehr Genauigkeit entweder durch die gemeine Setzwaage oder durch die vollkommnere Bergwaage mit Kreisbogen und Libelle, wie ich solche in der dritten Abth. unter dem Namen Clitometer beschrieben habe.

Soll nun die horizontale Distanz zweier Punkte auf einem ebenen Terrain, oder einem solchen, welches wenigstens nicht schnell aufsteigt oder abfällt, gemessen werden, so muß zuvor eine richtige Absteckung zwischen beiden Punkten durch deutlich abzusehende Merkmahle — z. B. Meßfahnen — geschehen seyn. Es stelle AC in Fig. 52 ein Stück der zu messenden Weite vor, R eine Meßfahne in der abgesteckten Vertikalebene, welches Merkmahl und außerdem wohl noch mehrere weiter hin stehende sich von A aus scharf und deutlich anvisiren lassen. Auf einen Dreifuß nahe bei A, dem Anfangspunkt der Messung, wird von einem der drei Arbeiter, von denen wenigstens einer ein geübter Geometer seyn muß, ein Maßstab ab so aufgelegt, daß sein Endpunkt senkrecht über A auf dem Boden steht; gute Hülfe gewährt hier ein in a aufgehängtes Bleiloth, eine gewöhnliche Bleikugel an einem seidenen Faden. Ein zweiter Arbeiter legt das andere Ende b des 10 bis 15 Fuß langen Maßstabes auf einen zweiten Dreifuß in B. Dieser Punkt B wird fürs erste nach dem Augenmaß in der Vertikalebene gefunden und in einer solchen Entfernung von A, daß b senkrecht über zu liegen kommt; auch werden die Tischchen beider Dreifüße so horizontal wie möglich gestellt. Mit ein wenig Uebung bringt man es hierin bald zur Fertigkeit. Der Arbeiter in A visirt an den Visirstiften hin

egen R; so wird durch gegenseitige Cooperation in A und B die Lage des Stabes a b verbessert, d. h. in die abgesteckte Vertikalebene eingerichtet. Ein dritter Arbeiter prüft mittelst einer in d auf den Maßstab gestellten Setzwaage oder desgl. die horizontale Lage von a b und läßt solche, wenn sie sich fehlerhaft findet, durch gegenseitige Erhöhung oder Erniedrigung der Dreifüße in A und B berichtigen. Ist dieser Act vollbracht, so legt der zweite Arbeiter einen zweiten Maßstab auf den Dreifuß in B, und bringt sein Ende in Berührung mit dem ersten Stab in b, ohne jedoch a b zu verrücken; der dritte Arbeiter (oder auch, welches noch besser, ein vierter) legt das andere Ende c des zweiten Stabes auf einen in C aufgestellten dritten Dreifuß, so daß C in der bestimmten Vertikalebene liegt, und c vertikal über C. Indem der Arbeiter in A an den Visirstiften beider Maßstäbe hin gegen R visirt, wird auch der zweite Maßstab durch den Arbeiter bei C in die Vertikalebene völlig eingerichtet; seine horizontale Lage aber wird wieder wie vorher ajustirt. Es erhellt, daß bei dieser Operation der erste Maßstab seine Lage nicht verändern darf. Indessen läßt sich auch der Anfangspunkt des zweiten Stabes auf dem Tischchen über B durch ein Merkmahl, z. B. einen Strich bezeichnen u. s. w. Daß beide Maßstäbe in Berührung eine gerade Linie a c = dem Horizontalabstand der Punkte A, C auf der Erde bilden, und daß a c in die abgesteckte Vertikalebene falle, ist bei genauen Messungen der Art ein höchst wichtiger, gewissenhaft zu beachtender Umstand. Aufmerksamkeit und unnachgiebige Strenge von Seiten des dirigirenden Geometers, welcher überall nachsieht und verbessert, führen sicherlich auf das rechte Maß und Ziel. Nachdem dieser erste Hauptact vollendet, und somit ein Stück der ganzen Horizontalweite, nehmlich a c = zwei Maßstab-

längen gefunden worden, bringt der Arbeiter in A seinen Maßstab und Dreifuß über C hinaus, und legt ihn auf das Tischchen in C auf, wobei der Stab b c unverrückt seine Lage beibehält u. s. w. Im übrigen verfährt man wieder auf ganz gleiche Weise, wie vorher. So geht mit der erwähnten strengen Vorsicht und Aufmerksamkeit die Messung in der bestimmten Vertikalebene weiter fort bis zum zweiten Endpunkt des zu findenden Horizontalabstandes. Beträgt endlich das letzte Stück derselben keine ganze Maßstabslänge, so wird dasselbe in Theilen einer solchen Länge, Fußen, Zollen ꝛc. gefunden.

Auf die angezeigte Art läßt sich, wie ich aus eigner Erfahrung weiß, eine Horizontaldistanz sehr sicher ausmessen, obwohl nicht so schnell als mit der Meßkette; dafür erhält man aber auch mit Maßstäben in jedem Fall ein gewisseres Resultat. Ich rathe jedem meiner Leser, der in der Folge mit Meßoperationen zu thun haben sollte, vergleichende Versuche mit der Kette und mit Maßstäben anzustellen, um sich von dieser Wahrheit vollständige Ueberzeugung zu verschaffen.

Statt der Dreifüße (Schemel) sind zu großen Messungen auch sogenannte Brücken, d. h. stärke hölzerne in den Boden einzuschlagende Pfähle mit darüber gelegten Latten in Vorschlag und Ausübung gebracht worden. Ein kluger und geschickter Geometer wird nach Beschaffenheit der Umstände überall die rechten Hülfsmittel selbst ermessen. Andere nachläßige Methoden, mit Maßstäben zu operiren, z. B. durch Auflegung derselben auf den Boden, oder Anlegung an eine ausgespannte Schnur hin, verdienen hier keine nähere Erwähnung.

Was das richtige Abzählen der gelegten Maßstabslängen anlangt, so haben mehrere Schriftsteller für nöthig erachtet, auch darüber ausführliche Belehrung und

Regeln zu ertheilen. Mir scheint dies das Leichteste von der ganzen Sache; ich meine eine Schreibtafel oder eine Menge Marken in einer Tasche, von denen nach jeder Legung eines Maßstabes eine in eine zweite Tasche gelegt wird, oder so etwas Aehnliches, könnten jedem Irrthum vorbeugen. Thun dies alle drei Arbeiter zugleich, desto besser. Ein Geometer, der auf solche Art nicht richtig zu zählen, oder nicht aufmerksam zu seyn vermag, soll eine Messung nicht leiten.

§. 91.

Messung über Berg und Thal. (Fig. 53.)

Soll auf einem sehr unebenen Terrain, z. B. über einen Hügel (Berg) hinweg die Horizontalweite zweier Oerter auf der Erde gemessen werden, so kann dies, wie man leicht begreift, nicht zuverläßig mit der Kette, sondern nur mittelst eingetheilter Maßstäbe geschehen. Das gewöhnliche Verfahren hierbei besteht darin:

Zuerst wird die Vertikalebene zwischen beiden Punkten abgesteckt, die Signalstangen müssen hier näher gegen einander stehen, als auf ebenem Boden, um so näher, je stärker derselbe ansteigt oder abfällt. Zum Messen reichen zwei in Fuße, Zolle ꝛc. eingetheilte Maßstäbe aus. Nun mögen A, B zwei Punkte der bestimmten Vertikalebene bedeuten, AD die horizontale Projection (horizontalen Abstand) derselben, welche insgemein, wenigstens auf Plänen und Charten verlangt wird. Ueber A wird ein Maßstab mit Zuziehung eines Bleilothes vertikal von einem Arbeiter aufgestellt, und in dieser Lage festgehalten; ein zweiter Arbeiter legt einen andern Maßstab mit dessen Ende c auf den ansteigenden Boden, mit dem andern Ende an den

vertikalen Maßstab; der Arbeiter in A verschiebt ihn hier so, daß er in die horizontale Lage a c kommt, welches mit Hülfe einer Setzwaage erkannt wird; zugleich muß a c in die abgesteckte Vertikalebene fallen, welches man durch gehöriges Visiren erlangt, wie oben bemerkt wurde. Damit ist ein Stück der Horizontalweite AD, nehmlich a c = A C gefunden.

Es ist nicht nöthig, und kann auch nicht immer geschehen, daß das zweite Ende des horizontalen Maßstabes genau auf den Punkt a am vertikalen Maßstab falle; geht er über denselben hinaus, etwa bis g, so nimmt man vom ersten gehörig eingetheilten Stab bloß die Länge c a für die gemessene Weite. Hierauf wird der vertikale Stab von A nach c versetzt, und der horizontale in die Lage d e nach gleichen Bedingungen, wie vorher, so nehmlich, daß d e horizontal in der Vertikalebene, d senkrecht über c auf dem Boden liegt u. s. w., so ist d e = C E. Eben so erhält man f B = E D. Auf diese Weise kann die Messung weiter bergan, und erforderlichen Falles auch bergabwärts bis zum Endpunkt der abgesteckten Vertikalebene fortgesetzt werden. Die Summe der einzelnen gemessenen Horizontalabstände ist der ganzen gesuchten Horizontalweite gleich, z. B. a c + d e + f B = A D. Je vorsichtiger und genauer man bei dieser Arbeit vorgehet, ein desto zuverläßigeres Resultat erlangt man. Welche Fehler hier begangen werden können, und sorgfältig zu vermeiden sind, bedarf keiner besondern Erwähnung. Auf jeden Fall hat eine gute Messung dieser Art mehr Schwierigkeit, als eine solche auf ebenem Boden; indessen kommt jene auch weit seltener vor, wenigstens nicht so leicht zum Behuf trigonometrischer Standlinien. Wichtiger wird sie zum Profiliren der Berge. Wofern man beim Aufwärtsmessen richtig verfahren, und zugleich an den Vertikalstäben die einzelnen Höhen A a,

cd u. s. w. bestimmt hat, so erlangt man mit mehr oder weniger Gewißheit nebenbei auch die Höhe des Berges, z. B. $BD = aA + cd + ef$, nehmlich die vertikale Erhöhung des Ortes B über den Horizont von A.

Bisweilen verlangt man auch den Abstand zweier Punkte auf unebenem Boden in gerader Linie. Eine solche Bestimmung läßt sich unmittelbar aus der erwähnten Messung ableiten; es ist z. B. in Fig. 53. die directe Weite $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$. Wenn das aufsteigende Terrain nicht gar zu ungleich (uneben) ist, so kann man die Länge der Hypothenuse AB dem Weg von A bis B gleich setzen. Die Höhe BD erfährt man indessen sichrer durch ein eigentliches Nivellement; auch trigonometrische Rechnung verschafft sie um so annähernder, als AD und der Erhöhungs- (Böschungs-) Winkel BAD gemessen werden.

In solchen Fällen, wo der Boden nur um einen kleinen Neigungswinkel steigt oder fällt, z. B. wenn die Erhöhung auf 100 Fuß etwa bloß 2 Fuß beträgt, kann die Messung eines Horizontalabstandes mit der Kette oder noch gewisser mit Maßstäben und Dreifüßen (Schemeln) verrichtet werden, wie auf ebenem Boden.

Jede Messung mit Maßstäben muß, wenn der Zweck der Arbeit eine große Genauigkeit erheischt, rückwärts wiederholt, und aus beiden Resultaten, wofern sie nur wenig differiren, die arithmetische Mittelzahl genommen werden.

§. 92.

Flüchtige Distanzenmessung durch weniger zuverläßige Mittel.

Es kommen Fälle in der niedern Landmessung vor, wo man sich mit einer flüchtigen ungefähren Be-

ſtimmung von Diſtanzen begnügen muß, und nach Erforderniß der Umſtände auch begnügen kann.

Das natürlichſte, bequemſte, auch zugleich ziemlich ſchnelle Mittel hierzu bietet das gleichförmige Abſchreiten von einem Grenzpunkt einer Weite bis zum andern dar; die Meſſung durch Schritte wird bei flüchtigen Detailaufnahmen, beſonders militäriſchen, viel gebraucht und zwar mit hinreichender Befriedigung der vorgeſetzten Abſichten.

Ich kann aus eigener Erfahrung verſichern, daß man es durch einige Uebung in der Schrittmeſſung der Weiten bis zu einem höhern Grad der Genauigkeit zu bringen vermag, als man dem Anſchein nach glauben ſollte.

So wenig ich auch ſonſt den unvollkommenen ſchnellen Aufnahmen, die der Geographie keinen weſentlichen Dienſt leiſten, das Wort reden mag, ſo muß ich doch die Schritte, ein Surrogat der Kette und Maßſtäbe, als brauchbar für beſchränktere Fälle des ökonomiſchen und militäriſchen Aufnehmens anerkennen.

Die Länge eines Mannsſchrittes kann kein genau beſtimmtes Maß ſeyn; insgemein ſetzt man ihn 2 Rheinl. Dec. Fuß gleich, bisweilen verſteht man darunter auch $2\frac{1}{2}$ Duodec. Fuß. Bei einer Weitenbeſtimmung nach Schritten kommt es bloß auf eine vorhergegangene genaue Ausmittelung derſelben in einem bekannten Fußmaß an, ſo wie auch auf Gleichförmigkeit im Abſchreiten des Individuums, welches die Meſſung verrichtet. Man findet verſuchsweiſe die Länge ſeines Schrittes dadurch, daß man auf ebenem Terrain zuerſt eine beträchtliche Länge, etwa 100 bis 200 Schritte, in gerader Linie abſchreitet, und dieſe Diſtanz ſodann mit der Meßkette oder mit Maßſtäben nachmißt. Man darf es aber bei einem Verſuch nicht bewenden laſſen, ſondern muß denſelben mehrere Mahle wiederholen, und

ch hierbei zugleich an eine gewisse Gleichförmigkeit im ortgehen, ohne unnatürliche Anstrengung, zu gewöhen suchen. Auf solchem Wege kann es der ökonomihe und militärische Aufnehmer gar bald zu einer groen Fertigkeit bringen. Ist ihm einmahl das Verhältiß seiner Schritte zu einem bekannten Fußmaß annäernd bekannt, und zwar lieber in großen als in kleien Zahlen, so kann er ferner selbst beträchtliche Enternungen von 2000 — 3000 Fuß durch Abschreiten ind Reduction der Zahl seiner Schritte in Fuß- oder Ruthen-Maß nach der Regel de Tri bis auf ziemlich geringe Fehler finden. Mir selbst ist es gelungen, auf ebenem Boden eine Weite von 500 Dec. oder Kettenfußen bis auf 1 oder $1\frac{1}{2}$ F. annähernd durch Schritte zu messen; ich glaube, daß es andere eben so weit oder noch weiter in dieser mechanischen Fertigkeit bringen können.

Ungleichförmiger und fehlerhafter wird das Abschreiten auf unebenem, bergauf oder bergab steigendem Terrain. — Die Schrittzähler in Form einer Taschenuhr scheinen mir unbequem zum practischen Gebrauch, auch ganz entbehrlich für den, welcher aufmerksam zu zählen versteht, und während des Abschreitens nicht andern Gedanken nachhängt. Es befördert die Sicherheit, wenn eine Weite von einer Person zweimahl, oder von zwei Personen zugleich mit Schritten gemessen, und aus beiden Angaben das arithmetische Mittel genommen wird; auch controllirt man damit die Richtigkeit des Nachzählens.

Ein anderes Mittel, in gewissen Fällen eine Entfernung ungefähr oder annähernd zu schätzen, bietet die Geschwindigkeit dar, mit welcher sich ein starker Schall in der Atmosphäre von einem Ort zu einem andern fortpflanzt, wobei der Erfahrung gemäß angenommen wird, daß die Schnelligkeit des Lichtes

unendlich groß sey, und daß folglich auf der Erde eine Lichterscheinung auch auf große viele Meilen weite Entfernungen hin in demselben Moment gesehen werde, wo sie entstehe. Um die Schnelligkeit des durch die Luft sich fortpflanzenden Schalles zu messen, ist eine mit momentaner Lichterscheinung verbundene Feuererplosion, und zugleich eine sehr genaue anderweitige Distanzen- und Zeitmessung nöthig. Am besten eignet sich hierzu das Losbrennen eines großen Feuergewehrs, Kanone; man sieht den Pulver-Blitz, besonders zur Nachtzeit, sehr weit hin im Augenblick der Entstehung, den Schall hingegen, welchen die Explosion hervorbringt, hört man um so später, je weiter man vom Ort derselben entfernt ist; eine bekannte Thatsache. Will man nun die Geschwindigkeit des Schalls bestimmen, so muß man die Entfernung und die Zeit, in welcher er sie durchläuft, ungemein genau messen können, und zwar muß man sehr große Standlinien nehmen, damit ein Irrthum auch von $\frac{1}{2}$ Sekunde Zeit, der selbst bei der aufmerksamsten Beobachtung so leicht vorfallen kann, keinen bedeutenden Irrthum hervorbringe in dem, was man zu wissen verlangt. Sowohl eine richtige Distanzenmessung, entweder directe oder durch trigonometrische Operationen, als auch eine ganz genaue Zeitmessung auf Sekunden und Theile einer Sekunde vermittelst einfacher Sekundenpendel oder Sekunden- und Tertien-Uhren bleibt immer mit Schwierigkeiten verbunden und kleinen leicht möglichen Fehlern ausgesetzt; daher zum Theil die verschiedenen Resultate und Angaben über die Schallgeschwindigkeit von verschiedenen Beobachtern. Es trägt auch die veränderliche Beschaffenheit der Atmosphäre zu jenen Abweichungen etwas bei. Diese Ungewißheit bewog die Pariser Akademie der Wissenschaften im J. 1738 neue Versuche der Art auf eine Distanz von 14636 Tois., zwischen

Montmartre und Monthlery anzustellen. Man fand die Schallgeschwindigkeit gleichförmig, auf 1 Sek. Zeit berechnet, = 173 Toiſ. = 1038 Par. F. Die Beobachter, Caſſini, Maraldi und la Caille bemerkten außerdem, daß der Schall auf die größten Entfernungen hin bloß geſchwächt wurde, aber immer gleiche Wege, in gleichen Zeiten zurücklegte, daß ſeine Schnelligkeit bei heiterm und trübem regnichtem Wetter keinen Unterſchied zeige, daß aber die Kraft und Richtung des Windes dieſelbe etwas verändern könne. Wenn der Wind ſenkrecht gegen die Direction des ſich geradlinigt fortpflanzenden Schalles blies, ſo blieb die Schallgeſchwindigkeit wie bei ruhiger Luft; fiel dagegen die Richtung des Windes mit derjenigen des Schalles zuſammen, ſo mußte die Geſchwindigkeit des erſtern zu der des letztern addirt werden, im Fall beide nach einer Seite, z. B. von Oſt nach Weſten, gingen, im entgegengeſetzten Fall aber mußte die erſtere von der letztern ſubtrahirt werden. Uebrigens änderte die Stärke des Schalles nichts in der Geſchwindigkeit deſſelben. Es iſt wahrſcheinlich, aber durch Experimente nicht bis zur Evidenz entſchieden, daß die Stärke des Schalles im umgekehrten Verhältniß mit den Quadraten der Entfernungen abnimmt. Daß Verſuche und Beobachtungen über die Schallgeſchwindigkeit mit großer Sorgfalt angeſtellt werden müſſen, folgt aus der Natur der Sache. Die Pariſer Akademiker machten ihre Verſuche zweimahl in d. J. 1738 und 1739, einmahl mit einer genau gemeſſenen Diſtanz von 14636 Toiſen, das zweitemahl mit einer noch größern von 22572 Toiſen. Man hatte an beiden Grenzpunkten dieſer Diſtanzen, ſo wie auch an einigen Zwiſchenörtern Kanonen aufgeſtellt, deren Blitz und Donner des Nachts überall ſehr deutlich wahrgenommen wurde. An allen Stationen beobachteten geſchickte Geometer, mit richtigen überein-

ſtimmenden Pendeluhren ausgerüſtet, den Zeitraum, welcher vom Moment des Abfeuerns bis zu dem Moment dauerte, in welchem man den Schall (Donner) zu hören anfing. Jeder Verſuch wurde immer mehrere Mahle wiederholt, und aus vielen Reſultaten das arithmetiſche Mittel genommen, wie es bei ſolchen Wahrſcheinlichkeitsrechnungen überall durchaus nothwendig iſt. Daß das Licht bei ſeinem Fortgang ſelbſt auf meilenweite terreſtriſche Entfernungen nicht den kleinſten bemerkbaren Zeittheil einer Sekunde brauche, wurde auch hier beobachtet. Bei der erſten Reihe der Beobachtungen ergab ſich die Geſchwindigkeit des durch die atmoſphäriſche Luft ſich fortpflanzenden Schalles ungefähr = 1039 Par. F. für 1 Sekunde Zeit, bei der zweiten Reihe aber ungefähr 1042 F. für 1 Sekunde.

Späterhin ſind zur Aufklärung dieſes beſonders in phyſikaliſcher Hinſicht merkwürdigen Gegenſtandes die Beobachtungen von andern Mathematikern mehrere Mahle wiederholt worden. Mayer und Käſtner in Göttingen fanden die Schallgeſchwindigkeit für 1 Sek. Zeit = 1036 bis 1038 Par. F. — Benzenberg fand ſie bei einer Reihe deshalb unternommener Verſuche = 1028 Par. F., nach gehöriger Reduction der Lufttemperatur auf 0° Reaum.; bei einer Reihe anderer Beobachtungen für denſelben Grad der Temperatur und mit Hülfe derſelben vorher beſtimmten Standlinie = 1027, 1 Par. F. Er bemerkte zugleich, daß die Verſchiedenheit der Temperatur einen bedeutenden Einfluß auf die Schallgeſchwindigkeit habe. Die Luft war bei einer Reihe von Verſuchen um 21° wärmer, als bei einer andern, und der Schall pflanzte ſich um 48 F. in 1 Sek. ſchneller fort.

Auch Bianconi's Verſuche in Italien, im J. 1740, zeigten, daß ſich der Schall im Sommer ſchneller fortpflanze, als im Winter. Der Knall von 4 ab-

gefeuerten Kanonen durchlief den Weg von 30 italienischen Meilen das eine Mahl bei 18° Reaum. in 76 Sekunden, zu deren Abzählung ein Pendel diente, das zweite Mahl bei 1° unter 0° (Eispunkt) in 78 bis 79 Sekunden.

Man hat auch vermittelst der Theorie und des darauf sich stützenden Kalkuls die Geschwindigkeit des Schalles zu bestimmen versucht; allein die Theorie gab immer eine kleinere Größe, als die wirkliche Beobachtung. Nach Newton's Theorie z. B. sollte diese Geschwindigkeit = 861 F. in 1 Sek. seyn, statt 1030 bis 1040 F. nach der Erfahrung. Um diesen auffallenden Unterschied zu erklären, hat sich der Forschungsgeist der neuern Zeit in mancherlei subtilen Hypothesen versucht. Die verschiedenen Erklärungen (Hypothesen) von Newton, la Grange, Euler und Laplace hier ausführlich darzustellen, erlaubt der Zweck dieser Schrift nicht. Nach Laplace, erleidet die atmosphärische Luft durch den Schall (Schallwellen) geringe Zusammendrückungen und Ausdehnungen; damit hängen Veränderungen in der Temperatur und Elasticität (Expansivkraft) der Luft, also eine schnellere Fortpflanzung des Schalles zusammen, als wenn die Temperatur gleichförmig verbliebe.

Das hier Gesagte wird für unsern Zweck, wie ich glaube, hinreichen; was noch mehr darüber bemerkt werden könnte, gehört mehr in die Physik als in die Geodäsie. Ueberhaupt werden die Weitenmessungen durch den Schall wohl äußerst selten und nur in gewissen Fällen vorgenommen, wo keine große Genauigkeit erforderlich und eine andere zuverlässigere Messung eben nicht anwendbar ist. Eine solche ungefähre Schatzung von Entfernungen kann z. B. auf dem Meere, oder wenn man sich vor einer belagerten Festung befindet oder die Entfernung eines Gewitters verlangt, ihren

Nutzen haben. Aber keinem vernünftigen Geometer wird es je einfallen, auf solchem Wege Distanzen, an deren richtiger Bestimmung viel liegt, z. B. Grundlinien, messen zu wollen. Diese Methode hat zweierlei gegen sich: erstlich giebt sie zu wenig Annäherung an die Wahrheit, zweitens sind die Mittel der Ausführung umständlich und mancherlei Fehlern ausgesetzt, besonders die Zeitmessung durch Sekunden- oder gar Tertien-Uhren. Wie schwer hält es, das Moment einer entstehenden Licht- und Schallerscheinung in Theilen einer Sekunde genau zu bemerken? Wer andrer Meinung über diese Sache ist, dem will ich nichts entgegensetzen, glaube aber nach meinen Erfahrungen hierüber, daß die Weitenmessung durch den Schall nur eine ungefähre und weniger zuverläßig sey, als andere Methoden zu dieser Absicht. Für die Schnelligkeit des Schalles kann man die Mittelzahl zwischen 1030 und 1040 Par. F. bei wirklichen Messungen der Art annehmen; zur Ausführung gehören mehrere Personen mit scharfen Sinnen, ein gutes Fernrohr und wenigstens eine vollkommen richtig zeigende Sekunden- oder Tertienuhr.

Von der Schätzung der Weiten durch ein geübtes Augenmaß, welches bei flüchtigen, insbesondere militärischen, Aufnahmen großen Werth hat, soll in der 5ten Abtheilung gesprochen werden.

§. 93.

Messung krummer Linien auf dem Felde und verjüngte Darstellung derselben auf einem Grundrisse. (Fig. 54.)

Bisher ist bloß von der Absteckung und Messung geradlinigter Distanzen die Rede gewesen. Es kommt

aber, besonders in der niedern Landmessung, häufig der Fall vor, wo auch krummlinigte Begrenzungen von Flüssen, Wäldern, Feldern, Wegen ꝛc. durch eine directe Messung mit der Kette und mit Maßstäben ihrer Länge und Lage nach bestimmt, und demgemäß auf einen Grundriß (Situationsplan) nach irgend einem verjüngten Maßstab dargestellt werden sollen. Da man an krumme Linien geradlinigte Maße nicht anlegen kann, so ist auch keine genaue Ausmessung jener durch diese möglich. Es giebt jedoch zur directen Messung einer Länge keine andern Werkzeuge als geradlinigte, und diese müssen also ebenfalls für krumme Linien angewendet werden. Man begreift, daß jede directe Messung der Art, sie geschehe mit Maßstäben oder mit der Kette, deren Glieder ebenfalls aus geradlinigten Maßstäben bestehen, immer unvollkommen bleiben muß, um so unvollkommener, je stärker und unregelmäßiger die auszumessende Linie sich krümmt. Man betrachtet nehmlich die krumme Linie als aus kleinen geradlinigten Theilen zusammengesetzt; dies ist nach der Theorie durchaus falsch, für die Praxis aber der Wahrheit um so näher, je kleiner bei starker Krümmung der gebogenen Linie die Theile derselben genommen werden. Nach dieser Erhaustionsmethode, welche man bekanntlich auf den Kreis und andere Curven anwendet, wird die krumme Linie gleichsam in eine gerade verwandelt und als solche gemessen, rectificirt.

Soll eine krumme Linie auf dem Felde, wovon AB (Fig. 54.) ein größeres Stück oder auch die ganze Länge vorstellen mag, in geradlinigtem Maß bestimmt, rectificirt, werden, so muß man sie nach vorhergegangener aufmerksamer Besichtigung in kleinere Stücke Am, mn, nr u. s. w. abtheilen, welche jedes für sich als gerade Linien ohne merklichen Fehler betrachtet werden dürfen, so nehmlich daß die kleinen Bogen (Krüm-

mungen) Am, mn sehr nahe mit ihren Sehnen zusammenfallen. Man erlangt dies um so genauer, je kleiner man die Abschnitte Am, mn ꝛc. annimmt, welches an stark gekrümmten Linien durchaus nothwendig wird. An solchen Stellen, wo die Krümmung unmerklicher ist, kann man die Abschnitte, z. B. r s, größer setzen u. s. w. Man bezeichnet zuerst an solchen Stellen, wo die Linie sich am stärksten krümmt, die Grenzpunkte der Abschnitte, m, n ꝛc. durch eingesetzte Signalstangen (Meßfahnen), steckt zwischen je zwei Grenzpunkten, wenn ihre Entfernung beträchtlich ist, eine Vertikalebene ab, und mißt zugleich die Horizontaldistanz derselben, wie vorher gelehrt worden. So kann man progressive die Stücke Am, mn ꝛc. nach einander in geraden Linien abstecken und messen. Die Theorie dieser Operation ist ganz elementarisch, allein die Praxis kann oft mit vieler Mühe und Schwierigkeit verbunden seyn, wenn A B sehr lang ist, und viele starke Beugungen macht. Wird keine große Genauigkeit verlangt, so findet man die gesuchten Abstände auch durch bloßes Abschreiten.

Wenn außer der Länge (Rectifikation) einer krummen Linie im Felde zugleich ihre Gestalt und Lage gefunden und auf einem Plan im verjüngten Maße vorgestellt werden soll, so befolgt man mit Zuziehung der Kette und Stäbe insgemein dieses Verfahren:

Man wählt eine unbestimmt lange Standlinie D B in einer schicklichen Lage gegen die krumme Linie A B, so nämlich, daß die senkrechten Abstände der verschiedenen Punkte der A B von B D möglichst klein finde. Die gerade D B kann auch die krumme A B in einem oder mehreren Punkten durchschneiden. In der geraden D B, welche durch einige deutliche Signale bezeichnet wird, kann man nun von D gegen B hin beliebige Abschnitte (Abscissen) D M, M N ꝛc. mit der Kette oder auf andre Weise ausmessen. Ferner kann man die auf

DB in D, M, N ꝛc. senkrechten Linien (Weiten), welche die krumme Linie in A, m, n ꝛc. treffen, abstecken und messen. Heißt DB nach dem allgemein eingeführten geometrischen Kunstausdruck die Abscissenlinie, so heißen dagegen die senkrechten Seitenabstände DA, Mm, Nn ꝛc. die senkrechten Ordinaten, beides in Beziehung auf die krumme Linie AB. Es leuchtet ohne weitere Erklärung ein, daß die Gestalt und Dimension jeder krummen Linie durch eine willkührliche Abscissenlinie und eine hinlängliche Anzahl senkrechter paralleler Ordinaten so annähernd, als man will, bestimmt wird. Man könnte auch die parallelen Ordinaten unter einem schiefen Winkel auf die Abscissenlinie fallen lassen; allein die senkrechten Ordinaten sind in der Praxis leichter zu erlangen, und verdienen deshalb den Vorzug; auch zur Bestimmung der Lage, zur Rectification und Quadratur der regulären Curven höherer Ordnung, z. B. der Kegelschnittslinien, wendet die Geometrie gewöhnlich nur die senkrechten Ordinaten an.

Die Punkte D, M, N ꝛc. der Abscissen werden bei dieser Operation, welche eine Perpendikulär- oder Seiten-Messung heißen mag, durch die Senkrechten bestimmt, welche von den Punkten A, m, n ꝛc. durch eine vorgängige Besichtigung und kluge Auswahl in der krummen Linie AB markirt, auf die Abscissenlinie DB fallen. Als Signal kann bei geringen Abständen auch ein Gehülfe dienen, der sich im Verlauf der Messung nach und nach in A, m, n ꝛc. aufstellt. Der Mechanismus aber, wodurch die wahre Direction der Senkrechten AD, mM ꝛc. erhalten, und somit die Messung der Abscissen- und Ordinaten-Abstände möglich gemacht wird, soll im folgenden § gewiesen werden. Es fällt in die Augen, wovon die Richtigkeit einer solchen Arbeit abhänge; zu den leichtesten gehört sie gewiß

nicht. Nachdem die Abscissen DM, DN ꝛc. oder DM, MN ꝛc, so wie die zugehörigen Ordinaten gut bestimmt und gemessen worden, ist auch die Lage und Größe der krummen Linie AB mehr oder weniger annähernd gefunden, und kann sodann, dem Vermessungsregister zufolge, nach irgend einem verjüngten Maßstab auf Papier ein der krummen Linie AB ähnliches kleines Bild leicht entworfen werden. Die Fig. 54. möge hier diesen Entwurf auf Papier vorstellen. Man ziehet eine unbestimmt lange gerade Linie DB, macht die Abscissen DM, DN ꝛc. so wie die entsprechenden Ordinaten DA, Mm ꝛc. den gemessenen gleichnamigen Abständen nach dem verjüngten Maßstabe gleich oder vielmehr homogen; die so erhaltenen Punkte A, m, n ꝛc. verbindet man durch gerade Linien, oder wenn es die Natur der Sache vorschreibt, durch schwach gekrümmte Bogen, nach einem geübten Augenmaß den Bogen der Linie im Felde ähnlich gezeichnet u. s. w. Bei diesem Entwurf ist es immer vortheilhafter, die Abscissen vom Anfangspunkte D an, nehmlich DM, DN, DR ꝛc. aufzutragen, als die partiellen Stücke DM, MN ꝛc., da sich im letztern Falle die Fehler im Abstecken auf dem Papier fortpflanzen, leichter anhäufen, und also ein unrichtiges Bild von der krummen Linie im Felde erzeugen.

Aus gleichem Grunde muß man in der krummen Linie nicht zu viel Stationen oder Richtpunkte annehmen, weil dadurch nicht allein die Absteckung der Senkrechten, so wie die Messung der Abscissen und Ordinaten außerordentlich erschwert wird, sondern auch die Fehler abgerechnet, die bei dieser Messung vorfallen können, das Auftragen der vielen Linien und Senkrechten durch Maßstab und Zirkel zu mehreren Irrthümern Veranlassung giebt. Man wählt daher nur die Punkte der krummen Linie, wo sie die stärksten Umbeugungen

acht, und welche ihre Lage am auffallendsten bezeich-
:n, zu Richtpunkten.

Wenn die Abscissenlinie D B die krumme Linie A B
i einem oder in mehreren Punkten schneidet, so fallen
e Ordinaten zum Theil auf die eine Seite (rechts),
im Theil auf die andere Seite (links) derselben. Diese
ıge muß im Vermessungsregister (Feldbuch) gehörig
otirt werden, um Fehlern in der Zeichnung vorzubeu-
:n. Man kann die rechts liegenden Ordinaten mit dem
eichen + (positiv), die links liegenden mit dem Zei-
ıen — (negativ) notiren, u. s. w.

Macht die zu vermessende krumme Linie, z. B. die
Begrenzung eines See's oder desgl., mehrere starke Um-
eugungen, so können statt einer Abscissenlinie auch
ohl zwei oder mehrere nöthig werden, z. B. in Fig. 54.
ie beiden Abscissen D B und B E. Für jede dieser Stand-
inien finden dann besondere Seitenmessungen Statt.
Die Neigung dieser Abscissenlinien, welche man immer
von einer Hauptkrümmung zur andern fortgehen läßt,
muß durch eine Winkelmessung oder mit Beihülfe des
Meßtisches durch eine geometrische Construction bewerk-
stelligt werden. Ueberhaupt werden Aufnahmen von die-
ser Gattung durch den Gebrauch des Meßtisches ungemein
gefördert und erleichtert, wie wir weiterhin sehen werden.

Wollte man das verjüngte Bild der krummen
Linie A B ohne Anwendung einer Abscissenlinie und
senkrechter Ordinaten (Seitenmessung durch Perpendiku-
laren) in eine Situationszeichnung bringen, so müßte
man die einzelnen Stücke A m, m n u. s. w., als gerade
Linien betrachtet, messen, und zugleich die Winkel, unter
welchen diese Linien zusammenhängen; dem zu Folge
dann mit Transporteure und verjüngtem Maßstab die
Zeichnung entwerfen. Mehr Sicherheit gewährt auch
hier der Meßtisch, welchen man in den Richtpunkten
A, m, n ꝛc. gehörig einrichtet u. s. w.

§. 94.

Absteckung rechter Winkel oder Perpendikularen im Felde. (Fig. 55.)

Diese Operation kommt besonders in der niedern Landmessung oft vor, und wird nach Verschiedenheit der angewendeten Methoden mehr oder weniger genau ausgeführt. Die Methoden selbst sind, theoretisch betrachtet, so einfach, daß sie jeder Anfänger selbst erfinden kann; daher solche hier nur mit wenig Worten angedeutet werden. Die Praxis kann bisweilen mit Schwierigkeiten verbunden seyn; Uebung thut auch hier das Beste.

Es finden zwei Fälle dieser Aufgabe Statt:

1) Auf eine gerade, durch Signale bezeichnete, Linie A B im Felde soll von einem Punkt M in derselben eine Senkrechte (Perpendikulare) errichtet (abgesteckt) werden.
2) Auf die gerade A B soll von einem Punkte (Ort) S außerhalb derselben eine Senkrechte (Perpendikulare) abgesteckt werden.

Für den leichtern Fall 1) giebt es folgende Verfahrungsarten:

a) Man stelle einen Meßtisch horizontal über dem Punkt M im Felde auf, ziehe mit Hülfe des Diopterlineals auf dem Plan des Meßtisches die Visirlinie a b, welche in die Vertikalebene von A B fällt; auf a b errichte man in M, welcher Punkt senkrecht über dem gleichnamigen auf dem Felde genommen wird, nach den bekannten Constructionen der Elementargeometrie oder auch mit Zuziehung eines Transporteurs oder desgl., eine Senkrechte M s; lege hierauf an M s die Alhidadenlinie des Diopterlineals,

visire durch die Dioptern gegen S oder R, und lasse in dieser Diopternebene durch einen Gehülfen eine oder mehrere Signalstangen ausstecken, so ist das Verlangte geschehen. Diese Methode ist eine der zuverläßigsten und brauchbarsten. Ziemlich gleiche Genauigkeit mit mehr Bequemlichkeit gewährt das im §. 59. beschriebene, wohl berichtigte.

b) Diopterkreuz (Equerre d'Arpenteurs). Man stelle dasselbe horizontal mit seinem Mittelpunkt senkrecht über dem Punkt M im Felde auf, richte vermittelst Vorwärts- und Rückwärts-Visiren durch zwei gegenüberstehende Dioptern die Ebene derselben in die Vertikalebene von A B ein, und befestige das Werkzeug in dieser Lage. Man visire nun durch die zwei andern gegenüberstehenden Dioptern, und lasse von einem Gehülfen gegen S oder R hin eine oder mehrere Signalstangen ausstecken, so ist der Forderung Genüge geleistet. Mehrere Signale geben die Senkrechte zuverläßiger, als eins.

c) Wofern eine große Genauigkeit der Perpendikularen auf sehr beträchtliche Weiten hin begehrt wird, so muß man hierzu gute Winkelmesser, einfache oder zusammengesetztere, anwenden. Man stelle den Winkelmesser senkrecht über M horizontal auf, richte die Alhidade desselben, nachdem man ihren Inder auf 0^0 des eingetheilten Kreisbogens (Limbus) gestellt, durch die horizontale Bewegung des Kreises in die Vertikalebene von A B ein; man befestige den Kreis, und drehe nun den Inder der Alhidade (mit oder ohne Fernrohr) auf 90^0 des Limbus, visire durch die Dioptern (oder Fern-

rohr), und lasse in dieser Diopternebene, deren Direction in Fig. 55. die Linie M S andeutet, von einem Gehülfen ein oder mehrere Signale ausstecken, so ist der beabsichtigte Zweck um so gewisser erreicht, je richtiger man in der Abmessung des rechten Winkels verfahren. Braucht man ein Astrolabium mit zwei gewöhnlichen Diopterlinealen, so richtet man die Visirebene des einen unbeweglichen in A B ein u. s. w.

Wendet man einen reflectirenden Winkelmesser, z. B. einen Sextanten oder einen reflectirenden Halbkreis (Reflector), hierzu an, so stellt man den Index eines solchen Instruments genau auf 90° des Limbus, bringt im Standpunkt M das Instrument in eine solche horizontale oder nahe horizontale Lage, daß man directe durch das unbelegte Glas des kleinen Spiegels ein in der geraden A B, etwa in A, ausgestecktes Signal erblickt, und läßt nun einen Gehülfen, von A gegen S hin allmählig so weit fortgehen, bis das catoptrische (indirecte) Bild desselben im kleinen Spiegel mit dem dioptrischen (directen) des Signals in A zusammenfällt. Dies kann nur dann geschehen, wenn der Gehülfe sich in der geraden M S befindet, welche senkrecht auf A B steht, z. B. in S, oder in einem andern Punkt von M S und ihrer Verlängerung. Man vergleiche, was im §. 76. 3te Abth. vom Gebrauch des Sextanten zu Winkelmessungen bemerkt worden ist. Diese Methode setzt einige Uebung und vertraute Bekanntschaft mit reflectirenden Winkelmessern voraus.

d) Die beschränkteste und am wenigsten zuverlässige Art, auf eine gerade A B im Felde eine

Senkrechte oder einen rechten Winkel abzustecken, ist die mit dem sogenannten Pythagoräischen (rechtwinklichten) Dreiecke, dessen Seiten nach irgend einem Einheitsmaß rationale ganze Zahlen, nehmlich 3, 4, 5 sind. Der Winkel, welcher der Seite 5 gegenüber liegt, muß, wie die Elementargeometrie lehrt, ein Rechter seyn. Die Seitenzahlen können auch gleich Vielfache (Multipla) von 3, 4, 5 seyn, z. B. 6, 8, 10. Diesem theoretisch richtigen Satze zufolge soll man nun (Fig. 55.) die Längen MN, MS, NS in dem Verhältniß: 3 : 4 : 5 nehmen, und hierdurch den W. SMN = 1 R. oder SM senkrecht auf AB erhalten u. s. w. Wie zu dieser Absicht eine Meßkette oder Meßschnur gebraucht werden müsse, bedarf keiner besondern Erläuterung. In Ermangelung der vorerwähnten besseren Hülfsmittel und zu einer ungefähren handwerksmäßigen Bestimmung mag diese Dreiecksmethode immer einmahl aus der Noth helfen. Um aber dem Leser zu zeigen, wie wenig Genauigkeit sich davon erwarten läßt, wollen wir annehmen, es werde im Ausspannen der Meßkette oder Schnur ein kleiner Fehler begangen, wie so leicht möglich ist. Wir wollen diesen Fehler noch dazu recht gering setzen, und zusehen, welchen Einfluß er auf den rechten Winkel bei M (Fig. 55.) habe. Gesetzt man hätte die Kettenlängen 6, 8, 10 F. (zweifache des Verhältnisses 3 : 4 : 5) für die Abstände MN, MS, SN gewählt, ein Kettenstück z. B. SN aber wäre nicht gehörig ausgespannt worden, so daß SN nicht 10 F. sondern 9, 9 F. = 9 F. 9 Zoll, also um 1 Zoll zu kurz würde, so wäre im Dreieck SMN die Seite SM = 8',

die Seite M N = 6′ und die Seite S N = 9,9′; folglich nach §. 20. 1ste Abth.

$$\text{Sin. } ½ \text{ SMN} = \text{Sin. tot.} \sqrt{\frac{3,95 \cdot 5,95}{8 \cdot 6.}}$$

Durch trigon. logar. Berechnung fände man: den Winkel ½ S M N = 44° 24′ 22″, also W. S M N = 88° 48′ 44″.

Demnach wäre der W. nicht 90°, wie er seyn soll, sondern um mehr als 1 Grad zu klein. Ein solcher Fehler darf aber bei einer genauen Absteckung von Perpendikularen im Felde nicht gestattet werden. Die weitere Betrachtung hierüber bleibe dem Leser überlassen.

Für den schwerern Fall 2) gelten folgende Verfahrungsarten:

α) Mit dem Diopterkreuz; soll auf eine gerade A B im Felde eine Senkrechte S M von einem Punkt (Ort) S außerhalb derselben errichtet (abgesteckt) werden, so erwählt man den gesuchten Punkt M in A B annähernd nach dem Augenmaß, stellt hier das Diopterkreuz, wie vorher bemerkt worden, gehörig auf, visirt nach der auf A B senkrechten Diopternebene, und rückt, wenn der durch ein deutliches Signal bezeichnete Ort S in dieser Ebene nicht gesehen wird, seinen Standort von A gegen B oder umgekehrt so weit fort, bis man in dem richtigen Punkt M steht, in welchem die auf A B senkrechte Diopternebene des Kreuzes genau durch S geht. Mit einem guten Augenmaß und ein wenig Uebung bringt man es in dieser Annäherungsmethode bald zur Fertigkeit.

β) Mit einem Winkelmesser oder dem Meßtisch; hier verfährt man annähernd auf ähnliche Weise,

wie mit dem Diopterkreuz u. s. w. Gebraucht man einen Sextanten, so stellt man dessen Index auf 90° des Limbus, und rückt von A gegen B so weit vor, bis man bei M die beiden Bilder von A und S im halbbelegten Spiegel zur Bedeckung bringt. Kann man, wie in den meisten Fällen möglich, in einem Punkt der geraden AB, z. B. in A, den Winkel SAB messen, oder auf dem Meßtisch construiren; so läßt sich ferner in S an SA der Winkel ASM als das Complement des W. SAM zu 90° vermittelst eines Winkelmessers oder des Meßtisches anlegen, und demgemäß die Perpendikulare SM abstecken.

γ) Ist bereits durch S eine Parallele CD zu AB (Fig. 55.) abgesteckt, — siehe den folg. §. — so kann man ferner nach der vorhergezeigten Weise auf CD in S eine Perpendikulare SM abstecken, welche zugleich auf AB senkrecht steht. Wenn die Bestimmung der Parallele CD als Hauptforderung einer Aufnahme schon vorgängig geschehen, so lassen sich weiterhin aus mehreren Punkten derselben, ohne viel Mühe, mehrere Perpendikularen gegen AB hin abstecken, sowohl durch das Diopterkreuz und den Meßtisch als auch durch einen guten Winkelmesser.

δ) Die schlechteste und beschränkteste Methode ist hier ebenfalls die mit einer Meßkette oder Meßschnur ausgeführte. Man soll nehmlich von S aus, wenn dieser Punkt nicht weit von AB entfernt liegt, eine Schnur oder ein Stück der Meßkette von genügender Länge gegen AB hin ausspannen, so daß der Endpunkt der Schnur einmahl in H, das zweitemahl in N, nehmlich in

die Vertikalebene von A B fällt, wobei das Einrichten durch Visiren von A gegen B oder umgekehrt nöthig wird; hierauf soll man die Distanz H N messen, in M halbiren, und von M nach S hin die Perpendikulare (rechten Winkel) abstecken. Theoretisch ist die Sache richtig, aber in der Praxis sind beträchtliche Fehler kaum zu vermeiden.

§. 95.

Absteckung gerader Linien auf dem Felde unter einem gegebenen Winkel.

(Fig. 56.)

Nicht selten wird verlangt, gerade Linien (eigentlich Vertikalebenen) auf dem Felde unter einem Neigungswinkel zu bezeichnen (abzustecken), welcher entweder in Gradmaß, oder bloß geometrisch auf einem Plan (Papier) construirt, gegeben ist. Besonders wichtig und unentbehrlich wird diese Operation, wenn eine geradlinigte Figur vom Papier nach einem großen Maßstab richtig proportionirt auf das Feld übergetragen oder abgesteckt (mit Grenzsignalen bezeichnet) werden soll.

Wir wollen hier diesen Gegenstand, welchen man gewöhnlich das Abstecken eines Winkels im Felde nennt, bloß in seiner einfachsten Gestalt nach den brauchbarsten Methoden erläutern, weil sich daraus das rechte Verfahren in zusammengesetzteren Fällen ohne Mühe wird ableiten lassen.

Gesetzt, eine gerade Linie (Vertikalebene) B C im Felde (Fig. 56.) wäre durch deutliche Signale gegeben oder in willkührlicher Lage angenommen, es sollte ferner an B C eine andre gerade Linie A C unter einer

ebenen Winkel BCA gesetzt (abgesteckt) werden; so nnten hier zweierlei Bedingungen Statt finden:

Erster Fall. Man soll an BC in einem gegenen Punkt derselben C die gerade CA unter dem gebenen Winkel m ansetzen.

α) Ist der Winkel m ohne Gradmaß bloß geometrisch construirt auf einem Plan (Papier) gegeben, so zeichne man ihn möglichst genau auf einem Meßtisch ab, wenn er sich nicht schon darauf befindet. Hierauf stelle man den Meßtisch über dem gegebenen Standort C auf, und richte ihn, wie weiterhin gelehrt wird, hier gehörig ein, daß der Scheitel C des construirten Winkels senkrecht über dem gleichnamigen Punkt C auf dem Boden stehe, und der Schenkel Cb in die Vertikalebene CB falle. Sodann lege man das Diopterlineal genau an den zweiten Schenkel Ca, und lasse, indem man durch die Dioptern nach der Vertikalebene Ca visirt, einen Gehülfen durch allmähliges Fortschreiten, etwa von B gegen A hin, sich in diese Ebene einrichten, welches geschehen ist, sobald der Geometer beim Visiren den Gehülfen in der Diopternebene Ca, z. B. in A oder G ꝛc. erblickt. Der Gehülfe setzt in A eine Signalstange ein, und corrigirt ihren Stand auf Anleitung und verabredete Zeichen des Geometers in C, so ist der Forderung Genüge geleistet.

β) Wenn der Winkel m in Gradmaß ohne geometrische Construction gegeben worden, so kann man denselben mittelst eines Minutentransporteurs auf den Meßtisch übertragen, und dann weiter verfahren, wie eben gezeigt wurde. Größere Genauigkeit gewährt ein Winkelmesser, welcher zur Absteckung des Winkels m hier eben so gebraucht

wird, wie (§. 94. c.) zur Absteckung rechter Winkel oder Perpendikularen. Vortreffliche Dienste leisten hier nach meiner oft darüber gemachten Erfahrung die Spiegelwerkzeuge, z. B. ein größerer 5 bis 7zölliger Sextant; mit weniger, doch für die gewöhnliche Praxis vollkommen genügender, Schärfe ein kleiner äußerst bequemer Dosensextant oder auch Douglas reflectirender Halbkreis. Man stellt nehmlich den Index eines solchen Spiegelwerkzeuges auf die gegebene Grad- und Minuten-Zahl des Winkels m, visirt im Standort C durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels directe auf das in B aufgestellte Signal, und läßt einen eingeübten Gehülfen allmählig von B gegen A hin so weit vorrücken, bis dessen reflectirtes (indirectes) Bild mit dem directen von B im kleinen Spiegel zusammenfällt, oder daß die Bilder A und B nach dem gewöhnlichen Ausdruck zur Bedeckung kommen. Da in unserm Falle (Fig. 56.) der gesuchte Ort A links von B liegt, so muß bei dieser Observation der Sextant in umgekehrter Lage, nehmlich seine obere Limbusebene nach unten, gegen den Boden hin, gehalten werden. Fiele dagegen A rechter Hand von B, so würde die Sextantenebene aufwärts, wie gewöhnlich, gehalten. (Vergl. §. 76.) Durch diese Methode, mit einem Sextanten oder Reflector im Felde Winkel abzustecken, lassen sich eine Menge der wichtigsten Feldmesseraufgaben mit Leichtigkeit und Bequemlichkeit auflösen. Ich rathe daher jedem Feldmesser, welcher eine vielleicht zu weit getriebene Vorliebe für die ältern schwerfälligern und noch obendrein weniger genauen Winkelmesser: Bousole, Astrolabium — von seinen Vorfahren ererbt hat, wenigstens zu einer nützlichen Beihülfe sich

auch einen kleinen, ziemlich wohlfeilen Dosensextanten anzuschaffen.

Zweiter Fall. Man soll an BC von unbestimmter Länge einen gegebenen Winkel m (Fig. 56.) von einem bestimmten Punkt (Ort) A aus, der außerhalb BC liegt, ansetzen oder abstecken. Da hier vorausgesetzt wird, daß man nicht an BC kommen kann, so muß anderweitig entweder die Senkrechte AN nach §. 94. zuvor bestimmt (abgesteckt) worden seyn, woraus sich sodann die Parallele AM leicht ergiebt, oder aber, man muß durch eine ziemlich weitläufige Aufnahme, trigonometrisch oder geometrisch mit dem Meßtisch, die Direction der Parallele AM finden; siehe den folg. §.

Ist die Perpendikulare AN gegeben, so kann man entweder mit Hülfe des Meßtisches oder eines Winkelmessers, in der Weise des ersten Falles, den Winkel n $= 90^{o} -$ m an AN anlegen, und die gerade AG so abstecken, daß sie gehörig verlängert BC in C unter dem gegebenen Winkel m schneiden muß.

Wenn hingegen die Parallele AM durch Signale gegeben ist, so kann man mit Anwendung des Meßtisches oder eines Winkelmessers an AM in A den Winkel m′ gleich dem gegebenen anlegen, und AG so abstecken, daß sie genugsam verlängert BC in C unter dem Winkel m = m′ (Wechselwinkel) schneidet. —

Man begreift, daß diese Aufgabe in der Praxis ihre Schwierigkeiten haben müße; indessen kommt sie nur äußerst selten vor.

§. 96.

Bezeichnung (Absteckung) von Parallelen im Felde. (Fig. 57, 58, 59.)

Es wird verlangt, zu einer geraden Linie (Vertikalebene) A B im Felde, welche zwei künstliche oder natürliche Signale, z. B. bei M und R, bezeichnen, durch einen Punkt N außerhalb jener eine Parallele ND von beliebiger Länge abzustecken.

Hier können nach Beschaffenheit der Umstände ebenfalls zwei verschiedene Fälle Statt finden:

Erster Fall. Wenn man in die gerade A B kommen kann, so finde man nach §. 95. in ihr den Punkt M der Perpendikulare N M, stelle in M ein Signal auf, stecke hierauf an N M in N einen rechten Winkel M N D ab, so erhält man N D ⫫ A B. In den meisten Fällen der Praxis läßt sich so etwas thun; dann ist diese Verfahrungsweise gewiß die beste und zuverläßigste, desto zuverläßiger, je genauer man die rechten Winkel abzustecken vermag.

Man kann aber auch in der geraden A B einen andern Ort als M, z. B. R, zu dieser Bestimmung gebrauchen. Dann mißt man bei R den Winkel α oder construirt solchen geometrisch auf dem Meßtisch, begiebt sich hierauf nach N, und legt hier an N R mittelst des Meßtisches oder eines Winkelmessers den Winkel R N D $= \angle \alpha$; steckt man in der Richtung des zweiten Schenkels N D zwei oder mehrere Signale aus, so ist der Gang der Parallele bezeichnet, und kann nun die Absteckung derselben durch Signale nach beiden Seiten von N beliebig weit fortgesetzt werden.

Sollte, wie es oft geschieht, die freie Aussicht von N gegen die Vertikalebene A B durch irgend ein Hinderniß, z. B. durch einen dazwischen gelegenen Wald —

verdeckt seyn, so leistet hier die Magnetnadel (Boussole) wesentliche Dienste, und verschafft wenigstens ein annähernd richtiges Resultat, womit man in den allermeisten practischen Fällen vollkommen ausreicht. Man darf nehmlich die Richtung einer gut bearbeiteten empfindlichen Magnetnadel an zwei oder mehreren verschiedenen Oertern auf der Erde, wenn solche nicht allzuweit von einander liegen, z. B. nur 1 Meile, und die Beobachtungen in kurzen Zeiträumen auf einander folgen, ohne beträchtliche Fehler als parallel annehmen, nehmlich (Fig. 57.) N F ∥ R E. Ist nun durch eine vorgängige aufmerksame Beobachtung in R (oder einem andern Ort in der Vertikalebene A B) der Winkel E R B = α bekannt, welchen der magnetische Meridian der Nadel R E mit der Vertikalebene bei R bildet, so läßt sich ferner in einem außerhalb A B liegenden Ort, z. B. in N', der Winkel F N' D = α machen, und weil N' F ∥ R E, somit zugleich N' D ∥ A B abstecken. Eben so, wenn diese Absteckung durch N geschehen sollte. Der Beweis für dieses Verfahren ist elementarisch. In der Ausübung braucht man entweder eine größere Boussole mit feststehenden Dioptern und Stativ, — die Construction ist jetzt jedem Anfänger bekannt — oder einen Meßtisch mit einer kleinen Orientirboussole, in unverrückbarer Lage, auf irgend eine Art verbunden. Wendet man die größere Boussole an, so stellt man sie über R auf, richtet hier die Visirebene durch ihre feststehenden Dioptern in die Vertikalebene A B ein, läßt die Nadel zur Ruhe kommen, und bemerkt die Gradzahl (bei guten Boussolen durch Schätzung bis auf $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{8}^0$ genau), auf welche ihr Nordende bei E zeigt; hierauf begiebt man sich nach dem Ort N, richtet hier durch Centralbewegung die Boussole so, daß ihr Nordende bei F wieder auf denselben Grad des Bogens zeigt (einspielt), wie bei R, visirt durch die Dioptern,

und läßt in dieser Visirebene ein oder mehrere Signale, z. B in D, aufstellen, so ist dadurch die Lage der Vertikalebene bestimmt, welche durch den Ort N' zu der von hier aus unsichtbaren Vertikalebene A B läuft u. s. w.

Da man auch unter den günstigsten Umständen die Winkel durch eine Boussole höchstens nur bis auf $\frac{1}{8}^{0} =$ 7 bis 8 Min. genau erlangt, so läßt sich beurtheilen, wie annähernd man dadurch den Parallelismus zweier Vertikalebenen auf der Erde erlangen könne, und auf welche Fälle der Feldmeßkunst sich ein solches Verfahren beschränken müße. Auf ähnliche Weise wird der Meßtisch in Verbindung mit einer kleinen Orientirboussole gebraucht. Man stellt sich nehmlich damit über R auf, zieht auf dem Tischblatt die Visirlinie R B, und bemerkt den Stand der Nadel, — fehlt die Gradeintheilung, so stellt man durch schickliche Drehung des Tisches die Pole der Nadel in die Richtung einer der 2 oder 4 am Boden des Gefäßes ausgezogenen Durchmesser, — dann begiebt man sich nach N', drehet den Tisch in eine solche Lage, daß die Magnetnadel wieder denselben Stand erhält als in R; so wird auch die auf dem Meßtisch gezogene Linie, welche wir a b nennen wollen, annähernd parallel zu A B. Man legt nun das Diopterlineal an a b, visirt durch die Dioptern nach dieser Direction, und läßt in solcher ein oder mehrere Signale ausstekken u. s. w.

Zweiter Fall. Man kann in die gerade A B nicht kommen, auch kennt man die Richtung der Magnetnadel (des magnetischen Meridians) gegen diese Vertikalebene nicht; dennoch soll durch einen bestimmten oder willkührlich angenommenen Punkt (Ort) N eine Parallele zu A B abgesteckt werden. Hier bedarf es vorläufig einer etwas mühsamen trigonometrischen oder geometrischen Aufnahme durch eine Standlinie außer A B, um das Dreieck N A R und hiermit den Winkel

A R N = α zu erhalten. A, R müssen zwei von N aus sichtbare Merkmahle in der Vertikalebene A B seyn; geschieht die Aufnahme geometrisch mit dem Meßtisch, so braucht die Standlinie nicht gemessen zu werden. Hat man durch eine solche Aufnahme, welche weiterhin beschrieben werden soll, den Winkel α bei R oder den Winkel β bei A bestimmt, so legt man α an R N bei N, oder β an A N bei N. Dies Anlegen der Winkel und Abstecken der geraden N D oder N G geschieht, wie im §. 95 gelehrt worden.

Eine artige neue Auflösung dieser Aufgabe, welche meines Wissens keine der bis jetzt erschienenen geometrischen Schriften enthält, würde folgende seyn:

Es sey (Fig. 58.) zu einer geraden Linie, welche durch zwei Signale in A und B bestimmt wird, durch einen nicht sehr weit davon gelegenen Punkt S eine Parallele abzustecken. Man lege an die Visirlinie S A die Linie S C unter einem Winkel von 45°, gehe in der Richtung S C so weit vor, bis in C die gerade A C senkrecht auf S C oder Winkel A C S = 90°, folglich auch C A = C S wird. Ferner lege man an die Visirlinie C B die Senkrechte C E, und gehe in dieser Richtung so weit vor, bis in E der Winkel C E B = 45°, also auch C E = C B wird. Durch die so fixirten Punkte E und S stecke man eine gerade Linie (Vertikalebene) ab, so wird diese gehörig verlängert, welches aber in der Ausübung nicht Noth thut, die gerade A B in D unter einem rechten Winkel schneiden, oder S D ist eine Perpendikulare auf A B. Setzt man nun weiter an S D oder E S die Perpendikulare S R, so läuft diese parallel zu A B.

Beweis: C A = C S, C B = C E, ∠ A C B = ∠ S C E,
folglich △ A B C = △ S C E, daher ∠ m = ∠ n.
Nun ist ∠ r = ∠ m + ∠ h + k = ∠ h + ∠ k + ∠ n;

Mithin $\angle r = \angle CBE + \angle CEB = 90^0$;
Also steht ED oder SD senkrecht auf AB u. s. w.

Ueber das Anlegen (Abstecken) der rechten und halbrechten Winkel vergl. §. 95.

Wollte man hier einen Sextanten oder reflectirenden Halbkreis brauchen, um den rechten Winkel bei C, nehmlich den Punkt C in der Direction SC für die Perpendikulare AC zu erlangen, so müßte man den Inder des Instruments auf 0^0 des Limbus stellen, und nun so weit von S gegen C hin vorrücken, bis im kleinen Spiegel das directe Bild von A und das indirecte (reflectirte) von S zusammenfallen.

Wie man zum Abstecken rechter und halbrechter Winkel auch ein Diopterkreuz mit 4 senkrecht aufgestellten Visirstiften, oder auf andere Art eingerichtet, anwenden könne, wo es keine große Genauigkeit gilt, bedarf für denkende Leser wohl keiner besondern Erörterung.

Die angezeigte geometrische Construction durch Winkelabsteckung giebt eine Art von geometrischem Ort für alle rechtwinklichten gleichschenklichten Dreiecke, wenn die gerade AG und die gemeinschaftliche Spitze der rechten Winkel bei C gegeben ist; der geometrische Ort der Dreiecke ist hier eine gerade ED auf AG in D senkrechte Linie u. s. w.

In manchen Fällen, besonders wenn S nahe bei AB, und A, B nicht weit von einander liegen, kann die angeführte Methode mit Nutzen angewendet werden. Bequemer uud leichter bleibt jedoch immer der Gebrauch des Meßtisches zu diesem Behuf, weil man hier nur zwei Standpunkte nöthig hat, und nicht so beträchtlichen Fehlern in der Construction der Winkel ausgesetzt ist.

Bloß historisch werde noch erwähnt, daß zum Ab-

ecken von Parallelen auch das Visiren nach sehr ent-
rhten Richtpunkten in Vorschlag gebracht worden ist.
)avon handelt Lambert in seinen Beiträgen
ur Mathematik, 1r Th. — und nach ihm Mayer
i seiner pract. Geom. nach seiner Art etwas weit-
ufig und umständlicher, als es der Gegenstand ver-
ent. Die Sache verhält sich kürzlich also:

Wenn A B (Fig. 59.) eine gerade Linie (Vertikal-
ene) auf der Erde, R ein sichtbarer Richtpunkt, z. B.
ne Thurmspitze, im Alignement (Verlängerung) von
B in weiter Entfernung, N ein seitwärts von A B
icht weit liegender Ort ist, so werden A R, N R un-
r einem sehr kleinen Winkel zusammenlaufen, und
an kann kleine Stücke dieser Linien als annähernd
arallel ansehen, um so annähernder, je weiter R von
und N und je näher zugleich N dem Ort A liegt.
)ie weitere Erklärung davon beruht auf einfachen Sä-
en der Elementargeometrie. Für bestimmte Entfer-
ungen für A R und die Senkrechte A N läßt sich der
arallaktische Winkel bei R sehr leicht trigonometrisch
nden; dieser Winkel bestimmt, um wie viel die gerade
C im Parallelismus gegen A B fehlt. Ein Beispiel
n Zahlen kann sich zur Uebung jeder Leser selbst auf-
etzen und berechnen, z. B. für den Fall, daß R eine
Meile und N in senkrechtem Abstand 100 F. von A
ntfernt liegt.

Unter günstigen Umständen soll man daher zu A B
)urch N eine Parallele näherungsweise dadurch erlan-
gen, daß man von N nach R hin visirt, und in dieser
Visirebene, etwa in C, ein Signal aufstellen läßt u. s. w.

Allein, wie selten findet man im Alignement von
einer geraden A B ein hinlänglich weit entferntes Richt-
object R, wie es seyn muß; wenn aber N A einiger-
maßen beträchtlich wird, z. B. 1000 Fuß lang, so
giebt das bemerkte Verfahren zu grobe Fehler.

Ist N A eine kleine Distanz, etwa 50 bis 100 F., so wird man gewiß zu größerer Genauigkeit lieber eine der oben beschriebenen Methoden wählen.

Winkelmessung.

§. 97.

Bekanntlich werden terrestrische Winkel entweder durch eine geometrische Construction, wozu insbesondere der Meßtisch dient, oder nach Gradmaß durch eigne Winkelmesser bestimmt.

Man wendet die erstere Methode hauptsächlich zu Detailaufnahmen und kleinern Triangulirungen, die letztere dagegen mehr zu größern geodätischen Operationen an. Wie ein bloß geometrisch construirter Winkel in Gradmaß ausgedrückt, und ein in Gradmaß gefundener geometrisch auf einem Plan (Papier) verzeichnet werden könne, erhellt aus dem, was von den goniometrischen (trigonometrischen) Linien in der ersten Abtheilung erinnert worden ist.

Die Richtigkeit in Bestimmung terrestrischer Winkel hat ihre Grenzen, oder ist nur bis auf ein gewisses Minimum des Fehlers annähernd zu erreichen. In dem Maße, als sich nach und nach die Werkzeuge der Beobachtung vervollkommnet haben, hat man auch die Sehewinkel auf der Erde und am Himmel genauer erhalten. Es ist hier der Ort nicht zu einer ausführlichen Geschichte der Winkelmessung und der dazu gebrauchten Hülfsmittel. Ein einfacher in Grade abgetheilter Kreis, Halbkreis oder Viertelkreis, mit gewöhnlichem Diopterlineal, ein Fernrohr zum deutlichern Visiren ein Fadenkreuz, auch wohl Mikrometer im Brennpunkt des Fernrohrs, der Nonius zum genauern Ablesen, besondere Theilmaschinen, Spiegel an Winkelmessern, und zuletzt die sinnreiche Vorrichtung zur Repetition der Multiplikation der Winkel

önnen nach meinem Erachten die Epochen der allmählig bis jetzt vorgeschrittenen Vollkommenheit der practischen Goniometrie hinlänglich bezeichnen. Noch Tycho de Brahe und Copernicus bedienten sich vor Erfindung der Fernröhre (1609) der gemeinen Diopterlineale an hölzernen oder messingenen Quadranten, fanden indessen doch bei ihrer scharfen Beobachtungsgabe mit bloßen Augen die Winkel bis auf Minuten, selbst auf Theile einer Minute. Erst später brachte man Fernröhre (Piccard 1669), Nonius, Fadenkreuz, Faden- und Glas-Mikrometer zur Bestimmung der Winkel bis auf einzelne Sekunden an. Mit einem guten Repetitions-Theodolit oder einem Bordaschen Multiplicationskreis und Fertigkeit im Beobachten kann man in unserer Zeit Winkel auf der Erde und am Himmel wenigstens bis auf 1 Sekunde genau finden; die Genauigkeit bis auf $\frac{1}{10}$ oder gar $\frac{1}{100}$ einer Sekunde möchte in jedem Fall, wo nicht unmöglich, doch unzuverläßig seyn. Mir wenigstens scheint in solchen imponirenden Angaben französischer oder anderer Geometer immer etwas Menschliches, nehmlich Uebertreibung, mit unter zu laufen. Wie ließen sich sonst die Abweichungen erklären, welche noch heutiges Tages in den Angaben verschiedener Astronomen über Polhöhen u. s. w. bemerkt werden? Etwas ganz andres ist es, wenn ein Winkel durch trigonometrischen Kalkul aus gegebenen Größen bis auf minutissima einer Sekunde gefunden wird; so, aber nicht durch eine directe Messung lassen sich Winkel sogar auf Tertien und noch genauer bestimmen.

Die Genauigkeit einer Winkelmessung wird zum Theil begrenzt durch die kleinen leicht möglichen oder auch unvermeidlichen Fehler der Winkelmesser, wovon in der dritten Abth. gesprochen worden, zum Theil aber auch vom Gebrauch dieser Werkzeuge, von der mehr oder weniger beschränkten Vollkommenheit des Seheorgans

und der davon abhängenden Schärfe im Visiren. Wenn wir von einem Standort aus einen Winkel messen wollen, den zwei entfernte Objecte mit diesem Orr bilden, so müssen wir nach einem bestimmten Punkt — es sey in der Mitte oder am Grenzrand, z. B. eine Thurmspitze — eines jeden Objectes hinvisiren, und zwar bei wiederholter oder aus verschiedenen Standörtern angestellter Observation immer nach einem und demselben Zielpunkt. Demnach kommt es hier nicht bloß auf einen genauen Winkelmesser, sondern auch auf ein scharfes aufmerksames Sehen an. Die Schärfe im Sehen hängt ab von der Beschaffenheit des Auges, von der Heiterkeit der Luft, von der Beleuchtung der Sonne, von der Lebhaftigkeit der Farben und der verhältnißmäßigen Stärke des Lichts, welche von entfernten natürlichen oder künstlichen Signalen ins Auge des Beobachters gelangen, endlich auch von der Größe des Sehewinkels (scheinbaren Größe), unter welchem uns ein entferntes Object erscheint. Wir sehen ein Object und einzelne Theile an ihm um so deutlicher, je bessere Augen wir haben, je näher er uns steht, und je stärker er beleuchtet ist; weiße, rothe, überhaupt helle Farben weiter, als dunkle, z. B. blaue und schwarze, es werde denn letztere auf weißem Grunde durch den Contrast gehoben. Daher auch stark von der Sonne beleuchtete Objecte, Feuer, brennende Lichter auf weitere Entfernung sichtbar bleiben, als dunkle Objecte. Sogar ein Gegenstand, der durch helles Licht auf eine weite Entfernung sichtbar ist, kann durch ein andres viel stärkeres Licht für unser Auge verschwinden, z. B. der Glanz der Fixsterne durch das Sonnenlicht am Tage. Dieser Umstand erschwert oft das Visiren nach Signalen, die uns die beschattete Seite zukehren.

Was die scheinbare Größe oder den Sehewinkel betrifft, unter welchem ein entferntes Object dem Auge

rſcheint, ſo begreift man leicht, daß derſelbe um ſo leiner wird, je weiter das Object vom Auge des Beob- chters abſteht, und daß das Bild von jenem auch dem eſten Auge verſchwindet, wenn der Sehewinkel bis auf in gewiſſes Minimum abnimmt. Dieſe Grenze des eutlichen Sehens für geſunde Augen, nehmlich der leinſte Winkel, unter welchem ein entferntes Object der ein Theil deſſelben eben noch ſichtbar bleibt, hat icht anders als durch Erfahrung und Verſuche unge- ähr ausgemittelt werden können.

Es bedeute (Fig. 60.) A B die wahre Größe größten Durchſchnitt) eines entfernten Objectes oder Theiles von demſelben, O das Auge des Beobachters, O C die Seheachſe, O A und O B die Viſirlinien nach en äußerſten Grenzen des Objectes, ſo heißt der Win- el A O B der Sehewinkel (ſcheinbare Größe), un- er welchem A B dem Auge in O erſcheint. A B iſt ine unveränderliche Größe; hingegen nimmt ſeine cheinbare Größe um ſo mehr ab, je weiter ſich O von A B entfernt. Iſt nun A B der Durchmeſſer eines chwarzen Kreiſes auf weißem Grunde, oder umgekehrt, o kann nach mehreren darüber angeſtellten Verſuchen in gutes Auge in einer Entfernung = 5156mahl dem Durchmeſſer des Kreiſes, denſelben bei heiterm Tages- licht und klarem Himmel nicht mehr ſehen. Wenn A B = 1 und ſeine Entfernung vom Auge O C = 3438, ſo iſt:

O C : A C oder 3438 : 0,5 = sin. tot. : tang. x;
folglich ∠ x = 30″ und ∠ A O B = 1′ ſehr nahe.

Nehmlich ein auf die Seheachſe ſenkrechter Durch- meſſer A B eines Gegenſtandes, der um das 3438fache ſeiner Größe vom Auge entfernt ſteht, erſcheint dem Auge unter einem Winkel von 1′. Da ſich aber für ſehr kleine Winkel die Sinus und Tangenten ſehr nahe verhalten, wie die Winkel ſelbſt, und hier

5156 : 3438 = 60″ (1′) : 40″ nahe;
so folgt daraus, daß der Sehewinkel (scheinbare Größe), unter welchem ein entfernter Gegenstand dem Auge verschwindet, ungefähr 40″ beträgt; Andere setzen ihn 50″, ich selbst habe ihn bei mehreren früher darüber angestellten Versuchen bald 42″, bald 45″ bis 52″ gefunden. Es hängt hierbei, wie gesagt, sehr viel von der Beleuchtung und der verschiedenen Beschaffenheit der Augen ab. Man kann nach einer ungefähren Bestimmung annehmen, daß vorzüglich helle terrestrische Objecte bei klarem Himmel einem guten Auge nur unter einem Sehewinkel von wenigstens 1 Minute noch sichtbar bleiben. Wir haben diese Grenze des deutlichen Sehens für eine ungefähre auch darum zu halten, weil die Sichtbarkeit eines Gegenstandes durchaus nicht allein von der Größe des Sehewinkels, sondern zugleich von dem Contrast (Abstich) seines Lichtes gegen die Beleuchtung des Hintergrundes, auf welchem es gesehen wird, abhängt. Ein sehr stark leuchtender Gegenstand wird auf einem dunklen Grunde auch unter einem Winkel, kleiner als 1′, gesehen.

So sehen wir die Fixsterne, deren scheinbarer Durchmesser insgesammt weniger als 1″ beträgt. Im Gegentheil kann auch ein Object mit wenig Licht auf stark beleuchtetem Grunde unter einem Sehewinkel, größer als 1′, dem Auge verschwinden, besonders wenn dies kurzsichtig ist.

Je weiter ein Gegenstand vom Auge absteht, desto undeutlicher müssen wegen Verkleinerung des Sehewinkels die einzelnen Theile daran erkannt werden, wenn auch schon der Gegenstand im Ganzen noch wahrgenommen wird. Seine Farben, Begrenzungen und Umrisse werden immer matter und unbestimmter, die Schatten immer schwächer von den beleuchteten Stellen abgeschnitten, zuletzt kann das Farbenbild des Gegenstandes

gleichsam mit der blauen Farbe der Atmosphäre zusammenfließen und für das Auge verschwinden, obgleich der Sehewinkel noch groß genug ist.

Stellen A B (Fig. 60.) zwei in der Nähe noch als getrennt erscheinende leuchtende Punkte vor, so werden sie einem Auge bei O, wenn der Sehewinkel sehr klein wird, als ein Punkt erscheinen. Selbst die Entfernung zweier Fixsterne verschwindet dem bloßen Auge unter einem Winkel, kleiner als 1 Minute, sie erscheinen als ein Stern.

So erhellt, warum beim Visiren mit bloßen Augen nach einem gewissen Punkt (Grenze) eines Richtobjectes auch bei der größten Aufmerksamkeit ein Fehler von 2 oder noch mehreren Minuten bei einer Winkelmessung Statt finden könne. Visirt man z. B. durch gemeine Dioptern nach einer Signalstange, so muß ihre Dicke dem Auge wenigstens unter einem Winkel von 1′ erscheinen; dann nimmt man zwei verschiedene Punkte, oder Visirlinien nach beiden Seiten der Stange, für einen einzigen an, folglich kann der Fehler im Visiren eine Minute betragen; er beträgt aber bei der gewöhnlichen Unvollkommenheit der Augen und bei schwächerer Beleuchtung wohl insgemein noch mehr. Um einen Winkel zu bekommen, muß man nach zwei verschiedenen Signalen visiren, und kann also durch Verdoppelung des Fehlers den Winkel wenigstens um 2′ falsch bestimmen. Marinoni in seiner Schrift: de re ichnographica meint, durch Versuche gefunden zu haben, daß ein geübter Aufnehmer im Visiren durch das Dioptерlineal mit gehöriger Aufmerksamkeit nicht leicht um 2 Minuten und im ganzen Winkel höchstens um 5′ fehlen könne; es scheint mir aber, daß dieser Fehler bald größer, bald kleiner ausfallen werde, je nachdem die Beleuchtung und das Auge des Beobachters beschaffen sind u. s. w.

Welchen Einfluß der Fehler im Visiren, der bei hellem Himmel und guter Beleuchtung wenigstens 1′, unter ungünstigern Umständen aber wohl 2′ beträgt, auch auf die Absteckung von geraden Linien (Vertikalebenen) haben könne, kann sich der Leser aus dem Gesagten leicht erklären. Da indessen bei dieser Absteckung die Fehler im Visiren bald auf die eine, bald auf die andre Seite der Signalstangen fallen, so wird dadurch der Fehler im Ganzen wo nicht aufgehoben, doch sehr vermindert.

Gebraucht man statt der gemeinen Dioptern ein Fernrohr, so erlangt man dadurch Vergrößerung und vermehrte Deutlichkeit des entfernten Richtobjectes, folglich werden hiermit die Fehler in den gemessenen oder auf dem Meßtisch construirten Winkeln außerordentlich vermindert. Die Verbindung der teleskopischen Fernröhre mit goniometrischen Werkzeugen bezeichnet daher eine Hauptepoche in der stufenweisen Vervollkommnung der terrestrischen uud astronomischen Winkelmessung. Zwar bleiben auch bei Anwendung dieses ganz vortrefflichen Hülfsmittels wegen der Dicke der Fäden im Fadenkreuze noch kleine Fehler möglich, die bei den feinsten Fäden einige Sekunden betragen können; wir werden aber in der sechsten Abtheilung dieses Werkes sehen, wie sich selbst diese geringen Fehler in den Winkeln fast auf Null reduciren lassen.

Was noch weiter über diesen allerdings sehr wichtigen Gegenstand zu bemerken wäre, soll weiterhin an solchen Stellen, wo es hingehört, nicht versäumt werden. Uebrigens brauche ich kaum zu erinnern, daß in den allermeisten Fällen der practischen Erdmessung nur das Maß von Horizontalwinkeln, auf irgend einen Punkt der Erdoberfläche bezogen, so wie von Vertikal- (Höhen- oder Tiefen-) Winkeln verlangt wird. Um unvermeidliche Fehler in Bestimmung derselben zu ver-

indern, pflegt man sie wohl mehrere Male, und aus en verschiedenen Resultaten das arithmetische Mittel z nehmen.

§. 98.

Bestimmung terrestrischer Winkel durch Kette und Stäbe. (Fig. 61.)

Diese Art, Winkel auf dem Felde zu nehmen, auf einen Grundriß überzutragen, auch wohl in Gradmaß auszudrücken, ist die unvollkommenste von allen, und wird heutiges Tages nur von Feldmessern in einigen beschränktern Fällen des ökonomischen Aufnehmens gebraucht, wo es eben an andern bessern Hülfsmitteln (Winkelmesser oder Meßtisch) gebricht. Indessen ist diese Methode, als die einfachste und natürlichste, wohl die erste gewesen; auf welche im grauen Alterthume die Menschen durch die Elementarbegriffe der Mathematik und die Nothwendigkeit einer genauen Terrainbegrenzung geleitet wurden. Sie gründet sich auf den geometrischen Satz, daß durch drei Seiten eines Dreiecks seine drei Winkel völlig bestimmt sind, in welchem Verhältniß man auch diese Seiten verjüngen mag, so wie auf den goniometrischen Satz, daß die Sehne eines Kreisbogens in gewisser Art das Maß des dazu gehörigen Centriwinkels ist u. s. w.

Es können bei kleinen ökonomischen Aufnahmen folgende Fälle vorkommen:

a) A, B, C (Fig. 61.) sind drei Punkte auf dem Felde, in nicht großer Entfernung, auf einem ziemlich ebenen und horizontalen Boden; man will das Dreieck ABC mit seinen Winkeln, in einem verkleinerten doch ähnlichen Bilde, zu Papier bringen. Zu dem Ende mißt man die drei

Seiten des Dreiecks im Felde mit der Kette, oder einer Meßschnur, oder auch nach Schritten, und construirt sodann auf dem Papier nach irgend einem verjüngten Maßstab ein kleines Dreieck, dessen Seiten den gemessenen Weiten proportionirt sind, so werden auch die Winkel des kleinen Dreiecks wechselseitig den Winkeln A, B, C im Felde gleich.

b) Es soll bloß der Winkel CBA bestimmt werden, man kann vom Standort B nach den Richtpunkten A und C visiren und beliebig weit messen.

Soll der Winkel bloß geometrisch construirt werden, so mißt man von den Schenkeln desselben beliebige Stücke BD, BE, ingleichen den Abstand DE; verzeichnet hierauf nach einem verjüngten Maßstab ein kleines Dreieck auf dem Grundriß, welches dem Dreieck BDE im Felde ähnlich ist, so erhält man den Winkel B ꝛc.

Will man hingegen den Winkel nicht bloß geometrisch, sondern auch in Gradmaß bis auf die Genauigkeit von einigen Minuten erlangen, so thut man besser, auf den Schenkeln desselben gleiche Stücke $BD = BF$ nebst dem Abstand DF so genau wie möglich mit einer Meßkette, oder noch zuverlässiger, mit hölzernen Maßstäben, auszumessen. Für den Sinus totus $BD = BF$ wird dann die Länge DF die Sehne des Winkels B, oder $\frac{1}{2}DF = \text{Sin. } \frac{1}{2}B$, nach den ersten Sätzen der ebenen Trigonometrie. Aus dem Maß der ganzen oder halben Sehne DF in aliquoten Theilen des Sin. tot. BD, läßt sich sodann vermittelst einer Tafel der künstlichen (logarithmischen) oder der natürlichen Sinus, die Größe des Winkels B in Graden und Minuten berechnen.

Nehmlich es ist: $BD : \frac{1}{2}DF = \text{sin.tot.}(1) : \text{sin.}\frac{1}{2}B$

$2BD : DF = \text{sin.tot.} : \text{sin.}\frac{1}{2}B$ oder

$BD : DF = \text{sin.tot.} : 2\,\text{sin.}\frac{1}{2}B,$

folglich $\text{sin.}\frac{1}{2}B = \frac{DF.\ \text{sin. tot.}}{2\,BD}$

So findet man durch logarithmische Bearbeitung den B. $\frac{1}{2}B$ und daraus ferner den ganzen Winkel B. — Es ist gleichgültig, wie lang man BD als sin. tot. nimmt. Braucht man, wie es in der Ausübung am natürlichsten und bequemsten, für BD eine ganze Kettenlänge = 50 Dec. F. = 5000 Linien, so wird, den sin. tot. = 10000000 gesetzt,

$$\text{Sin.}\frac{1}{2}B = \frac{DF.10000000}{10000} = DF.1000.$$

In den Tafeln der natürlichen sinus wird aber

$$\text{Sin. tot.}\frac{10000000}{10000000} = 1{,}0000000;$$

braucht man nun eine solche Tafel, so wird:

$\text{Sin.}\frac{1}{2}B = \frac{DF.1000}{10000000}$ ein Decimalbruch in Theilen der Einheit.

Dieser Weg, den Winkel $\frac{1}{2}B$ mit Hülfe natürlicher sinus aufzusuchen, ist ungemein bequem. Ein Beispiel möge das rechte Verfahren bemerklich machen.

Es sey BD eine Kettenlänge = 50 Dec. F. = 5000 Lin.

die mit dieser Kette gemessene Sehne DF = 37 F. 4 Zolle = 3740 Lin.

mithin wird $\text{Sin.}\frac{1}{2}B = 3740 . 1000$

$= 0{,}3740000$

Für diesen Zahlenwerth findet sich in der Tafel der natürlichen sinus

der W. $\frac{1}{2}$B = 21° 58′ nahe, also

der W. B = 43° 56′ nahe.

Auf diese Weise wird und kann der Winkel B nur annähernd gefunden werden. Ließen sich BD und DF bis auf einzelne Linien genau messen, welches in aller Schärfe wohl unmöglich, so fände sich auch der gesuchte Winkel genauer. Gesetzt, es wäre völlig genau BD = 5000 Lin., DF = 3738 Lin.,

so wäre sin. $\frac{1}{2}$B = 0,3738000,

W. $\frac{1}{2}$B = 21° 57′ und W. B = 43° 54′.

So begreift man, wie diese Messungsart eine Annäherung auf einzelne Minuten, noch viel weniger auf Sekunden, nicht zu geben vermag, wenn man sich nehmlich nicht absichtlich täuschen will.

Ist BD nicht = 1 Kettenlänge = 5000 Lin., oder wenn man keine Tafel natürlicher sinus hat, *) so muß man die Rechnung logarithmisch führen, nach der Formel:

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\text{B} = \frac{\text{DF. sin. tot.}}{2\,\text{BD.}}$$

Einige Schriftsteller haben vorgeschlagen, für irgend eine Länge, als sin. tot. betrachtet, z. B. eine ganze Kettenlänge = 5 Ruth., die Sehnen aller Winkel, etwa von 5 zu 5 Minuten, in Voraus zu berechnen, und sich einer eignen Tafel solcher Zahlen bei Messung der Winkel durch Kette und Stäbe zu bedienen. Solche Sehnen- oder Chorden-Tafeln finden sich fast in allen ältern geodätischen Schriften. Bei dem jetzigen

---

*) Die kleinern Logarithmen-Sammlungen, auch die von Vega, enthalten solche nicht, welcher Mangel dem Anfänger ihren Gebrauch bei vielen Gelegenheiten sehr erschwert, und daher nicht zu billigen ist.

Zustand der Wissenschaft scheinen sie ganz entbehrlich; ein Feldmesser, der sich ohne einen solchen faulen Rechenknecht nicht zu helfen, und keine trigonometrische Rechnung mit Leichtigkeit zu führen versteht, sollte dies Geschäft lieber unterlassen, und dafür ein andres Handwerk ergreifen.

Wie man das gleichschenklichte Dreieck BDF nach einem verjüngten Maßstab auf Papier construirt, bedarf keiner weitern Erklärung. Wollte man den Winkel B auf dem Papier mit einem Transporteur in Gradmaß finden, so würde man noch viel weniger Genauigkeit erhalten, als durch die oben gezeigte Rechnung.

c) Es soll (Fig. 61.) ein Winkel ACB im Felde bestimmt werden; man kann vom Standort C aus nur auf einem Schenkel CB hin messen, in der Richtung des andern Schenkels CA hingegen nur visiren, welcher Fall häufig eintritt. Hier verlängert man durch Visiren und Abstecken die gerade AC rückwärts, mißt die beliebig lang genommenen Weiten CN und CM, welche auch gleich seyn können, ingleichen den Abstand MN, so läßt sich ferner, wie im zweiten Fall b), der Winkel MCN sowohl geometrisch auf Papier construiren, als auch in Gradmaß berechnen. Daraus ergiebt sich

$$\angle ACB = 180^0 - \angle MCN.$$

Bisweilen müssen bei einer ökonomischen Aufnahme beide Schenkel AC, BC rückwärts verlängert werden; hier mißt man CN, CR, NR, und findet so, wie vorher, den $\angle RCN = \angle ACB$ u. s. w.

§. 99.

Bestimmung terrestrischer Winkel vermittelst des Meßtisches. (Fig. 62.)

In Fig. 62. stelle c einen Standort der Beobachtung, A und B zwei entfernte Objecte, nehmlich bestimmte Richtpunkte an denselben, vor; es wird der auf den Horizont von c reducirte Winkel AcB gesucht.

Man stelle den Meßtisch über dem Standort horizontal auf, welches mit Hülfe einer Dosenlibelle hinlänglich genau geschieht. Die rechte Einstellung der Libelle erlangt man beim Meßtisch erster Art (Fig. 21.) durch Verrücken der Füße, durch Nuß und Stellschrauben, beim Meßtisch zweiter Art (Fig. 22.) durch Eindrücken seiner Füße in den Boden. Die erstere Art ist zur guten Horizontalstellung vorzüglicher.

Auf dem über dem Meßtisch ausgespannten Papier sucht man ferner den Punkt c, welcher senkrecht über dem gleichnamigen Punkt auf dem Boden steht. Hierzu dient großentheils ein gesundes Augenmaß, annähernder eine sogenannte Gabel von Holz oder Metall mit zwei gleichlangen Armen, an deren unterm ein Bleiloth angehängt ist; die angehängte Metallmaße, z. B. eine Bleikugel oder desgl., berührt beim Gebrauch beinahe den Boden. Diese Vorrichtung findet man gelegentlich in der Fig. 22. bezeichnet; hier bedeutet H den Punkt auf der Erde, h den gleichnamigen auf dem Meßtisch. Das Verfahren dabei versteht sich von selbst. Man könnte zu dem Ende auch einen Faden mit Bleikugel, an die untere Fläche des Meßtisches gehalten ꝛc., oder ein Steinchen, das man von der untern Seite des Tisches gegen den Boden fallen läßt, gebrauchen. Bei keiner Aufnahme mit dem Meßtisch wird ein erheblicher oder auch nur bemerkbarer Fehler daraus erwachsen,

venn c auf dem Meßtisch in vertikaler Projection um einen oder ein paar Zolle vom gleichnamigen Punkt auf dem Boden abstehen sollte. Doch thut man hier, bei wichtigen Aufnahmen, des Guten lieber zu viel als zu wenig.

In c pflegt man insgemein eine äußerst feine stählerne Nadel, oben mit einem Knöpfchen aus Siegellack, senkrecht einzustecken. An diese Nadel wird nun, bei horizontalem Stand der obern Meßtischfläche, die Kante des Diopterlineals angelegt, und zuerst gegen den Richtpunkt des einen Objects, z. B. A, gedreht, so daß man A in der vertikalen Diopternebene siehet; man zieht mit einem feinen, harten, messerförmig zugeschärften Reißblei dicht am Rande des Lineals eine zarte Linie ca, welche in die Vertikalebene cA fällt. Hierauf richtet man, bei festem unbeweglichen Stand des Meßtisches, das Diopterlineal, welches an der Nadel in c liegen bleibt, gegen den Richtpunkt des zweiten Objects B, und ziehet cb, welche in die Vertikalebene cB fällt. Ist alles richtig geschehen, so wird der Winkel acb auf dem Meßtisch dem auf den Horizont des Punktes c reducirten Winkel ACB gleich seyn.

Daß aber bei der Wendung des Lineals aus der Lage ca in die Lage cb der Tisch seine Stellung nicht verändert habe, erfährt man entweder dadurch, daß man das Lineal in die Lage ca zurückführt, und in seiner Diopternebene den Richtpunkt A noch unverrückt sieht, oder durch die Versicherungsdioptern, durch die man bei der ersten und zweiten Stellung des Lineals ein und dasselbe natürliche oder künstliche Signal sehen muß, oder durch eine Orientirboussole, die mit dem Meßtisch in eine feste Verbindung gesetzt ist, und deren Nadel ihren Stand nicht verändert, wenn der Meßtisch den seinigen beibehält. Indessen ist diese letztere Methode der Versicherung wohl die unsicherste, weil die Magnet-

nadel eine Horizontaldrehung von einigen Minuten anzugeben nicht vermag.

Liegen die Richtpunkte A, B zu hoch über, oder zu tief unter der Horizontalebene durch c, als daß man solche beim Visiren durch die Dioptern sehen könnte, so muß man die Vertikalebenen cA oder cB nach Befinden der Umstände zuvörderst durch Zwischensignale bezeichnen, und nun nach diesen visiren.

Da, wie man leicht begreift, die Visirlinien ca, cb um die halbe Dicke der eingesteckten Nadel vom Centralpunkte c abweichen, so kann man auch, wenn es eine äußerst genaue Aufnahme betrifft, die Nadel weglassen, den Punkt c durch einen sehr feinen Nadelstich oder desgl. bezeichnen, und das Diopterlineal bloß um diesen Punkt drehen. Man wird durch eine kurze Uebung bald eine große Fertigkeit hierin erlangen. Indessen möchte, wenn sonst die Anschlagnadel recht fein ist, und senkrecht steht, eine zu große Aengstlichkeit in den allermeisten Fällen wenig oder gar nichts helfen.

Wegen der Undeutlichkeit des Visirens durch gemeine Dioptern und wegen der Dicke der auf das Papier gezogenen Linien — die Dicke der feinsten Linien verursachte ungefähr 1′ Ungewißheit — kann in der Construction des Winkels acb ein Fehler von etwa 3′ begangen werden; indessen wird dieser Fehler bei nachlässigem Verfahren auch größer ausfallen; im Allgemeinen findet die Wahrscheinlichkeit Statt, daß sich die Fehler bei beiden Lagen des Diopterlineals theilweise aufheben und mindern. Bei mehreren deshalb sorgfältig angestellten Vergleichungsversuchen habe ich die Differenz des auf dem Meßtisch construirten und des mit einem genauen Winkelmesser nachher genommenen Horizontalwinkels acb selten größer als 2′, bisweilen auch = 0′ gefunden. Es hängt hier vieles von delikater vorsichtiger Behandlung, aber auch vieles vom

Zufall ab; doch muß der Fehler seine Grenzen haben.

Die Visirlinien ac, bc bis an den Punkt c auszuziehen, ist meistens unnöthig, wie wir weiterhin sehen werden; auch läßt sich dieses wegen der Nadel und der Form des Reißblei's nicht wohl erlangen.

Bei Aufnahmen mit dem Meßtisch ist gewöhnlich eine Linie ca auf dem Meßtisch bereits gegeben (gezeichnet), und es wird verlangt, diese Linie ca in die gleichnamige cA auf dem Felde so einzurichten, daß c senkrecht über dem correspondirenden Punkt auf der Erde und ca in die Vertikalebene cA zu liegen komme. Um den Meßtisch demgemäß über c aufzustellen, oder wie man sich auch ausdrückt, gehörig zu orientiren, dient hauptsächlich ein gutes Augenmaß, Visiren durch das an ca gelegte Diopterlineal, demgemäße Prüfung und Berichtigung durch Verrücken des Tisches, zur Beihülfe die Gabel, ein Steinchen, welches man unter c von der untern Fläche des Meßtisches gegen den Boden fallen läßt; auch kann man am Rande des Meßtisches (siehe Fig. 62.) in g, h Bleilothe anhängen, dadurch die Linie (Richtung) gh auf dem Meßtisch gegen den Boden projiciren, und darnach, wenn c auf dem Meßtisch nicht senkrecht über dem gleichnamigen Punkte im Felde steht, den fehlerhaften Stand des Meßtisches verbessern. Eine weitere Erörterung dieses in der Theorie sehr leichten, in der Ausübung aber allerdings etwas schwierigen und nicht zu vernachläßigenden, Gegenstandes scheint mir für denkende Leser überflüssig zu seyn. Mehrere frühere Schriftsteller, unter diesen auch Mayer in seiner pract. Geom. handeln über das Orientiren des Meßtisches fast bis zur Ermüdung weitläufig. Um diesen Act zu erleichtern, haben einige Geometer vorgeschlagen, den Punkt c immer in die Mitte des Meßtisches zu versetzen u. s. w. Meine Meinung geht da-

hin, daß man mehrere kleine Handgriffe bei diesem Orientiren durch ein wenig Uebung und Aufmerksamkeit selbst besser findet, als durch Bücher. Unter meinen Zuhörern, denen ich Anleitung zu geodätischen Messungen gab, ist mir wenigstens noch keiner vorgekommen, der nach einer kurzen Uebung die Kunst des Orientirens vollkommen und leicht auszuüben nicht vermocht hätte; auch die hierzu nothwendigen Methoden finden gute Köpfe selbst. — Wer indessen noch weitern schriftlichen Unterricht begehrt, den verweise ich auf Mayer's pract. Geom. und auf Bugge's mit practischer Sachkenntniß geschriebene Anleitung zur gemeinen Feldmeßkunst. Bugge bemerkt ganz wahr, daß geringe Fehler im Orientiren des Meßtisches auf die Richtigkeit der Speciallandmessung bei dem gewöhnlichen Maßstab der Charten keinen bemerklichen Einfluß haben, daß der feinste Punkt auf dem Meßtisch wenigstens 1 Fuß auf dem Felde ausmacht, und daß daher sehr wenig oder nichts zu besorgen, wenn c auf dem Meßtisch von c auf dem Boden, in vertikaler Projection, um 1 oder ein paar Zolle absteht.

Bei gemeinen ökonomischen oder militärischen Aufnahmen würde, wie ich glaube, eine allzuweit getriebene, zeitraubende Vorsicht in Pedanterie ausarten.

Bisweilen verlangt man die Größe des auf dem Meßtisch construirten Winkels in Gradmaß. Unvollkommen, etwa bis auf $^1/_2$ oder $^1/_4$ Grad, erlangt man dies durch Anlegen eines Transporteurs, genauer hingegen durch einen tausendtheiligen verjüngten Maßstab und eine Tafel der natürlichen sinus für den sin. tot. = 1 berechnet.

Man schneide nehmlich von den Schenkeln des Winkels auf dem Meßtisch gleiche Stücke ca = cb = 1000 Theile des Maßstabes ab, der hierbei nicht zu klein angenommen werden darf; so ist die gerade ab

ie Sehne des Winkels c und $\frac{1}{2}$ ab = sin. $\frac{1}{2}$ c. Man neſſe alſo ab in Theilen des tauſendtheiligen Maßſtaes, und ſuche die Hälfte dieſer Zahl unter den drei rſten Stellen der natürlichen sinus auf, ſo iſt der dazu ehörige Winkel in Gradmaß = $\frac{1}{2}$ c, alſo das doppelte es Winkels in Gradmaß = dem Winkel acb.

Beiſpiel. Es ſey gemeſſen ab = 956 Tauſendtheile = 0,956 für ca = sin. tot. = 1; ſo iſt $\frac{1}{2}$ ab oder sin. $\frac{1}{2}$ c = 0,478. Nach den Sinus-Tafeln iſt 0,47818.. = sin. 28° 34′; alſo $\angle\frac{1}{2}$c = 28° 34′ und $\angle$c oder der W. acb = 57° 8′.

Wegen der Dicke der Linien ca, cb auf dem Papier, wegen kleiner Fehler, die im Abmeſſen der geraden ab nach Tauſendtheilchen des Maßſtabes auch mit Zuziehung des feinſten Haarzirkels noch Statt finden können, endlich wegen des progreſſiven Wachsthum der sinus um kleinere Theile als $\frac{1}{1000}$ des sin. tot. (Man ſehe hierüber die Tafeln nach), wenn die Winkel um einzelne Minuten fortſchreiten, darf man von dieſer Art, das Gradmaß eines auf Papier conſtruirten Winkels zu finden, keine größere Genauigkeit erwarten, als auf 6 bis höchſtens 3 Minuten. Auf ganz ähnlichem Wege läßt ſich umgekehrt ein in Graden und Minuten gegebener Winkel geometriſch auf Papier conſtruiren.

Man könnte auch (Fig. 62.) von b eine Senkrechte bd auf ca fällen, und das Maß von bd = sin. c in den Sinus-Tafeln aufſuchen u. ſ. w. Allein die Beſtimmung der Senkrechten bd und ihres Maßes in Tauſendtheilchen iſt noch größern Fehlern ausgeſetzt, als die vorerwähnte.

Auf eine erträgliche Art kann ſogar ein guter Meßtiſch, beſonders von der zweiten Art (Fig. 22.), welcher einmahl horizontal geſtellt bei der Drehung um ſeine Mittelpunktsachſe dieſe Lage beibehält, als ein

Winkelmesser mit einfacher Repetition dienen. Am besten construirt man hier den Winkel acb so, daß c in den Mittelpunkt (Umdrehungspunkt) des Meßtisches fällt; ist dies geschehen, so legt man das Diopterlineal sehr genau an cb, und dreht den Tisch durch grobe und feinere Schraubenbewegung so weit herum, daß cb in die Lage ca, nehmlich in die Vertikalebene cA kommt; dann stellt man den Meßtisch fest, und bringt die Diopternebene wieder in die Vertikalebene cB; damit ist eine Repetition des Winkels vollbracht, nehmlich $\angle acb'' = 2 . \angle acb$. Das Gradmaß des W. acb'' kann man ferner durch das Maß seiner halben Sehne ꝛc. finden, wie vorher gezeigt wurde. So kann man den Winkel acb so vielmahl, als man will, repetiren, so daß der Meßtisch selbst eine oder mehrere ganze Umdrehungen am Ende vollendet hat. Man vergleiche, was im §. 62 und 63. von der Repetition einer Winkelmessung und ihren Vortheilen gesagt worden. So genau, wie ein repetirender Theodolit, kann der Meßtisch, wegen der Unvollkommenheit im Visiren, im Anlegen des Diopterlineals u. s. w. den gesuchten Winkel freilich nicht geben; allein nach meinen mehrmahligen darüber angestellten Versuchen erhält man ihn so doch wenigstens bis $\frac{1}{2}$ Min. richtig, wenn man nehmlich die gehörige Vorsicht hierbei anwendet. Wer den Versuch machen will, wird sich davon überzeugen. In manchen Fällen, wo eben ein eigentlicher Winkelmesser mangelt, kann diese Methode, einen Winkel im Felde bis auf 1 oder $\frac{1}{2}$ Min. zu messen, mit Vortheil gebraucht werden.

§. 100.

Bestimmung terrestrischer Winkel vermittelst eines Winkelmessers.

Was im Allgemeinen über die Messung terrestrischer Winkel gesagt werden kann, habe ich größtentheils schon bei Beschreibung der Instrumente, so wie in §. 97. beigebracht.

Es ist klar, daß der Grad der Genauigkeit einer Winkelmessung immer mit der größern oder geringern Vollkommenheit der hiezu angewendeten Werkzeuge in Verhältniß steht. Mit einem Repetitionskreis kann man die Winkel bis auf 1″ oder selbst Theilchen einer Sekunde finden, wenn dagegen mit einer Boussole diese Genauigkeit höchstens bis auf 7′ und mit einem Astrolabium ohne Fernrohr höchstens auf 2 bis 3 steigt u. s. w.

Der Zweck und die Ausdehnung der geodätischen Arbeit schreibt das erforderliche Maß der Genauigkeit vor. Es wäre unnöthig, zur niedern Feldmeßkunst, die sich innerhalb einer oder einiger Quadratmeilen bewegt, repetirende Kreise, und ganz unstatthaft, zu großen geographischen Bestimmungen eine Boussole oder ein Astrolabium zu gebrauchen.

Da auf der Erde meistens Horizontalwinkel verlangt werden, so muß der Winkelmesser mit seinem Centrum senkrecht, über dem Standort, von wo aus ein Winkel genommen werden soll, sorgfältig invellirt, d. h. horizontal aufgestellt werden, wenn er nehmlich mit gemeinen Dioptern oder mit einer Kippregel, vertikal beweglichem Fernrohr, versehen ist. Diese Horizontalstellung geschieht mit aufgesetzten oder angehängten Röhrenlibellen. Bei etwas schiefer Stellung der Kreisebene entstehen mehr oder weniger beträchtliche Fehler in den gemessenen Horizontalwinkeln. Die Ge-

nauigkeit wird hier begrenzt durch die größere oder geringere Empfindlichkeit der Libellen selbst. Es lassen sich Formeln geben, nach welchen man die Fehler in den gefundenen Horizontalwinkeln aus den Neigungswinkeln der Kreisebene gegen den Horizont berechnen könnte. Allein solche Formeln können in der Ausübung wenig oder gar nichts helfen, da es fast unmöglich ist, die data hierzu, nehmlich die geringen Neigungswinkel selbst genau zu finden. In jedem Fall wird es folglich gerathener seyn, für die Horizontalstellung des Winkelmessers durch empfindliche berichtigte Libellen eifrigst zu sorgen. Kleine Neigungsfehler von 1 oder einigen Minuten, auf welche eine Libelle etwa keinen Ausschlag mehr geben sollte, erzeugen in den Horizontalwinkeln nur äußerst geringe, für die meisten practischen Arbeiten ganz bedeutungslose Fehler; weshalb die Besorgniß in dieser Sache nicht zu weit getrieben werden muß.

Bewegt sich ferner bei horizontalem Stand der Kreisebene das Fernrohr, als Kippregel, nicht in einer gegen jene ganz vertikalen Ebene auf und nieder, so werden daraus ebenfalls kleine Fehler für die gemessenen Horizontalwinkel erwachsen. Da jedoch bei guten Instrumenten der Neigungsfehler in der Bewegung des Fernrohrs = o oder wenigstens äußerst gering, so kommen auch die daraus für die Horizontalwinkel entspringenden in keine Betrachtung. Diese Fehler nach einer besondern Formel der sphärischen Trigonometrie, die wir hier füglich übergehen können, genau zu bestimmen, verhindert wieder der Umstand, daß man eine sehr geringe Neigung der Fernrohrebene nicht zuverläßig finden kann. Es wäre übrigens eine gar verdrießliche Arbeit, wenn man die mit einem grobfehlerhaften Instrumente, dessen Mängel in Gradmaß bekannt wären, gefundenen Winkel durchgängig mittelst einer besondern Formel erst auf ihren wahren Werth reduciren müßte.

Wie zeitraubend und mühsam würde ein solcher Kalkul bei großen Vermessungen seyn? Findet also in der Bewegungsebene des Fernrohrs oder bei einem gemeinen Astrolabium in der Stellung der Diopternebene eine beträchtliche Abweichung Statt, so muß der Geometer dem Uebel von einem geschickten Künstler schlechterdings abhelfen lassen. Ob die Bewegungsebene des Fernrohrs oder die Visirebene durch gemeine Dioptern vertikal gegen die Limbusebene eines Winkelmessers stehe, erfährt man, indem man diesen mit Hülfe guter Libellen so genau als möglich horizontal stellt, in einiger Entfernung ein Bleiloth aufhängt, des vollkommen ruhigen Vertikalstandes wegen am besten in Wasser, oder auch an einer Wand eine senkrechte Linie zeichnet, und nun durch das auf und nieder bewegliche Fernrohr, nehmlich durch den Durchschnittspunkt seines Fadenkreuzes, oder durch die gemeinen Dioptern nach verschiedenen höhern und niedrigern Punkten der senkrechten Linie visirt u. s. w. Die Sache bedarf keiner ausführlichern Erklärung.

Wird ein Winkelmesser angewendet, dessen Ebene beim Visiren nach zwei entfernten Objecten in die Ebene, worin der Standpunkt und die beiden Richtpunkte der Objecte liegen, gebracht werden muß, so kann man damit schiefgeneigte Winkel auf den Horizont reducirt unmittelbar nicht erhalten. Diese Unbequemlichkeit und Erschwerung geodätischer Arbeiten trägt seiner Construction nach der Sextant an sich, so wie auch der Bordasche Kreis, dessen Fernröhre parallel gegen seine Limbusebene stehen. Wie in diesem Fall ein schiefgemessener Winkel durch eine Nebenmessung von Höhen- oder Tiefenwinkeln und darauf gegründete trigonometrische Berechnung auf den zugehörigen Horizontalwinkel gebracht (reducirt) werde, soll im folgenden § gezeigt werden.

Von der Messung der Höhen- (Elevations-) oder umgekehrt der Tiefen- (Depressions-) Winkel ist bei einer andern Gelegenheit das Wichtigste schon bemerkt worden. Unvollkommener geschieht eine solche Messung vermittelst des gewöhnlichen Astrolabiums, vollkommener vermittelst des mit einem besondern Höhen- oder Vertikalkreis versehenen Repetitionstheodoliten, auch vermittelst eines Sextant mit künstlichem Horizont, oder Libelle am Fernrohre, in größter Schärfe zum Behuf astronomischer Bestimmungen gewährt die Vertikalwinkel oder Zenithdistanzen der Bordasche Multiplicationskreis. Davon ein Näheres in der sechsten Abth. dieses Werkes. Eine Hauptforderung bei allen Beobachtungen dieser Art ist die insgemein durch ein Bleiloth zu erlangende und prüfende Vertikalität der Kreisebene.

§. 101.

Reduction schiefgemessener Winkel auf den Horizont des Standorts. (Fig. 63.)

Selten liegen die entfernten Objecte (Richtpunkte), auf welche visirt wird, in der durch den Standort der Beobachtung gelegten Horizontalebene; liegen sie über und unter derselben, so heißt der Sehewinkel vom Auge des Beobachters gegen die Objecte ein schiefgeneigter, z. B. (in Fig. 63.) der Winkel ACB, wo A und B über dem Horizont von C liegen. Die vertikale Projection des Visirstrahls CA auf die Horizontalebene durch C ist CD, die des Visirstrahls CB ist CE. Der Winkel DCE ist die horizontale Projection des schiefgeneigten ACB. Eine weitere Worterklärung wird nicht Noth thun; ferner wird man begreifen, daß ein Visirstrahl oder wohl gar beide auch unter dem Horizont von C liegen können. Fast durchgängig wird in

der niedern und höhern Erdmessung statt des schiefgeneigten Winkels A C B seine horizontale Projection — in Beziehung auf den Standort C — nehmlich der Horizontalwinkel D C E verlangt.

Mißt man die Winkel mit einem Sextant oder, wie die Franzosen bei ihrer letzten Gradmessung mit einem Bordaschen Kreis, so muß man die Limbusebene dieser Instrumente in die Ebene des Winkels A C B neigen, um A und B zu sehen. So findet man nur den schiefgeneigten Winkel A C B = c, aber nicht seine horizontale Projection. Um nun A C B in D C E zu verwandeln, muß man noch zwei Winkel, nehmlich die Höhen- (oder Tiefen-Winkel) A C D = a und B C E = b mit dem gebrauchten Instrument bestimmen.

Aus dem schiefen Winkel c und den Winkeln b, a läßt sich sodann durch eine Berechnung der ebenen oder sphärischen Trigonometrie der Horizontalwinkel D C E ableiten. Der Kalkul der ebenen Trigonometrie wird hier sehr zusammengesetzt und weitläufig, daher wir solchen als unbrauchbar mit Stillschweigen übergehen; schneller und bequemer führt die sphärische Trigonometrie zum Ziel.

Man stelle sich nehmlich durch die Schenkel C A, C B des schiefgeneigten Winkels c Vertikalebenen gelegt vor, welche den scheinbaren Horizont des Standorts C in D und E schneiden; ferner aus C mit einem beliebig gr[illegible]n Halbmesser — den man sich allenfalls bis an das scheinbare Himmelsgewölbe verlängert denken kann — z. B. C m = C n in den Ebenen des schiefen und der Höhen- oder Tiefen-Winkel Bogen größter Kreise beschrieben, so wird in Gradmaß Bogen k h = W . c, Bog. h m = a, Bog. k n = b. Die Bogen h m und k n müssen einander in einer Entfernung von 90°, nehmlich von den Durchschnittspunkten m, n in der Horizontalfläche D C E an gerechnet, schneiden.

Der Durchschnittspunkt Z ist der Pol der verlängerten Bogen h m, k n, und stimmt mit dem Zenithpunkt des Standorts C zusammen. Offenbar erhält man so ein sphärisches Dreieck k h Z auf der Oberfläche einer Kugel von beliebig großem Halbmesser; der sphärische Winkel Z ist in Gradmaß = dem Aequatorbogen m n = dem Horizontalwinkel D C E, welches aus den Definitionen und Sätzen der sphärischen Trigonometrie in der 2ten Abtheil. erhellt.

Aus dem gemessenen Höhenwinkel a ergiebt sich sein Complement zu 90^0, nehmlich Bogen h Z oder $\alpha = 90^0 - a$, eben so Bog. k Z oder $\beta = 90^0 - b$. Man pflegt die Bogen oder Winkel α und β Zenithdistanzen der Objecte A, B in Beziehung auf den Horizont von C zu nennen. Sind diese Zenithdistanzen gemessen worden, wie es mit dem Bordaschen Kreis geschieht, so kennt man auch ihre Complemente zu 90^0, $a = 90^0 - \alpha$, $b = 90^0 - \beta$, wenn a und b Höhenwinkel sind u. s. w. Ebenfalls ist Bogen k h als Maß des schiefgemessenen Winkels c bekannt.

Aus den drei Seiten (Bogen) des sphärischen Dreiecks k h Z, nehmlich:

$$k h = c, \quad h Z = \alpha, \quad k Z = \beta$$

läßt sich der sphärische Winkel $Z = D C E$ nach folgenden Formeln (§. 37.) berechnen:

1) $$\text{Cos. } D C E = \frac{\cos. c - \cos. \alpha \,.\, \cos. \beta}{\sin. \alpha \,.\, \sin. \beta}$$ oder, da

$$\cos. \alpha = \sin. a \text{ u. s. w.}$$

$$\cos. D C E = \frac{\cos. c - \sin. a \,.\, \sin. b}{\cos. a \,.\, \cos. b}.$$

2) $$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} D C E = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(c + \alpha - \beta) . \sin. \frac{1}{2}(c + \beta - \alpha)}{\sin. \alpha \,.\, \sin. \beta}}$$

oder da

$\alpha = 90^0 - \alpha$, $\beta = 90^0 - b$, $\sin.\alpha = \cos. a$, $\sin.\beta = \cos. b$,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{DCE} = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}[c+(a-b)] \cdot \sin.\frac{1}{2}[c-(a-b)] \cdot r^2}{\cos. a \cdot \cos. b}}$$

Die zweite Formel läßt logarithmische Bearbeitung zu, ist daher der erstern bei wirklichen Winkelreductionen vorzuziehen.

Für den Fall, daß a und b beide Höhen- (Elevations-) Winkel sind, möge hier ein Beispiel stehen:

Gemessen sind der schiefe Winkel $c = 60^0\ 30'$
der Höhenwinkel $a = 2^0\ 35'$
— — $b = 1^0\ 25'$,

folglich ist $\frac{1}{2}c = 30^0\ 15'$, $\frac{1}{2}(a - b) = 35'$, mithin

$$\sin.\tfrac{1}{2}\,\text{DCE} = \sqrt{\frac{\sin. 30^0\,30' \cdot \sin. 29^0\,40' \cdot r^2}{\cos. 2^0\,35' \cdot \cos. 1^0\,25'}}$$

Logarithmen des Zählers:	Logarithmen des Nenners:
+ 9,7097299	— 9,9995584
+ 9,6945642	— 9,9998672
log. $r^2 = +$ 20, ...	— 19,9994256
+ 39,4042941	
— 19,9994256	
+ 19,4048685 div. durch 2, wegen der Quadratwurzel giebt:	

log. sin. $\frac{1}{2}$ DCE = 9,7024342; dazu gehört unter den Logarithmen der Sinus

$\angle\frac{1}{2}$ DCE = $30^0\ 15'\ 55''$, also ist der reducirte Horizontalwinkel

DCE = $60^0\ 31'\ 50''$, der schiefgemeßne

c = $60^0\ 30'$,

demnach ist der Horizontalwinkel beinahe um 2' größer, als der schiefe; um so viel würde man fehlen, wenn man letztern bei geodätischen Arbeiten, wo nur hori-

zontale Projectionen gebraucht werden, in Rechnung bringen wollte. Da nun bei einer etwas beträchtlichen Triangulirung ein Fehler von 1′ oder gar 2′ in den Winkeln schon einen sehr nachtheiligen Einfluß auf das Maß der berechneten Seiten des Dreiecknetzes hat, so darf die Reduction, horizontale Projection schief gemessener Winkel nie versäumt werden, wo nur einige Genauigkeit verlangt wird.

Die Höhenwinkel sind in obigem Beispiel nur klein angenommen, wie man solche beim Visiren nach sehr entfernten Signalen (Richtpunkten) gewöhnlich findet; beim Visiren nach nahen Signalen können a, b größer werden, dann weicht auch der Horizontalwinkel vom schiefgemeßnen um ein Beträchtlicheres ab. Wäre z. B.

$$c = 51^0\,41'\,14'',\quad a = 51^0\,32',\quad b = 19^0\,39'\,10'',$$

so erhielte man vermittelst der vorhin gezeigten Rechnung den Horizontalwinkel $DCE = 52^0\,30'$, also um $48'\,46''$, fast um 1^0 größer, als den schiefgemeßnen.

Liegen A und B beide unter dem Horizont von C, oder sind a und b beide Tiefen- (Depressions-) Winkel, so geht die Berechnung denselben Gang, als wenn beide Höhenwinkel wären; das sphärische Dreieck k h Z fällt hier unter den Horizont von C, seine Seiten und Winkel aber bleiben dieselben, als über diesem Horizont. Dies stimmt auch mit der zweiten Formel zusammen. Da nehmlich in diesem Fall a und b negative Höhenwinkel, so wird

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,DCE = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}[c-(a-b)]\,.\,\sin.\frac{1}{2}[c+(a-b)]}{\cos.\,a\,.\,\cos.\,b}}$$

Ein solcher Fall tritt oftmals ein, wenn man von einem Thurm aus die Sehewinkel nach entfernten niedriger liegenden Objecten mit dem Sextant mißt.

Liegt ein Object, z. B. B, im Horizont des Standortes C, so wird $b = 0^0$, also

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,DCE = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(c + a)\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(c - a)}{\cos. a}}$$

Es bleibt dem Leser überlassen, sich selbst ein Beispiel der Art anzusetzen und zu berechnen. Hierbei ist es gleichgültig, ob a ein Höhen- oder Tiefen-Winkel sey.

Liegt ein Richtpunkt, z. B. A, über dem Horizont von C, der andere B unter demselben, so wird der Höhenwinkel + a, der Tiefenwinkel — a, folglich:

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,DCE = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}[c + (a + b)]\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}[c - (a + b)]}{\cos. a\,.\,\cos. b}}$$

Der Nenner bleibt hier unverändert, weil zu jedem spitzen Winkel, er sey positiv oder negativ, gleiche Cosinus in Hinsicht der positiven Bedeutung gehören.

Beispiel: Man hat gemessen $c = 56^0\,12'$
$a = +7^0\,35'$
$b = -1^0\,29'$;

folglich wird $\frac{1}{2}c = 28^0\,6'$, $\frac{1}{2}(a + b) = 4^0\,32'$, also

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,DCE = \sqrt{\frac{\sin. 32^0\,38'\,.\,\sin. 23^0\,34'\,.\,r^2}{\cos. 7^0\,35'\,.\,\cos. 1^0\,29'}}$$

Logar. d. Zählers:	Logar. d. Nenners:
9,7317989	9,9961849
9,6018600	9,9998544
20,.....	— 19,9960393
+ 39,3336589	
— 19,9960393	
+ 19,3376196 div. d. 2 giebt:	

log. sin. $\frac{1}{2}\,DCE = 9{,}6688098$, folglich
$\frac{1}{2}\,DCE = 27^0\,48'\,16''$ nahe, daher
$DCE = 55^0\,36'\,32''$.

Je genauer man die Höhen- oder Tiefen-Winkel zu messen vermag, desto annähernder erlangt man den

reducirten Horizontalwinkel. Indessen haben Fehler von einer oder einigen Minuten in Bestimmung jener keinen sehr beträchtlichen, bei kleinern Triangulirungen zu beachtenden, Einfluß auf letztern. Wir wollen dies an dem erstern der oben berechneten Beispiele bemerkbar machen:

Es sey nehmlich der schiefe Winkel

$$c = 60^0\,30',$$

der Höhenwinkel

a eigentlich = $2^0\,35'$, aber falsch gemessen um 2′, nehmlich als $2^0\,37'$,

b eigentlich = $1^0\,25'$, falsch gemessen als $1^0\,23'$.

Bei dieser fehlerhaften Annahme, welche in Bestimmung der Vertikalwinkel mit dem Sextanten nicht leicht Statt finden kann, erhält man nach der Formel

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,DCE = \sqrt{\frac{\text{sin. } 30^0\,52' \,.\, \text{sin. } 29^0\,38' \,.\, r^2}{\text{cos. } 2^0\,37' \,.\, \text{cos. } 1^0\,23'}}$$

berechnet:

$\frac{1}{2}\,DCE = 30^0\,15'\,53''$,

$DCE = 60^0\,31'\,46''$, folglich nur um 4″ von dem, nach richtiger Voraussetzung berechneten, Horizontalwinkel $= 60^0\,31'\,50''$ verschieden.

Eine so geringe Differenz kommt in gar keine Betrachtung, wenn man mit einem Sextant triangulirt, der überhaupt, streng und vorurtheilsfrei betrachtet, keine Genauigkeit auf ein paar Sekunden giebt. Könnte man also die Höhen- oder Tiefen-Winkel auch nur bis auf einige Minuten zuverläßig finden, welches mit einem Sextant immer möglich, so reichte dies zur Reduction der schiefen Winkel völlig hin. In den meisten Fällen möchte sogar eine Genauigkeit von $\frac{1}{8}^0 = 7$ bis 8′ in den Vertikalwinkeln zur Reduction der schief-

gemessenen der Absicht und Forderung einer Aufnahme Genüge leisten.

Gewöhnlich sind jene Vertikalwinkel bei etwas beträchtlicher, $\frac{1}{2}$ bis 2 Meilen weiter, Entfernung der anvisirten Richtpunkte nur klein gegen $1^0 — 3^0$; dann differirten die Horizontalwinkel immer nur um ein Weniges von den schiefgeneigten. Dessenungeachtet darf bei keiner Triangulirung, selbst auf ziemlich ebenem Terrain, die erwähnte Reduction vernachläßigt werden, in der falschen Voraussetzung, als ob dieselbe in solchem Falle unbedeutend sey. So viel mir bekannt, ist die Reduction der mit Sextanten gemessenen Winkel bei verschiedenen großen Aufnahmen, z. B. bei der von Lecoq in Westphalen ausgeführten ꝛc. nicht wahrgenommen worden, weil man es hier mit ziemlich ebenen Gegenden zu thun hatte, und daher Mühe sparen zu können meinte. Allerdings ist die Reduction der vielen gemessenen Winkel eine äußerst verdrießliche Arbeit, der man sich jedoch nicht entziehen darf, wenn es auf den Entwurf einer guten Charte von einem ganzen Lande oder einer größern Provinz ankommt. Aus der Vernachläßigung dieser Maßregel lassen sich wohl zum Theil die Fehler erklären, welche man in mehreren sonst gepriesenen, dem Aeußern nach sehr schönen Charten antrifft.

Operirt man mit einem Sextant, so lassen sich mit Zuziehung eines künstlichen Horizonts sehr kleine Vertikalwinkel nicht bequem und sicher genug nehmen. Hier leisten ein Stativ und eine Libelle mit dem Sextant in Verbindung sehr wesentliche fast unentbehrliche Dienste. Auf einem solchen Stativ mit Nuß kann der Sextant hinlänglich genau nicht bloß in die Ebene eines schiefgeneigten Winkels, sondern auch mit Beihülfe eines Bleilothes in die Vertikalebene, worin ein entfernter Richtpunkt liegt, gestellt werden.

In dieser Stellung wird er so weit gedreht, bis die Achse des Fernrohrs horizontal steht, welcher Stand durch eine mit jenem verbundene Libelle angezeigt wird. Die Art dieser Verbindung bedarf nach dem, was vom Theodolit und vom Niveau früher gesagt worden, keiner besondern Erörterung. Der Hauptmann v. Tertor (in dessen Beschr. der trigon. topogr. Vermessung von Ost- und West-Preußen ꝛc. Berlin, 1810.) bemerkt, daß er die horizontale Stellung des Fernrohrs durch eine darauf gesetzte kleine — ich denke, besser sey eine größere — Libelle, deren Füße halbkreisförmig ausgerundet, bewirkt habe. Benzenberg (in dessen Handbuch der angewandten Geometrie ꝛc. Düsseldorf, 1813.) berichtet, daß er eine Libelle mit zwei Ringen brauchte, die er vorne auf das Fernrohr schieben konnte. Meines Erachtens ist eine Vorrichtung, wie am Niveau, noch zweckmäßiger, weil man so die Libelle mit der Achse des Fernrohrs jederzeit berichtigen kann. Ist nun der Sextant in erwähnter Art richtig auf seinem Stativ gestellt, so dreht man die dunklen Gläser hinter dem kleinen Spiegel aufwärts, so daß man durch das unbelegte Glas hindurch nichts sieht; sodann dreht man den Inder so weit fort, bis man das Bild des Objects, dessen Erhöhung oder Vertiefung man messen will, durch doppelte Reflexion des großen und kleinen Spiegels in die Mitte des Sehefeldes bekommt, wobei man entweder nach dem Durchschnittspunkt eines Fadenkreuzes oder nach der Mitte zweier Parallelfäden im Brennpunkt des Fernrohrs hinvisirt. Der Inder zeigt dann das Gradmaß des Höhen- oder Tiefen-Winkels. Daß die Libelle gegen die Achse des Fernrohrs parallel oder überhaupt berichtigt sey, ist hierbei eine Hauptsache. Kleine Fehler der Art kann man finden, indem man einmahl mit der Libelle, ein zweites Mahl mit Hülfe eines genau nivellirten Queckſilber- oder Glas-Horizon-

es irgend einen beträchtlichen Höhenwinkel mißt. Gesetzt, man fände ihn mit einem zuverläßigen Horizont = 17° 13′, mit der am Fernrohr angebrachten Libelle = 17° 11′, so würde man fernerhin zu jedem mit Beihülfe der Libelle gemessenen Höhenwinkel 2′ zusetzen müssen, um sein wahres Maß annähernd zu erlangen. Eine Genauigkeit von 1′ wird, wie gesagt, zum Behuf der Winkelreductionen überall hinreichen. Man begreift, daß sich auf solchem Wege auch die Libelle gegen das Fernrohr dahin rectificiren läßt, daß beim Einspielen der Blase zwischen ihre Zeichen (gewöhnlich in der Mitte der Röhre) jederzeit die Achse des Fernrohrs horizontal stehe u. s. w.

Mißlicher und weniger zuverläßig wird jene Messung mit Sextant und Libelle, wenn man denselben nicht feststellen, sondern nur mit der Hand regieren kann, wie solches z. B. beim Winkelnehmen von engen Thurmöffnungen aus, geschehen muß. Arbeiten hier zwei Beobachter, so richtet der eine den Sextant in seine vertikale Stellung und das Fernrohr, mit beständiger Aufmerksamkeit auf die Libelle, horizontal; der zweite bringt, indem dies geschieht, durch Bewegung des Inder das Bild des entfernten Objects in die Mitte des Sehefeldes u. s. w. Große Genauigkeit darf man sich hiervon nicht versprechen, und wo es sich möglich machen läßt, wird man lieber dem Sextant eine feste Stellung geben, oder wenn die Vertikalwinkel nicht zu klein sind, zugleich einen künstlichen Horizont zur Messung derselben anwenden.

Wird zu einer großen Triangulirung, wie bei der von Delambre und Méchain ausgeführten, ein Bordascher Kreis gebraucht, so erhält man damit nicht bloß die directen Sehewinkel, sondern auch die zur horizontalen Reduction derselben nöthigen Vertikalwinkel, um vieles genauer, als vermittelst eines Sextanten.

Da jedoch der Bordasche Kreis eines festen Standes bedarf, eben so, wie der in der dritten Abth. beschriebene Repetitionstheodolit, dieser letztere aber seiner Construction nach alle terrestrische Winkel unmittelbar ohne Rechnung auf den Horizont reducirt verschafft, so verdient dieser sicherlich jenem vorgezogen zu werden, wo es bloß auf Messung horizontaler Winkel ankommt, und ein fester Stand des Instruments nicht entbehrt werden kann. Der Theodolit mit einfacher Repetition, ist er sonst gut gearbeitet, giebt die Winkel gewiß eben so genau, als der Bordasche Kreis mit doppelter Repetition, und erspart zugleich die höchst beschwerliche, weitläufige Nebenmessung von Vertikalwinkeln und Reductions-Kalkul der schiefgemessenen. Daß die französischen Geometer keinen Theodolit, wenigstens zugleich mit ihren schweren Multiplicationskreisen, gebrauchten, rührt wohl von dem Umstand her, daß sie jenen noch nicht in der hohen Vollkommenheit kannten, in der ihn jetzt einige deutsche Künstlerwerkstätten darstellen. Bloß bei Messung von Vertikalwinkeln oder sogenannten Zenithdistanzen zum Behuf astronomisch-geographischer Bestimmungen — der Polhöhen — verdient der Bordasche Kreis den Vorzug vor dem Theodolit nach seiner dermahligen Bauart. Indessen ließe sich auch letzterer sehr leicht dahin abändern, daß er die Vertikalwinkel durch einfache Repetition eben so genau gäbe, wie die Horizontalwinkel, als wobei er nichts zu wünschen übrig läßt.

Für den Fall, wo die Vertikalwinkel sehr klein, nicht über ein paar Grade, sind verschiedene Annäherungsformeln zu einer etwas leichtern Reduction schiefgemessener Winkel ausgedacht worden. Indessen gewähren diese Formeln nicht allein keine beträchtliche Abkürzung des Kalkuls, in Vergleich mit der ältern oben angezeigten, sondern machen auch außer den Lo-

garithmentafeln noch beſondere Hülfstabellen nöthig. Ich würde daher meinen Leſern keinen weſentlichen Dienſt leiſten, wenn ich alle jene Annäherungsformeln, mit der Methode ihrer Entwickelung und Beweis, hier anführen wollte. Eine ſolche iſt die von Delambre in der Base du Système métrique — gegebene, bei der die Höhenwinkel a, b als ſehr klein angenommen werden, ſo daß die Sinus von a und b gleich ihren Bogen, die Cosinus derſelben ſehr nahe dem Sin. tot. $= 1$, und der reducirte Winkel DCE um wenige Sekunden vom ſchiefen Winkel verſchieden, geſetzt werden dürfen. Heißt nehmlich der ſchiefe Winkel c, der von dieſem wenig verſchiedene horizontale $DCE = C$, ſo wird $C = c + x$. Der Ueberſchuß x (in Sekunden ꝛc.) ſoll nach dieſer Näherungsformel berechnet werden:

$$x'' = \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}(a+b) \,.\, \text{tang.} \frac{1}{2} c - \sin.^2 \frac{1}{2}(a-b) \,.\, \cot. \frac{1}{2} c}{\cos. a \,.\, \cos. b \,.\, \sin. 1''}$$

So lautet im Weſentlichen die Formel von Delambre. Setzt man für die Sinus ihre Bogen, ſo iſt die von Legendre aufgeſtellte Formel:

$$x = \frac{1}{4}(a+b)^2 \,.\, \text{tang.} \frac{1}{2} c - \frac{1}{4}(a-b)^2 \,.\, \cot. \frac{1}{2} c.$$

Die in Minuten oder Sekunden gegebenen Größen a, b werden hier als Bogenlängen in Beziehung auf den Sin. tot. $= 1$ gebraucht ꝛc.

Dies mag hinreichen, dem Leſer zu zeigen, wie viel Zeit und Mühe der Berechnung durch den angeführten Kunſtgriff etwa etſpart werde. Nähere Belehrung darüber muß man in Delambre's Werk: Base du système métr. Vol. I., nachſehen. Großentheils daraus zuſammengetragen findet man dieſen und andere Gegenſtände der höhern Erdmeſſung auch in Puiſſant's zwei Werken: Traité de Géodésie und

Traité de Topographie, Paris 1805, 1807. *).

Eigene Tafeln, nach denen man die Reduction der schiefen Winkel auf die horizontalen ohne weitläufige Rechnung finden könnte, sind bis jetzt nicht vorhanden. Solche Tafeln für Höhenwinkel bis 10° beabsichtigte früher Benzenberg in Druck zu geben, die Sache ist aber unterblieben. Allerdings würde es, wie Benzenberg in s. Handb. der angew. Geom. bemerkt, ein verdienstliches Unternehmen seyn, wenn ein tüchtiger Rechner dergleichen Reductionstafeln anfertigen, und dem Publikum überliefern wollte. Bis dahin wird die Reduction der Winkel auf den Horizont immer ein sehr mühsames Geschäft bleiben, man mag nach einer oder der andern Formel rechnen.

§. 102.

Reduction der gemessenen Winkel (Fig. 64) auf das Centrum der Station.

Bei größern und kleinern Triangulirungen treten oft Hindernisse ein, einen Winkel BCA (Fig. 64.) von seinem wahren Scheitelpunkt C aus zu nehmen; man sieht sich dann genöthigt, nahe bei C von einem andern

---

*) Beide Werke von Puissant sind sehr zerstreut und planlos — die Stoffe laufen bunt durch einander — geschrieben, enthalten vieles ganz entbehrliche gekünstelte, versäumen dagegen oft die wichtigsten Sätze der practischen Meßkunde; daher man sie als systematische Lehrbücher der angewandten Geodäsie nicht betrachten und benutzen kann. Bloß zum Nachschlagen über einzelne gründlich behandelte Artikel können sie zum Theil dem practischen Geometer nützlich werden.

Standpunkt D aus gegen A und B zu visiren und hier den Winkel A D B zu messen.

Es wird verlangt, den Winkel A D B auf das Maß des wahren, zur Messung erforderlichen, Winkels A C B zu reduciren. Diese Aufgabe heißt allgemein das Centriren der Winkel.

Eine Auflösung derselben besteht darin:
Man messe, wenns möglich, die kleine Distanz C D = b, und außer dem W. n den W. r. Die Weite C A nach dem rechtshin liegenden Objecte heiße R, die zweite C B heiße L.

Nun ist nach einem Satz der Elementargeometrie.

$$\angle o = n + x = m + y, \text{ also}$$

$$\angle m = n + x - y.$$

Ferner ist $R : b = \sin.(n+r) : \sin. x$, also

$$\text{Sin. } x = \frac{b \,.\, \sin.(n+r)}{R}$$

Eben so $L : b = \sin. r : \sin. y$, also

$$\text{Sin. } y = \frac{b \,.\, \sin. r}{L}$$

Wenn, wie gewöhnlich, die Entfernungen der Punkte A und B in Verhältniß gegen die Größe C D = b sehr groß sind, so werden die parallactischen Winkel x, y sehr klein; folglich kann man statt ihrer Sinus ohne bedeutenden Fehler ihrer Bogen annehmen.

Dann wird der reducirte Winkel A C B

$$\text{oder } m = n + \frac{b \,.\, \sin.(n+r)}{R} - \frac{b \,.\, \sin. r}{L}$$

Der Sinus (n + r) und der Sin. r haben in Beziehung auf den Sin. tot. = 1 eine gewisse Größe; wäre z. B. $r = 87^0\ 13'$, so hätte man Sin. r =

0,9988203. Da nach den Ausdrücken in unsrer Gleichung $\frac{b \,.\, \sin.\,(n+r)}{R}$ und $\frac{b \,.\, \sin\, r}{L}$ nicht Sinusgrößen, sondern Winkel verlangt werden, so bedürfen sie folgende Umgestaltung: Würden die Winkel bis auf Sekunden verlangt, so müßten in Beziehung auf den Sin. tot. = 1 oder = 10000 Mill. die Größen Sin. (n + r) und Sin. r durch die bekannte Größe Sin. 1″ dividirt werden, um zu erfahren, wie viel Sekunden die bekannte Größe Sin. (n + r), also auch $\frac{b \,.\, \sin.\,(n+r)}{R}$ enthält u. s. w.

Folglich erhielte, wenn man die Correction des Winkels n bis auf Sekunden verlangte, obige Gleichung diese Gestalt:

$$m = n + \left\{\frac{b \,.\, \sin.\,(n+r)}{R \,.\, \sin.\,1''}\right\}'' - \left\{\frac{b \,.\, \sin.\,r}{L \,.\, \sin.\,1''}\right\}''$$

Sollte hingegen die Correction bloß bis auf einzelne Minuten gehen, so wäre aus gleichem Grunde:

$$m = n + \left\{\frac{b \,.\, \sin.\,(n+r)}{R \,.\, \sin.\,1'}\right\}' - \left\{\frac{b \,.\, \sin.\,r}{L \,.\, \sin.\,1'}\right\}'$$

Die Reductionsformel hat allgemeine Gültigkeit, erleidet aber nach Beschaffenheit der Größen R, L, r und n + r verschiedene Modificationen.

Wenn der Winkel (n + r) größer als 180°, so wird das erste Correctionsglied $\left\{\frac{b \,.\, \sin.\,(n+r)}{R \,.\, \sin.\,1''}\right\}''$ negativ, da alle Sinus der Winkel von 180° — 360° negativ sind.

Wäre r größer als 180°, so würde das zweite Correctionsglied $\left\{\frac{b \,.\, \sin.\,r}{L \,.\, \sin.\,1''}\right\}''$ positiv und das erste negativ, indem zugleich n + r größer als 180°.

Ist eine von den Weiten, R, B, sehr groß, gleichsam unendlich groß verglichen gegen $CD = b$, so verschwindet ohne merklichen Fehler ein Correctionsglied in der gegebenen Formel. Ist R sehr groß gegen b, so wird:

$$\left\{\frac{b \,.\, \sin.\,(n+r)}{R \,.\, \sin.\,1''}\right\}''$$ sehr nahe $= 0''$, um so näher, je größer R wird, weil somit der Coefficient $\frac{b}{R}$ in eine immer kleinere Bruchgröße übergeht; also kann man für diesen Fall setzen:

$$m = n - \left\{\frac{b \,.\, \sin.\, r}{L \,.\, \sin.\,1''}\right\}''$$

Wenn bloß L sehr groß gegen b, so erhält man aus demselben Grunde:

$$m = n + \left\{\frac{b \,.\, \sin.\,(n+r)}{R \,.\, \sin.\,1''}\right\}''$$

Wofern aber beide Weiten R und L sehr groß (unendlich groß) in Vergleich gegen b, so kann man offenbar beide Correctionsglieder $= 0$ setzen, und es wird:

$m = n$, nehmlich der im wahren Scheitelpunkt C und der außerhalb desselben in D gegen A und B hin genommene Winkel weichen um keine bestimmbare Größe mehr von einander ab. Es ist in diesem Fall gleichgültig, ob man den Sehewinkel gegen die sehr weit entfernten Objecte A, B in C oder in D mißt. Dies erhellt schon geometrisch daraus, daß die parallactischen Winkel x und y bei jener Annahme gleichsam unendlich klein werden, oder verschwinden. Demnach geht die Formel:

$m = n + x - y$, in diese über:

$m = n$.

Ein solcher Fall tritt beim Visiren und Winkelmessen gegen zwei Himmelskörper (Sterne) ein, wenn auch die Standorte der Beobachtung auf der Erde C und D in einer sehr beträchtlichen Entfernung von einander liegen.

Auch bei endlichen Entfernungen verschwinden die Correctionsglieder, oder es wird $m = n$, wenn $x = y$. Dies geschieht immer, wenn der excentrische Standpunkt D in die Peripherie des um ABC beschriebenen Kreises fällt, indem dann m und n als Peripheriewinkel auf gleichem Bogen gleich sind.

Die Correctionsglieder obiger Formel lassen sich einzeln ganz bequem logarithmisch nach den Tafeln, wie gewöhnlich, berechnen, z. B. $\left\{\frac{b \,.\, \sin.(n+r)}{R \,.\, \sin.1''}\right\}'' = z''$

also:

$$\log. z'' = \log. b + \log. \sin.(n+r) - \log. R - \log. \sin. 1''$$

Die dem Aggregat dieser Logarithmen entsprechende Zahl giebt die Anzahl von z'' u. s. w. Bei solcher Berechnung aber müßte man zugleich die Weiten R, L kennen. Sie sind entweder nach einer anderweitigen Aufnahme, oder nach einer Charte, oder aber nach dem Augenmaß annähernd, bekannt; die Methode, solche durch eine geometrische Construction auf Papier ꝛc. ungefähr zu bestimmen, verdient als zu wenig genau keiner Erwähnung. Annäherung reicht hier aus, da R und L bei einer größern Triangulirung insgemein gegen 1 Meile von C entfernt sind, und einige 100 Schritte mehr oder weniger dafür genommen keinen bemerklichen Fehler in den centrirten Winkel m bringen.

Daß der excentrische Standpunkt des Winkelmessers, D, verschiedene Lagen gegen C haben könne, springt in die Augen. Diese Verschiedenheit der gegenseitigen Lagen von C und D bestimmt und modificirt eben die

Correctionsglieder der gegebenen Formel. Wir wollen außer dem in Fig. 64. angedeuteten Fall, für welchen D links oder rechts von C liegen kann, noch folgende Betrachtung ziehen.

Wenn (Fig. 65.) D im Alignement zwischen C und A liegt: so wird:

$$m = n - y = n - \frac{b \cdot \sin. r}{L} \text{ oder } = n - \frac{b \cdot \sin. n}{L}$$

in obiger Formel verschwindet das erste Correctionsglied, da $n + r = 180^0$, also $\sin.(n+r) = 0$ wird.

Liegt D (Fig. 66.) innerhalb der Schenkel des Winkels m, so wird:

$m = n - x - y$, oder nach der obigen Formel:

$$m = n - \frac{b \cdot \sin.(n+r)}{R} - \frac{b \cdot \sin. r}{L},$$

da $n + r$ größer als 180^0, folglich $\sin.(n+r)$ negativ wird.

Liegt umgekehrt C innerhalb der Schenkel des excentrischen Winkels n, (Fig. 67.), so erhält man:

$m = n + x + y$ oder

$$m = n + \frac{b \cdot \sin.(n-r)}{R} + \frac{b \cdot \sin. r}{L}.$$

Der noch mögliche Fall, wo D in die rückwärts gehende Verlängerung von CA oder CB fällt, bleibe der Betrachtung des Lesers überlassen. Man darf sich nur bei jeder Centrirung eine den Umständen correspondirende Figur zeichnen, um die Correctionsglieder richtig anzusetzen und zu berechnen.

Zur Bestimmung der Winkel x und y, die zur Reduction des Winkels n in den gesuchten m entbehr-

lich, kann man nach Befinden der Umstände bisweilen auch folgende Methoden gebrauchen:

a) Um den Winkel x (Fig. 68.) zu erhalten, wähle man in CA einen schicklichen Punkt G, messe die Winkel AGD und ADG, so giebt ihre Summe von 180° abgezogen den Winkel x; eben so läßt sich y finden. Dies Verfahren wird sich nur selten anwenden lassen.

b) Man bestimme und messe (Fig. 65.) eine auf BC senkrechte Linie Cd, so daß d in der Verlängerung von BD liegt; ist nun zugleich CB annähernd bekannt, so läßt sich daraus y berechnen, nehmlich es ist:

$$CB : Cd = \text{sin. tot.} : \text{tang. } y \text{ u. s. w.}$$

Da CB gewöhnlich nicht genau genug bekannt, so wird auch y auf diesem Wege nur ungefähr gefunden. Weil aber CB insgemein sehr groß in Vergleich gegen die Perpendikulare Cd ist, so hat ein nicht allzubeträchtlicher Fehler in der Länge CB auf die Berechnung des an sich sehr kleinen Winkels y, meistens nicht über 1′ groß, einen nur sehr geringen Einfluß. Wir wollen uns dies durch ein Beispiel der Art, wie sie gewöhnlich vorkommen, erläutern.

Gesetzt CB wäre wirklich 23000 Fuß lang, die Senkrechte Cd = 3 Fuß; CB würde aber nach einer ungefähren Schätzung zu 23400 F., also um 400 F. zu lang in Rechnung gebracht, so wäre fälschlich:

$$23400' : 3' = \text{sin. tot.} : \text{tang. } y.$$

$$\log. 3 + \log. \text{sin. t.} = 10{,}4771213$$

$$- \log. 23400 = 4{,}3692159$$

$$\log. \text{tang. } y = 6{,}1079054$$

$$\text{also } \angle y = 26{,}5 \text{ Sek.}$$

Würde die wahre Länge 23000 in Rechnung ge-
tzt, so wäre richtiger:

log. tang y = 6,1153935, folglich der wahre
∠y = 26,9 Sek.

Folglich hätte man nach der falschen Voraussetzung
n Winkel y um $\frac{4}{10}$'' zu klein bekommen, ein Fehler,
r auch bei größern geodätischen Arbeiten selten in Be-
achtung kommt. Mißt man die Winkel mit einem
extant, und ist der Richtungswinkel r, wie in Fig.
5, 66, sehr stumpf, so läßt sich solcher schwerlich oder
ar nicht damit nehmen. Dann ist die Berechnung der
arallactischen Winkel x, y durch Perpendikularen der
sterwähnten Methode vorzuziehen.

Zu einigen andern practischen Nebenbemerkungen
ber das Centiren der Winkel werden wir in der sechs-
n Abth. dieses Werkes Veranlassung finden. Aus dem
isher Gesagten wird sich nun leicht beurtheilen lassen,
ie gering, bei etwas beträchtlichen Entfernungen der
nvisirten Richtpunkte, die Fehler in den auf dem Meß-
sch construirten Winkeln werden, wenn man in der
Orientirung desselben bei aller Vorsicht dennoch kleine
ehler begehen sollte; siehe § 99. — Ebenfalls läßt sich
ieraus die sogenannte Parallaxe des Spiegel-
extanten und der daher in den gemessenen Winkeln
ntstehende sehr unbedeutende Fehler ermessen. Diese
Parallaxe des Sextanten entsteht daher, daß der Um-
rehungspunkt H des großen Inderspiegels AB (Fig.
40.) von der directen Visirlinie LI durch die Mitte
des kleinen um eine gewisse Länge, nehmlich um das
Perpendikel HN absteht. Da nun das Auge des Be-
obachters nicht in der Direction HI, sondern LI gegen
das entfernte Object I linker Hand visirt, so wird auch
der gemessene Winkel ILF seyn. Wird nun der Win-
kel IHF vom Mittelpunkt des Instruments aus ver-
langt, so ist dieser, wenn nehmlich F rechts von I ab-

liegt, jederzeit = ILF + I. Je größer die Entfernung LI oder NI, — auf die Entfernung von F kommt hier nichts an, — desto kleiner wird der parallactische Winkel I, desto annähernder W. ILF = IHF. Ist der Abstand HN bekannt, so läßt sich der parallactische Fehler des Sextanten für kleinere oder größere Weiten NI wie oben bestimmen. An den meisten Sextanten beträgt HN ungefähr 2 Duod. Zoll. Daher wird I sich leicht so bestimmen lassen, wenn allgemein NI = m Fuß = 12 m Zoll,

12 m : 2 oder 6 m : 1 = sin. tot. : tang. I u. s. w.

log. tang. I = 10 — log. 6 m

Wäre I nur um 100 F. vom Standort der Beobachtung entfernt, so wäre log. tang. I = 7,2218487, also I = 5 Min. 44 Sek. Betrüge diese Entfernung 1000 F., so wäre I = 34,4 Sek. Die Fehler der Parallaxe nehmen also sehr rasch ab, indem die Entfernung von I zunimmt. Es läßt sich durch die vorstehende Formel ohne Mühe ein Täfelchen über die Parallaxe des Sextanten für verschiedene Distanzen des Richtpunktes I anfertigen. Ein solches giebt auch D. Benzenberg in s. Handb. d. Geom. S. 384. für verschiedene Entfernungen zwischen 500 Fuß und 34000 Fuß. Hier möge es an einer ganz kurzen Tafel der Art genügen:

Entfernung N I.	Parallactiſcher Winkel l.
100 Fuß	5′ 44″
500 —	68″
1000 —	34″
1500 —	23″ sehr nahe
2000 —	17″
3000 —	12″
4000 —	9″
5000 —	7″
6000 —	6″
7000 —	5″
8000 —	4″
9000 bis 10000 Fuß	3″
12000 — 18000 —	2″
20000 (1 Meile)	1,7″
30000 (1½ M.)	1″.
40000	weniger als 1″ ($\frac{8}{10}$ bis $\frac{9}{10}$)

Hieraus ergiebt ſich, daß der parallactiſche Fehler des Sextanten für Entfernungen von mehreren tauſend Fuß, etwa $\frac{1}{2}$ bis 1 Meile, nicht mehr beachtet zu werden braucht, und daß er folglich bei einer größern Triangulirung, wo die Dreiecksſeiten 1 bis 3 Meilen lang, ganz außer Acht gelaſſen werden darf, noch vielmehr bei Meſſungen am Himmel. Die meiſten geodätiſchen Schriftſteller, ſelbſt der gründliche Bohnenberger, haben von der Parallaxe des Sextanten wohl nur um ihrer Geringfügigkeit willen nicht beſonders gehandelt.

§. 103.

Indirecte Diſtanzenmeſſung durch Kette und Stäbe. (Fig. 69.)

Nennt man eine Diſtanzmeſſung, unmittelbar nehmlich geradezu mit der Kette oder mit Maßſtäben

u. ſ. w. nach vorhergegangener Abſteckung ausgeführt, eine directe, ſo mag dagegen eine andere, welche beſonderer Hülfs- oder Seiten-Meſſungen bedarf, eine indirecte heißen.

Die einfachſte, nur bei kleinen Operationen brauchbare, Meſſung der Art geſchieht durch Kette (oder Meßſchnur oder Schritte) und Abſteckſtäbe. Da dieſer Gegenſtand ſeinen Grund in den einfachſten Sätzen der Elementargeometrie findet, ſo wollen wir ihn gegen die gewöhnliche Methode nur mit wenig Worten berühren.

Es kommen folgende Fälle dieſer ſimplen Meſſungsart vor:

1) A B (Fig. 69.) kann wegen eines Zwiſchenhinderniſſes, z. B. eines Moraſtes, Teiches, Waldes ꝛc. geradezu nicht gemeſſen werden; jedoch kann man ſeitwärts einen Standort C finden, von wo aus man gegen A und B hin viſiren und meſſen kann. Um die Weite A B zu beſtimmen, kann man im Felde C A und C B (gemeßne Weiten) rückwärts verlängern, ſo daß $CA' = CA$ und $CB' = CB$ wird, und ſodann $A'B' = AB$ direct meſſen; oder man kann in der Direction der gemeſſenen C A, C B gleichproportionirte Stücke derſelben, z. B. $Ca = \frac{1}{3}CA$ und $Cb = \frac{1}{3}CB$ abtragen, und ſodann a b meſſen, woraus ſich $AB = 3 . ab$ ergiebt; oder aber, man kann die proportionirten Stücke rückwärts abtragen, nehmlich $Ca' = \frac{1}{3}CA$, $Cb' = \frac{1}{3}CB$, ſodann a′ b′ meſſen, woraus $AB = 3 . a'b'$ folgt.

2) Von der Diſtanz A B (Fig. 70.) mißt man directe nur ein Stück A E, ferner vom Standpunkt C aus die geraden C A, C E, von A C ein beliebiges Stück A D und von E C ein Stück E F, ſo weit, daß F im Alignement von D B liegt; E F wird durch Viſiren und eine Signalſtange be-

grenzt. Die gesuchte Weite AB heiße x, die gemessenen Längen seyen CA = e′ (Fuß oder Ruthen), AE = c′, CE = a′, AD = m′, EF = n′.

Die unbekannte Größe x wird aus den gemessenen also hergeleitet oder zusammengesetzt:

Man gedenke sich FG ∥ CA. Es ist

$$\frac{CE}{EF} = \frac{AE}{EG} = \frac{AC}{FG}, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{n} = \frac{c}{EG} = \frac{c}{FG};$$

ferner $\frac{AB}{AD} = \frac{BG}{FG}$, oder

$$\frac{x}{m} = \frac{BG}{FG}.$$

Hieraus folgt: 1) $EG = \frac{cn}{a}$,

2) $FG = \frac{en}{a}$,

3) $BG = \frac{FG \cdot x}{m} = \frac{enx}{am}$.

Auch ist $BG = x - (c - EG) = x - c + \frac{cn}{a}$.

Demnach wird $\frac{enx}{am} = x - c + \frac{cn}{a}$, also

$(en - am)\, x = cmn - amc$, daher endlich

$$x = \frac{cm\,(n - a)}{en - am}.$$

Die Berechnung der Weite $AB = x$ nach den numerischen Werthen der gemessenen Längen a, c, e, m, n, hat keine Schwierigkeit. Je richtiger diese gemessen worden, desto genauer findet man AB. Diese Aufgabe, welche, so weit mir bekannt, in unsern Lehrbüchern nicht vorkommt, kann in gewissen Fällen wirklich practischen Werth haben, und ist kein bloß theoretisches Kunststück.

3) Man kann (Fig. 71.) in der Verlängerung von AB einen Punkt M durch eine Signalstange (Stab) bezeichnen, und vom Standort C nach B und M hin messen. Die gemessenen Weiten trage man durch Abstecken und Messen rückwärts ab, nehmlich $Cb = CB$, $Cm = CM$, gehe hierauf in der Direction mb so weit fort, bis man bei a in das Alignement von AC kommt, und messe ab, so ist, wie leicht zu beweisen, $ab = AB$. Trägt man nur proportionirte Stücke von CB und CM rückwärts, z. B. $Cb' = \frac{1}{3} CB$ ꝛc., so erhält man $3 . a'b' = AB$.

4) Man kann (Fig. 71.) BM in der Verlängerung von AB messen, darauf eine unbestimmte lange Perpendikulare $M\mu$, und auf diese die Perpendikulare $\mu\alpha$ so weit abstecken, daß die Visirlinie $A\alpha$ senkrecht auf $\alpha\mu$. Es wird die gemessene $\alpha\mu - BM = AB$. Eine in vielen Fällen recht brauchbare Methode.

5) Die Weite AB (Fig. 72.) ist ganz unzugängig. man kann sich in ihrem Alignement, z. B. in D aufstellen, darauf eine Perpendikulare DC von beliebiger Länge abstecken, auf diese ferner in d eine unbestimmt lange Perpendikulare, in dieser durch Signale die Punkte b, a in den Alignements CB, CA bezeichnen, welches durch zwei Personen geschieht, von denen eine aus C gegen

A und B visirt, die zweite von d gegen b und a hin fortgeht u. s. w. Aus den gemessenen Längen DC, dC und ab läßt sich AB berechnen, nehmlich es ist

$$CD : Cd = BC : bC = AB : ab, \text{ mithin}$$

$$AB = \frac{CD \cdot ab}{Cd}.$$

6) Die Weite AB ist an sich und auch in ihrer Verlängerung unzugängig. Zur Bestimmung derselben lassen sich verschiedene Seitenmessungen gedenken; sie sind aber insgesammt sehr zusammengesetzt, groben Irrthümern ausgesetzt und daher für die Praxis von wenig oder gar keinem Werth. Bloß des Beispiels halber will ich hier eine derselben mittheilen. Es sey (Fig. 73.) AB die zu bestimmende Weite. Man wähle einen schicklichen Standort C, von wo aus man nach A und B visiren kann, in den Alignements von AC, BC stecke man auf beliebige Distanzen in D und E Signalstangen aus, so daß ED verhältnißmäßig groß genug gegen AB wird; in DB bezeichne man einen andern Punkt F, und in EA einen Punkt G, welcher zugleich im Alignement von FC liegt. Man messe die Weiten EG, GC, CF, FD, DE, EC, DC, construire sodann auf Papier eine kleine der Figur GFDCE ähnliche Figur, indem man die gemessenen Weiten nach einem verjüngten Maßstab aufträgt, ziehe endlich EG, DC und DF, EC rückwärts, um die Durchschnittspunkte A und B auf dem Papier zu erhalten. Die Weite AB auf dem Papier giebt nach dem verjüngten Maßstab die AB im Felde. Der Beweis dafür ist elementarisch. Es giebt sehr viel zu messen und zugleich Gele-

genheit zu beträchtlichen Fehlern in der verjüngten Construction der Figur. Daher wird es immer gerathener seyn, eine solche Aufgabe mit Hülfe des Meßtisches aufzulösen. Andere gekünstelte Methoden für diesen Fall übergehe ich, als noch unbrauchbarere.

7) Wir wollen hier noch folgende wirklich brauchbare, mit Kette und Stäben auflösbare Aufgabe betrachten. Es sollen die Entfernungen zweier Oerter A, B (Fig. 74.) von einem dritten C, der mit jenen ein gutes Dreieck bildet, bestimmt werden. Man messe die Weite AB, nehme in AC ein beliebiges Stück AD, stecke durch D eine Parallele mn zu AB ab, bezeichne in mn durch die bekannten Mittel den Punkt E so, daß er in der Direction BC liege, die gemeßne Länge ED stecke und messe man von B nach A hin ab, nehmlich BF = ED. Auf solche Art wird DF ∥ CB, folglich $\triangle ADF \sim \triangle ACB$; daher

$$AF : AD = AB : AC$$

$$AC = \frac{AB \cdot AD}{AF}$$

$$AF : DF = AB : BC$$

$$BC = \frac{AB \cdot DF}{AF}$$

Je genauer nun die Absteckung und Messung der Längen AB, AD, AF, DF geschehen, desto annähernder erlangt man die gesuchten Weiten AC und BC. In Ermangelung anderer Hülfsmittel, zur ungefähren Bestimmung und Vergleichung zweier Weiten läßt sich diese Auflösung in der niedern Meßkunst gewiß oft anwenden.

Bei jeder Messung mit Kette und Stäben wird

übrigens das Terrain als eben oder doch nahe eben vorausgesetzt; auf sehr unebenem ist sie nicht zu gebrauchen. Selbst auf ganz ebenem kann sie nur zu kleinen Aufnahmen (flüchtigen ökonomischen oder militärischen) dienen, und muß überall verworfen werden, wo bessere Hülfsmittel, sey es auch nur ein kleiner einfacher Meßtisch (planchette), zu Gebote stehen.

Indirecte Distanzenmessung und Aufnahmen mit Hülfe des Meßtisches und der Orientirbousſole.

§. 104.

Alle Messungen und Aufnahmen mit dem Meßtisch beruhen zunächst auf einer geometrischen Construction terrestrischer Winkel, auf den Horizont eines bestimmten Punktes (Ortes) reducirt, so wie, dem zufolge, auf einer verjüngten, horizontal projicirten, bildlichen Darstellung der Abstände und gegenseitigen Lagen zweier oder mehrerer Punkte (Oerter) auf der Erde. Hier findet Alles seinen Grund, sein Maß und seinen Beweis in den einfachsten Sätzen der Elementargeometrie, nehmlich in der Aehnlichkeit und Proportionalität großer terrestrischer und kleiner auf Papier verzeichneter Dreiecke, deren Winkelspitzen Oerter auf der Erde und deren Seiten die Abstände derselben in einem verjüngten leicht zu übersehenden Grundriß vorstellen. So kann man durch fortgesetztes Operiren mit dem Meßtisch, durch Aneinanderkettung mehrerer kleinen Dreiecke (Dreiecksnetz) auf dem Papier, den horizontal projicirten Dreiecken im Felde ähnlich, nach und nach ein mehr oder weniger vollkommenes geometrisches Bild von einer beträchtlichen Strecke Landes — einer oder eini-

ger Quadratmeilen — erlangen. Je genauer, beſonders in Hinſicht der Winkel, die kleinen Dreiecke conſtruirt werden, deſto vollkommener ſtellen ſie die Entfernungen und gegenſeitigen Lagen der natürlichen oder künſtlichen Richtpunkte dar; je mehrere Objecte eines Terrains man mit dem Meßtiſch aufnimmt, deſto vollſtändiger wird das geometriſche Bild davon. Wir ſagen, geometriſches Bild, ſollten es aber eigentlich eine geometriſche Skizze heißen, weil es nur Linien und Punkte enthält, und ein lebendigeres, getreueres Bild eines Terrains, wie es ſich dem Auge von einer gewiſſen Höhe betrachtet, darſtellen würde, erſt dadurch bewirkt wird, daß nebſt der richtigen Lage der ausgezeichneten fixen Punkte zugleich die Eigenheiten des zwiſchenliegenden Terrains, insbeſondere die Unebenheiten, das Steigen und Fallen deſſelben, auf dem Papier (Plan) mit einer Zeichenſprache angedeutet ſind, die der Natur der Sache möglichſt nahe kommt. Zur Aufſtellung eines ſolchen topographiſchen Gemählde's (Situationsplan) giebt daher die geometriſche Conſtruction der Hauptpunkte wohl die unentbehrliche weſentliche Grundlage, allein zur Ausfüllung und Belebung des Skeletts bedarf es noch eines andern Hülfsmittels, nehmlich der Situationszeichnung, welche ſich in den neuern Zeiten, beſonders in Deutſchland durch die auf wiſſenſchaftliche Grundſätze gebaute geniale Kunſtleitung des ſächſ. Majors Lehmann, zu einem hohen Grad von Vollkommenheit erhoben hat. Wir wollen die Grundzüge dieſer neuern Situationszeichnung, in ſo weit ſie mit der Land- und Erdmeſſung in einiger Verbindung ſteht, und von dieſer als einer mathematiſchen Scienz Belehrung und Geſetze annimmt, in der 5ten Abth. dieſes Werkes näher kennen lernen.

Jede Aufnahme mit dem Meßtiſch ergiebt und erklärt ſich aus der einfachern Aufgabe, auf dem Papier

ein kleines Dreieck zu construiren, welches nach irgend einem verjüngten Maßstab der Seitenlängen einem größern Dreieck im Felde ähnlich ist. Man erlangt dies entweder dadurch, daß man von einem einzigen Standpunkt aus den Sehewinkel gegen zwei entfernte Richtobjecte und die zwei horizontalen Weiten (Seiten), die diesen Winkel einschließen, nach einem verjüngten Maßstab auf dem Meßtisch entwirft; oder aber dadurch, daß man aus zwei Standpunkten einer, gewöhnlich in Längenmaß gegebenen, Standlinie gegen ein entferntes Richtobject visirt, und die horizontalen Visirlinien so weit auszieht, daß sie einander in einem Punkte schneiden, der die Lage des dritten Richtobjects gegen die Standlinie bezeichnet; im letztern Falle ist daher nur eine Längenmessung, aber die Construction zweier Sehewinkel nöthig. Die zweite Construction erfordert weniger Zeit und Mühe, giebt größere Genauigkeit, und kommt viel häufiger in Anwendung als die erste. Jedoch bedarf die geometrische Construction die Sehewinkel aus zwei Standpunkten die größte Vorsicht, wenn man den Durchschnittspunkt ihrer Schenkel zuverläßig genug erhalten will. Man erlangt um so größere Genauigkeit, je schicklicher das Verhältniß der Standlinie gegen die beiden andern Seiten des Dreiecks im Felde ist, nehmlich, je näher dies Dreieck einem gleichseitigen kommt. Ist die Standlinie sehr klein gegen die Entfernungen der Richtobjecte, so schneiden die Visirlinien (zwei andern Seiten des Dreiecks) einander unter einem sehr spitzen Winkel, woraus unvermeidliche Irrungen und Fehler in der Lage des Durchschnittspunktes erwachsen. Derselbe wird nehmlich immer etwas unsicher und zweifelhaft, wenn der Winkel an ihm sehr spitz, unter 20^0, oder sehr stumpf, 120^0 oder darüber ist. Wo es sich daher möglich machen läßt, wählt man nach dem Augenmaß die Standlinie so, daß sie

mit einem oder mehreren entfernten Richtobjecten gute Dreiecke, nahe gleichseitige, bildet. Oft gebietet indessen die Nothwendigkeit beträchtliche Abweichungen von dieser Regel; dann ist aber auch um so größere Vorsicht in der geometrischen Construction der Winkel nöthig. Welche Fehler in den Seiten der Dreiecke aus den Fehlern in den Winkeln entspringen, wollen wir weiterhin näher erörtern. Die Standlinie oder Basis einer Meßtischaufnahme wählt man übrigens gern auf einem nahe ebenen horizontalen Boden, weil dann der horizontale Abstand ihrer Endpunkte leichter zu messen ist. Das Ziehen der Visirlinien aus ihren zwei Endpunkten, oder auch aus drei in ihr zur Prüfung der Arbeit angenommenen Standpunkten (Stationen) nach einem oder mehreren entfernten Richtobjecten wird der dadurch erlangten Durchschnittspunkte wegen allgemein das Einschneiden mit dem Meßtisch genannt. Außer dem sehr bekannten Vorwärtseinschneiden (man erlaube mir diesen Ausdruck der Unterscheidung halber), bei welchem jeder Durchschnittspunkt in die zugehörige Visirlinie selbst fällt, nehmlich zwischen einem bestimmten Punkt a auf dem Meßtisch und den gleichnamigen A auf dem Felde, giebt es noch eine andre Art, Durchschnittspunkte auf dem Meßtisch und darnach Entfernungen, Lagen der Punkte auf der Erde zu bekommen, nehmlich das Rückwärtseinschneiden. Hier tritt der Durchschnittspunkt nicht in die Visirlinie aA, sondern in deren Verlängerung hinter a auf dem Meßtisch. Diese letztere Methode des Rückwärtseinschneidens (Intersection en arrière) wird ein ganz vortreffliches brauchbares Hülfsmittel, sowohl die Lage eines oder mehrerer Punkte auf der Erde gegen eine der Lage und Größe nach bereits bekannte Grundlinie zu finden, ohne daß man den Meßtisch in dieselbe bringt, als auch, die Lage eines vierten Punktes gegen drei oder

hrere Punkte bereits geometrisch bestimmter Dreiecke jenem Ort selbst, also aus einem einzigen Standnkte, zu erhalten. Auf solche Weise lassen sich an schon aufgenommenes Dreiecknetz mehrere andere in r außer denselben liegende Punkte, die von den ationen der Hauptdreiecke nicht durch Vorwärtseinneiden aufgenommen wurden, oder nicht aufgenomn werden konnten, sehr bequem und sicher anknüpfen. es bisher Gesagte soll nun durch folgende, in ihrer fachsten Gestalt behandelte, Aufgabe deutlich gemacht rden.

§. 105.

Aufgabe. (Fig. 75.)

Es werde der horizontale Abstand zweier Punkte B auf der Erde indirecte mittelst des Meßtisches bemmt; man kann von einem Standort C außerhalb B gegen A und B hin visiren und messen.

Auflösung: Ueber dem schicklich ausgewählten tandort C stellt man den Meßtisch horizontal auf, d bestimmt auf ihm einen Punkt c senkrecht über m gleichnamigen Punkt C auf dem Boden. Von c het man die Visirlinien gegen A und B, wodurch r Horizontalwinkel $ACB = acb$ auf dem Meßschblatt construirt wird. Sodann mißt man mit Stän oder Meßkette oder weniger genau durch Schritte e horizontalen Weiten CA, CB und trägt solche ch irgend einem verjüngten Maßstab auf den Meßsch als ca, cb, so giebt die Länge ab nach demseln verjüngten Maßstab die Weite AB an, da nach r Elementargeometrie $\triangle cab \sim \triangle CAB$ ist. Es uchtet ein, daß diese Bestimmung um so richtiger ausllen muß, je zuverläßiger der Winkel bei c construirt,

und die Weiten CA, CB gemessen worden. Es versteht sich übrigens von selbst, daß die horizontalen Weiten CA und CB, wenn sie beträchtlich lang sind, und Genauigkeit der Arbeit begehrt wird, vor der Ausmessung erst abgesteckt werden müssen.

Aus dieser einfachen Aufgabe erklärt sich zugleich folgende zusammengesetztere, die mir gleich hier in Verbindung mit jener vortragen, um eine besondre Verhandlung darüber weiterhin entbehrlich zu machen.

Es soll nehmlich eine geradlinigte, durch natürliche oder künstliche Richtobjecte bezeichnete, Figur im Felde ABDEF von einem Standpunkt C innerhalb derselben mit dem Meßtisch aufgenommen, oder ein ähnliches verjüngtes Bild davon auf dem Papier des Tisches entworfen werden. Der Standort C wird ungefähr in der Mitte der Figur gewählt, der Meßtisch über demselben so aufgestellt, daß c senkrecht über C nahe in die Mitte des Tischblattes fällt. Man zieht von c nach den Winkelspitzen A, B, D, E, F Visirlinien, mißt die Weiten CA, CB, CD, CE, CF, und trägt dieselben nach einem verjüngten Maßstab auf dem Meßtisch an den gezogenen Visirlinien gehörig ab, als ca, cb, cd, ce, cf. Sodann ziehet man die geraden ab, bd, de, ef und af, so ist die Figur abdef auf dem Plan ähnlich der Figur ABDEF auf dem Felde u. s. w. Der Beweis dafür folgt aus der Elementargeometrie. Begreiflich muß man hierbei den verjüngten Maßstab so wählen, daß die Maße ca, cb, cd, ce, cf nicht über den Bereich des Meßtisches hinausgehen. Da die Messung vieler Weiten ohne allen Vergleich beschwerlicher und zeitraubender ist als die Construction der Winkel, so hat die eben bemerkte Methode, geradlinigte Figuren aufzunehmen, nur einen sehr beschränkten Gebrauch, nehmlich zu kleinen ökonomischen Messungen von Aeckern, Wiesen ꝛc Gehet eine Aufnahme

hr ins Große, so wird man immer lieber eine der iterhin gelehrten Methoden anwenden, bei denen nur Messung einer einzigen Standlinie, im Uebrigen r bloß die geometrische Construction von Sehewin- i erforderlich ist.

§. 106.

Aufgabe. (Fig. 76.)

Eine horizontale Weite AB werde indirecte mit n Meßtisch bestimmt; man kann nur an den einen dpunkt derselben A kommen, und einen dritten Ort finden, von wo aus man nach A und B visiren, und h A hin messen kann.

Auflösung: Der Standort C wird, wenn es möglich, also ausgesucht, daß er mit AB ein gutes Dreieck bildet. Man stellt den Meßtisch horizontal über C auf, und bestimmt auf ihm den Punkt c senkrecht über C, zieht die Visirlinien von c gegen A und B, wodurch der Winkel ACB construirt wird. Man mißt die Horizontalweite CA, und trägt solche verjüngt auf die Visirlinie cA als ca. Hierauf stellt man den Meßtisch über A auf, und orientirt ihn hier so, daß a senkrecht über A und ac in die Vertikalebene AC fällt, bei welcher immer etwas schwierigen Operation die größte Sorgfalt anzuwenden ist; besonders hat man dahin zu trachten, daß ac in AC fällt. Nachdem dies geschehen, und somit cβ auf dem Tischblatt parallel zu CB im Felde gemacht worden, so ziehet man die Visirlinie von a nach B, welche cβ in b schneidet. Da wegen der gleichen Winkel $\triangle acb \sim \triangle ACB$, so giebt ab nach dem verjüngten Maßstab die wahre Horizontal-

weite A B an, wenn auch B über oder unter dem Horizont von A oder C liegen sollte.

Ist die Weite A B sehr groß, so muß auch C A verhältnißmäßig groß genug angenommen, und das verjüngte Maß so gewählt werden, daß der Durchschnittspunkt auf das Meßtischblatt kommt. Nähme man dies verjüngte Maß zu groß, so würde der Durchschnitt der Visirlinien a B, c B über das Tischblatt hinausfallen. Das rechte Maß lehrt hier Uebung und ein gutes Auge.

Mit Hülfe dieser Aufgabe läßt sich unter andern die Breite eines Stroms zuverläßig oder doch sehr annähernd finden, wenn auch nur ein kleiner einfacher Meßtisch (planchette) angewendet, und kleine Fehler im Orientiren des Tisches begangen werden.

§. 107.

Aufgabe. (Fig. 77.)

Eine Horizontalweite A B, die an beiden Endpunkten unzugängig, soll indirecte mit dem Meßtisch bestimmt werden; man kann eine Standlinie C D annehmen und messen, dergestalt, daß man von C nach D, so wie von C und D ungehindert nach A und B visiren kann. Allgemein, es werde die Lage von zwei oder mehreren Punkten auf der Erde gegen eine bekannte Standlinie C D gefunden.

Auflösung. Man wählt die Standlinie C D, als Basis der einfachen oder auch mehr zusammengesetzten Aufnahme, am besten so, daß sie ungefähr gleich A B und nahe parallel zu dieser wird, damit die Visirwinkel an ihr weder zu spitz noch zu stumpf ausfallen. Das Weitere hierüber kann sich selbst ein Anfänger aus Sätzen der Elementargeometrie erklären.

Nachdem die Standlinie (Grundlinie, Basis) CD nach irgend einem Längenmaß sorgfältig ausgemessen worden, — gilt es große Genauigkeit, so geschieht dies zweimahl — stellt man den Meßtisch zuerst horizontal über C (oder auch zuerst über D) auf, findet c senkrecht über C, und ziehet von c aus die Visirlinien gegen B, A und D. Auf der Visirlinie cD schneidet man CD verjüngt als cd ab. Hierauf bringt man den Tisch über D, und orientirt ihn hier so, daß d senkrecht über dem gleichnamigen Punkt D auf dem Boden steht, und dc genau in die Vertikalebene DC fällt. Je richtiger solches geschehen, desto genauer wird im Standort D cβ ∦ CB und cα ∦ CA. Jetzt zieht man von d aus die Visirlinien gegen A und B hin, so schneiden diese die aus c nach denselben Richtpunkten gezogenen Visirlinien in a und b, und es giebt ab nach dem gebrauchten verjüngten Maßstab die wahre Horizontalweite AB an, da die kleine Figur abcd, vermöge der Construction, der großen im Felde ABCD ähnlich ist. Der Beweis dafür ist elementarisch. Noch erinnere ich hier ein für allemahl, und das practische Aufnehmen mit dem Meßtisch leitet jeden Anfänger sogleich auf die Bemerkung, daß man die Visirlinien cβ, cα ꝛc. auf dem Papier nicht von c und d aus, sondern nur theilweise an den Stellen mit Blei wirklich auszuziehen braucht, wo muthmaßlich die gesuchten Durchschnittspunkte hinfallen.

Ein sehr empfehlungswürdiges Mittel zur Prüfung und Berichtigung dieser Arbeit, besonders wenn sie ins Große geht, besteht darin: Bei der Ausmessung der geraden CD stecke man in einer dritten Zwischenstation zwischen C und D

in E, welcher Punkt ungefähr in die Mitte von CD genommen werden kann, ein Signal aus, verjünge die gemessene Länge DE auf dc als de, stelle den Meßtisch erst über C, sodann über E, endlich über D auf, und schneide sonach aus drei Punkten c, e, d gegen die Richtobjecte B, A ein. Hat man richtig gearbeitet, so müssen die aus c, d, e gegen B und A gezogenen Visirlinien sich wechselsweise in denselben Punkten b und a schneiden. Geschieht dies nicht, so sind gewiß in einer, oder zwei, oder auch in allen drei Stationen, oder aber in der Messung der Standlinie und ihrer Abschnitte, Fehler begangen worden, um so beträchtlicher, je weiter die correspondirenden Durchschnittspunkte von einander abstehen. Ein andres, besseres Mittel, unmittelbar von der Standlinie aus die topographische Aufnahme zu prüfen und controlliren, giebt es nicht, und bei keiner Aufnahme von einiger Bedeutung darf solches künftighin vernachläßigt werden. Die Arbeit wird durch das Einschneiden aus drei Stationen eben nicht besonders verlängert und erschwert. Man begreift wohl, daß man für diesen Zweck statt einer einzigen geraden Standlinie CD, auch zwei DE und EC, die in E unter einem Winkel, nahe 180°, zusammenstoßen, auswählen und messen kann. Außer der Weite AB giebt das kleine geometrische Bild zugleich die andern Weiten DA, DB, CA, CB.

Aus dieser Aufgabe erklärt sich ungemein leicht die zusammengesetztere, wo die Lage von mehr als zwei Richtobjecten gegen eine der Länge nach gegebene Basis CD, mithin auch die gegenseitigen Lagen und Entfernungen dieser Objecte selbst mit dem Meßtisch bestimmt werden sollen. Wäre z. B. die Lage dreier Objecte A,

B, E gegen die Standlinie C D und unter einander zu finden, so müßte man aus C, E, D gegen die drei Objecte A F B hin Visirlinien ziehen; man würde hier drei Durchschnittspunkte a, f, b auf dem Meßtisch erhalten, und hiermit zugleich die Entfernungen des Objectes F von A, B, C, D. Eben so, wenn die Lagen und Entfernungen noch mehrerer Richtobjecte nach der einen oder andern Seite von C D auf dem Meßtisch zu entwerfen wären. Solchergestalt kann man mit Zuziehung einer einzigen Standlinie und durch Vorwärtseinschneiden aus zwei oder drei bestimmten Punkten in derselben eine Menge Richtobjecte, fast eben so schnell als zwei, in Grund legen. So habe ich selbst mehrere Mahle im Verlauf eines Tages mit meinen Zuhörern zu ihrer Belehrung eine Standlinie von 3000 — 4000 Rheinl. Dec. Fuß gemessen, und durch dreimahliges Einschneiden ungemein genau die gegenseitigen Lagen aller ausgezeichneten Thürme und Gebäude der Stadt Berlin, so wie die einiger umliegenden Windmühlen und Dörfer ꝛc. erhalten.

Will man sehr weit entlegene Richtobjecte (Oerter) durch Einschneiden auf den Plan des Meßtisches bringen, so muß man entweder eine sehr große Standlinie zur Basis der Aufnahme wählen und messen, oder aber für eine kleinere Standlinie einen verhältnißmäßig kleinern verjüngten Maßstab annehmen. Das erstere Hülfsmittel verdient immer den Vorzug; doch ist die Ausmessung sehr langer Standlinien ($\frac{1}{2}$ bis 1 Meile lang) immer mit großen Schwierigkeiten verknüpft, und wird also nur dann unternommen, wenn man die Triangulirung einer größern Landstrecke von mehreren Quadratmeilen beabsichtigt.

Eine geradlinigte Figur im Felde, deren Eckpunkte durch natürliche oder künstliche Signale bezeichnet sind, durch eine Standlinie innerhalb derselben aufzunehmen,

ist nichts andres, als die eben erläuterte Aufgabe. Liegen einige Eckpunkte dieser Figur unter sehr stumpfen oder spitzen Winkeln gegen die Standlinie, also nahe in deren Alignement, so wird die Bestimmung derselben durch Einschneiden sehr unsicher oder gar unmöglich. Dann muß man die Lage solcher Punkte aus neuen Standlinien, wozu bereits entworfene Seiten oder Diagonalen der Figur dienen können, durch Einschneiden festsetzen.

Man kann die vorgetragene Aufgabe, die Lage mehrerer Oerter gegen eine bekannte Standlinie geometrisch darzustellen, als das wichtigste und hauptsächlichste Problem der Meßtischaufnahmen ansehen; auf sie gründet sich überhaupt das topographische Aufnehmen eines mehr oder weniger ausgedehnten Terrains mit seinen bemerkenswerthen fixen Objecten. An Wichtigkeit ist diese Aufgabe nur noch die in den folgenden §§ zu behandelnde vergleichbar, nehmlich die Lage eines (oder mehrerer) Oerter auf der Erde gegen bereits in Grund gelegte zwei oder mehrere andere Oerter durch Rückwärtseinschneiden zu bestimmen.

In der wirklichen Ausübung hat man auf die richtige Stellung des Meßtisches die größte Sorgfalt und Aufmerksamkeit zu wenden, und ganz vorzüglich dahin zu trachten, daß in der zweiten Station des Einschneidens bei D (Fig. 77.) die von C aus gezogenen Visirlinien cb, ca zu den Vertikalebenen CB, CA parallel bleiben, weil man anders keine ähnlichen Dreiecke und ähnlichen Figuren erlangt. Der Fehler ist in den meisten Fällen sehr unbedeutend, wenn bei der Aufstellung des Tisches in der zweiten Station der Punkt d in vertikaler Projection um ein paar Zolle von D auf dem Boden absteht; viel wichtiger ist aber der Parallelismus der gleichnamigen cb und CB u. s. w. Um diesen zu erreichen, dient das früher bemerkte Ver-

fahren bei Orientirung des Meßtisches über einen gegebenen Punkt und in eine gegebene Vertikalebene. Das Zurückvisiren von D gegen C nach der Richtung dc der Diopternebene ist hier ein Hauptmittel; zur Beihülfe kann mit dem Meßtisch eine empfindliche Orientirbouſsole, gewöhnlich seitwärts am Rande, in Verbindung gesetzt werden. Wenn man in der zweiten Station bei D, so wie in der dritten bei E den Tisch so stellt, daß die Magnetnadel wieder auf denselben Grad wie bei C einspielt, so wird auch cb zu CB u. s. w. wenigstens sehr annähernd parallel. Wo indessen ein Zurückvisiren von folgenden Stationspunkten auf vorhergehende möglich ist, darf man sich auf die immer etwas unsichere Anzeige der Magnetnadel allein nicht verlassen.

§. 108.

Nebenaufgaben mit Hülfe des Meßtisches gelöst. (Fig. 78.)

Nach den bisher behandelten Hauptaufgaben wollen wir noch ein paar Nebenaufgaben, mit dem Meßtisch Distanzen zu bestimmen, kennen lernen, theils der Vollständigkeit halber, theils auch, weil solche in einigen, jedoch seltenen, Fällen ihre Anwendung finden.

1) Kann die Standlinie CD gegen die zu bestimmende Weite AB (Fig. 77.) nur in der Art angenommen werden, daß man von D bloß nach A und von C bloß nach B hin visiren, auch zugleich messen kann, so verfährt man also:

Nachdem die Weite DA directe gemessen worden, stellt man den Meßtisch über D, und bestimmt d senkrecht über D, ziehet von d die Visirlinien nach A und C, macht da = der verjüngten DA und dc = der verjüngten, vorher oder

im Verlauf der Aufnahme zu messenden, DC; hierauf stellt man den Tisch über C auf, so daß c senkrecht über C und cd in die Vertikalebene CD fällt, so bleibt auch da ∥ DA. Nun ziehet man von c eine Visirlinie nach B, mißt die Weite CB und macht cb = der verjüngten CB. Ist alles richtig geschehen, so giebt die Länge ab auf dem Meßtisch nach dem gebrauchten verjüngten Maßstab die wahre Weite AB an, da die Figur abcd ∼ der Figur im Felde ABCD. Denn es ist:

da : dc = DA : DC und ∠adc = ∠ADC, also

△adc ∼ △ADC,

folglich läuft die Diagonale AC durch den Punkt a auf dem Tischblatt. Ferner ist ac : cb = AC : CB und ∠acb = ∠ACB, also ꝛc.

Diese Methode, die Weite AB zu finden, könnte man anwenden, wenn ein Berg oder Wald das Visiren von D nach B und von C nach A verhinderte. Da solche aber wegen der dreifachen Weitenmessung höchst beschwerlich, so wird man sie nur im Fall der Noth ausüben.

2) Soll die ganz unzugängige Weite AB (Fig. 78.) durch Aufstellung des Meßtisches bloß in einem Endpunkt C einer ausgemessenen Standlinie CD bestimmt werden, so operirt man folgendermaßen:

Man stellt den Tisch über C auf, bestimmt c senkrecht über C, und nachdem der Ort D ferner in der Direction DA ein beliebiger Punkt R ingleichen in der Direction DB ein beliebiger Punkt M durch Signale bezeichnet worden, zieht man aus c nach B, M, A, R, D Visirlinien. Man mißt ferner die drei Weiten CD, CR, CM, und

verjüngt solche auf den gezogenen Visirlinien als cd, cr, cm. Verlängert man nun dr, so schneidet sie die Visirlinie cA in a; die verlängerte dm hingegen schneidet die Visirlinie cB in b, und es giebt die verjüngte Länge ab auf dem Meßtisch die wahre Weite AB im Felde an, weil nach der geschehenen Construction die Figur abcd ∽ der Figur ABCD. Den ungemein leichten Beweis dafür kann jeder Anfänger selbst finden.

Auch diese Methode, so richtig sie sonst in der Theorie ist, wird durch eine dreifache Weitenmessung höchst beschwerlich, weitläufig und fast unvermeidlichen groben Fehlern ausgesetzt. Wer wollte nicht lieber die Mühe einer einzigen Weitenmessung und zweimahligen Aufstellung des Meßtisches, als die ungleich größere der dreifachen Weitenmessung übernehmen? Was aber die leicht möglichen Irrthümer bei dieser Methode anlangt, so hält es schon äußerst schwer, in der bemerkten Weise eine auf Papier gezeichnete Figur ABCD in die verjüngte abcd richtig zu verwandeln, so daß ab nach dem verjüngten Maßstab die größere Länge AB ohne Fehler anzeige. Wie nun erst im Felde? Es hat also diese Methode viel gegen sich, aber wenig für sich, da nur äußerst selten oder nie die Nothwendigkeit ihre Anwendung gebietet.

Bestimmung der Lage eines oder mehrerer Punkte gegen zwei andere bereits bestimmte Punkte auf der Erde, durch Rückwärtseinschneiden.

§. 109.

Aufgabe. (Fig. 79.)

Die Länge und Lage einer Grundlinie (Basis der Aufnahme) A B ist gegeben; es soll die Lage von einem oder mehreren andern Punkten (Oertern) im Felde, z. B. von C und E, gegen jene durch Rückwärtseinschneiden bestimmt werden. Hierbei wird angenommen, daß man den Meßtisch nur über dem einen Endpunkt B der Basis A B aufstellen, und von da aus nach C, A, E visiren kann.

Auflösung. Man stelle den Tisch über B auf, bestimme b senkrecht über dem gleichnamigen Punkt B des Standorts, ziehe von b aus Visirlinien gegen C, A, E hin, und mache b a = der verjüngten B A; diese Länge pflegt insgemein durch eine anderweitige Aufnahme schon bekannt zu seyn. Man wähle eine geradlinigte Richtung, Alignement, N R, im Felde, welche durch b auf dem Tischblatt läuft, und die in N und R oder auch bloß in R durch natürliche Richtobjecte oder in deren Ermangelung durch künstliche Signale deutlich bezeichnet wird. Dieses Alignement kann unter einem rechten oder beinahe rechten Winkel A B durchschneiden, immer aber muß es gegen C und E eine solche Lage haben, daß zuletzt b d c und b d e gute Dreiecke geben. Uebung und gutes Augenmaß thun hier das Beste. Man markire auf

dem Tisch die Richtung von NR durch die gerade nr. Dann rücke man von B gegen R um eine schickliche Weite fort, jedoch so, daß man im Alignement NR bleibt, und BD in Beziehung auf C, E eine genugsam lange Standlinie wird. Ueber D, welcher neue Standort entweder selbst ein fixer Punkt auf dem geometrischen Grundriß (Plan) werden soll, oder auch nur ein beliebig angenommener, durch nichts ausgezeichneter, Hülfspunkt seyn kann, stelle man den Meßtisch so auf, daß die gezogene Visirlinie nr in die Vertikalebene NR oder BR fällt; wofern nehmlich gegen N hin kein Richtobject sich befindet, setzt man im Fortgang der Arbeit bei B eine Signalstange ein. Hat man den Meßtisch bei D gut orientirt, d. h. mn richtig in die Vertikalebene BR eingestellt, so wird offenbar auch ab auf dem Meßtisch parallel zu AB im Felde liegen. Jetzt bewege man das Diopterlineal um den Punkt a so weit, bis man in der Diopternebene das entfernte Richtobject A erblickt, ziehe nun die Visirlinie Aa rückwärts, bis sie br in d schneidet, so giebt der Durchschnittspunkt d die Lage des gegenwärtigen Standorts D gegen die Basis AB, weil $\triangle abd \sim \triangle ABD$. Damit erhält man zugleich, nach dem Maß der verjüngten bd, die Horizontalweite BD im Felde, und diese BD wird nun eigentlich die Hülfsstandlinie zur Bestimmung der Lagen von C und E, durch Vorwärtseinschneiden, wie in der Aufgabe §. 107.

Da von dem einen Endpunkt dieser Standlinie, nehmlich von B aus schon Visirlinien gegen C und E gezogen worden, und bei der Aufstellung in D $b\gamma \# BC$ und $b\varepsilon \# BE$ bleibt, so darf man nur noch von d aus gegen C und E Visir-

linien ziehen, um durch Vorwärtseinschneiden die Punkte c und e auf dem Tischblatt, und demgemäß die Lage der Richtobjecte C, E gegen die gegebene Basis A B zu erlangen. Es werden durch diese geometrische Operation, wenn man sonst damit richtig vorgegangen, eine Menge Entfernungen nach dem Längeneinheitsmaß von A B bekannt, als:

A C, B C, A E, B E, C E, A D, E D u. s. w.

Der Punkt d wird hier durch Rückwärtseinschneiden bestimmt und zwar um so richtiger, je zuverläßiger man bei D die verjüngte a b ⌗ A B, also auch b γ ⌗ B C, b ε ⌗ B E gestellt hat. Zur Beihülfe kann hier ebenfalls eine mit dem Meßtisch verbundene Orientirboussole dienen, deren Nadel bei D wie bei B, wo man ihren Stand beobachtet hat, einspielen muß. Doch ist der Gebrauch des Alignements N R immer weit sichrer, als die Anzeige der Nadel. Dürfte man sich auf letztere ganz allein verlassen, so könnte man unmittelbar in jedem Richtpunkt, z. B. in D, den Tisch, ohne ihn erst in B aufzustellen, orientiren, nehmlich a b ⌗ A B machen, und dann durch zweimaliges Rückwärtsziehen in den Richtungen von A gegen a und von B gegen b hin den Punkt d, also die Lage von D gegen A B erhalten. Wo es, wie oft in der gemeinen Feldmeßkunst, auf sehr große Genauigkeit nicht ankommt, kann man wirklich allein mit Hülfe der Magnetnadel, die aber zu dieser Absicht sehr empfindlich und gut beschaffen seyn soll, die Lage einzelner Punkte gegen eine anderweitig schon bekannte Grundlinie A B bestimmen. Ein Mittel, sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern, würde folgendes seyn:

Man könnte, wo möglich, zwischen A und B, etwa in der Mitte bei M, ein weithin sichtbares

Signal einsetzen, und die genau gemessene Weite B M auf dem Meßtischüberzug als b m verjüngen. Wäre nun, wie vorher gezeigt wurde, im zweiten Standort bei D der Durchschnittspunkt d gefunden, so müßte auch die Visirlinie M m rückwärtsgezogen durch den Punkt d laufen, wenn B A, B M richtig bestimmt worden, und in der Orientirung des Tisches keine Fehler begangen worden sind. Man könnte aber auch zu dieser Prüfung außerhalb A B einen andern Richtpunkt P wählen, die Weite B P messen, und auf der gezogenen Visirlinie B P als b p verjüngen; sodann bei D die Visirlinie P p rückwärts ziehen, welche bei einer genau ausgeführten Operation gleichfalls durch den Punkt d gehen müßte. Beim Fortgang einer zusammengesetzten Aufnahme (Triangulirung) mit dem Meßtisch befinden sich solche Prüfungspunkte wie P schon auf dem Plan; je mehrere derselben zur Untersuchung angewendet werden, desto gewisser wird man von der richtigen Bestimmung des letzten Standorts D. Treffen, wie es sich wohl zuweilen ereignet, nicht alle rückwärtsgezogenen Richtungslinien in einem Punkt d zusammen, so nähert man sich der Wahrheit, indem man den Punkt, wo die meisten zusammentreffen, für den eben zu bestimmenden Punkt (Ort) d beibehält, oder indem man zwischen verschiedenen wenig abweichenden Durchschnitten nach dem Augenmaß einen mittlern Punkt wählt. Bei allzugroßen Abirrungen aber muß die fehlerhafte Aufnahme nothwendig an frühern Stationen nachgesehen und verbessert werden. Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes und dazu gehörige zusammengesetztere Zeichnung (nach Ableitung der Fig. 79.) kann keinem Leser schwer fallen.

Uebrigens leuchtet es ein, daß sich eine oder die andere der indirect bestimmten Weiten, z. B. BC oder DE, wieder zu neuen Standlinien für andere weiter entlegene Richtobjecte, die man von B und D aus entweder gar nicht oder nur unter sehr schiefen Sehewinkeln anvisiren konnte, gebrauchen läßt. Nach Beschaffenheit der Umstände wendet man dann wieder die Methoden des Vorwärts- oder Rückwärtseinschneidens an. Die Richtigkeit aller weiterhin durch Rückwärtseinschneiden auf dem Meßtisch festgesetzten Standorte wird sich durch früher schon in Grund gelegte Richtobjecte, z. B. C, E, D ꝛc., leicht und bequem prüfen lassen, wie eben gelehrt worden.

§. 110.

Aufgabe. (Fig. 80.)

Eine Basis AB ist ihrer Länge und Lage nach gegeben; es soll die Lage eines andern Punktes (Ortes) C gegen jene auf dem Meßtisch gefunden werden; wobei angenommen wird, daß man diesen bloß in der Verlängerung von AB bei S und in C aufstellen darf.

Auflösung. Der Meßtisch wird über S richtig orientirt, so daß ab, als die verjüngte AB, in die Vertikalebene dieser Richtobjecte fällt. Man wählt, wie in §. 109. ein Alignement MC und bezeichnet es auf dem Tisch als mγ, welche Linie nicht nothwendig durch b, sondern auch durch die Verlängerung von ab gehen darf, indem mγ bloß dazu dient, ab in der zweiten Station zu AS oder AB parallel zu stellen. Man begiebt sich ferner nach C und orientirt hier den Meßtisch dergestalt, daß mγ in die Vertikalebene MC fällt.

Dadurch wird auch a b ∥ A B. Man ziehe die Visirlinien A a, B b rückwärts, so giebt ihr Durchschnittspunkt c die Lage des Ortes C gegen A B, weil △ a b c ∼ △ A B C.

Alle in der vorigen Aufgabe §. 109. gemachten Erinnerungen, in Hinsicht der Orientirung durch die Magnetnadel, der Prüfung des Punktes c ꝛc. gelten auch hier.

Sollte nun weiter die Lage anderer fixer Punkte, z. B. von E gegen A B, so wie gegen C, bestimmt werden, so bedürfte es einer neuen Standlinie C D, deren Länge nehmlich die Lage des Ortes D, ferner durch Aufstellung des Tisches über D und Rückwärtseinschneiden aus bereits bestimmten Punkten A, B gefunden würde. Den Punkt c, also die Lage des Ortes E gegen A, B, C, D erhielte man durch die aus c und d gegen E hin gezogenen Visirlinien, folglich durch Vorwärtseinschneiden. An das in Grund gelegte Dreiecknetz lassen sich dann weiterhin neue Richtobjecte durch beiderlei Methoden des Einschneidens anknüpfen. Vergl. §. 109. Muß man den ersten Standort in der geraden A B zwischen ihren Endpunkten, z. B. in H (Fig. 80.), nehmen, so findet ein ganz ähnliches Verfahren, wie im vorgetragenen Falle, Statt. Eine weitere Betrachtung dessen mit einer dazu gehörigen Figur wolle der Leser selbst vornehmen.

§. 111.

Aufgabe. (Fig. 81.)

Es soll die Lage eines Punktes (Ortes) C gegen eine gegebene Basis A B auf dem Meßtisch bestimmt

werden; man kann aber denselben weder in der Vertikalebene A B noch ihrer Verlängerung (Alignement), sondern nur seitwärts A B aufstellen.

Auflösung: Könnte man über dem Punkt C auf dem Felde den Meßtisch so orientiren, daß die verjüngte a b parallel zu A B würde, so erhielte man durch Rückwärtsziehen der Visirlinien A a, B b ohne Weiteres den Durchschnittspunkt c und damit zugleich die Lage des Standortes C gegen die Basis A B. Dies würde annähernd möglich seyn, wenn man schon früher in A B oder ihrer Verlängerung die Richtung der Magnetnadel gegen A B und ihre Verjüngung a b auf dem Tisch bemerkt hätte; man würde dann über dem Standort C den Tisch so stellen, daß die Orientirbouſſole wieder wie über B einspielte. Wo aber diese Hülfe der Magnetnadel so wie diejenige der Alignements, wie in den vorerwähnten Aufgaben, ganz abgeht, da wird die richtige Stellung des Meßtisches unmittelbar über C unmöglich, wie ich aus vielen vergeblichen Versuchen, für dieses allerdings sehr wichtige Problem eine besondere geometrische Construction zu finden, zu schließen berechtigt bin.

Vielmehr bedarf es hierzu außer des Standortes C noch eines zweiten Hülfsstandortes, z. B. bei D. Man stelle nehmlich den Meßtisch über den beliebig angenommenen, doch schicklich gegen A, B, C liegenden, Punkt D auf, und orientire ihn hier nach dem Augenmaß, wobei sehr weit entlegene Richtpunkte in oder nahe im Alignement von A B einige Hülfe leisten, dergestalt, daß die verjüngte a b nahe parallel zu A B im Felde wird. Man ziehe die Visirlinien A a, B b rückwärts; ihr Durchschnittspunkt d wird die wahre Lage von D gegen A B nicht angeben, wenn, wie wir hier

abſichtlich vorausſetzen, a b nicht parallel zu A B liegt, und mithin △ a b d nicht ähnlich dem △ A B D wird. Wäre dagegen a m die verjüngte A B auf dem Tiſchblatt und parallel zu letzterer, ſo wäre auch △ a m d ∾ △ A B D, und es gäbe dann der Durchſchnittspunkt d die Lage des Ortes D gegen A B in Beziehung auf die verjüngte a m.

Man ziehe nun auf dem Tiſchblatt eine Viſirlinie von d nach C hin, nehmlich d γ, begebe ſich nach C, und orientire hier den Tiſch ſo, daß d γ im Alignement D C bleibt. Dies Alignement kann durch künſtliche oder auch natürliche in der Direction C D mehr oder weniger weit entfernte Richtobjecte, (z. B. Bäume, Thurmſpitzen u. ſ. w.) bezeichnet ſeyn.

Nachdem dies im zweiten Standort C geſchehen, wird d b ∦ D B liegen. Man ziehe die Viſirlinie A a rückwärts, ſo ſchneidet dieſe die Alignementslinie d γ in e, ferner ziehe man von e gegen B hin eine Viſirlinie, welche d b in m ſchneidet. Nach dieſer Conſtruction wird die kleine Figur a m d e ∾ der Figur im Felde A B D C, (nach §. 107.) und a m ∦ A B. Wäre nun anfänglich auf dem Meßtiſch a m die verjüngte A B und zu dieſer im erſten Standorte D parallel geweſen, ſo mußten ſich offenbar bei C die zwei rückwärtsgezogenen Viſirlinien A a, B m in einem einzigen Punkt e und zwar in der geraden d γ ſchneiden. Für a m, als verjüngte Baſis angenommen, würde e d die in gleichem Maße verjüngte Standlinie C D vorſtellen, und die Punkte e, d zeigten die Lage der Oerter C, D gegen A B an. Hätte man bei D aus d gegen mehrere andere fixe Punkte, z. B. gegen F hin, Viſirlinien

gezogen, so würden solche jetzt bei C durch anden aus e nach denselben fixen Punkten, z. B. gegen F, gezogenen Visirlinien geschnitten werden, und di Durchschnittspunkte gäben die Lagen der Punkte ge gen A, B, C, D an, z. B. f die Lage des Ortes F, abe immer in Beziehung auf am als verjüngte AB. Ein wenig Nachdenken wird jedem Leser zeigen, wie die Figur amdfe von der verjüngten am auf die gegebene Verjüngung ab reducirt, und also die Lage der gesuchten fixen Punkte gegen A, B ꝛc. mit einem geometrischen Netze, dessen ver jüngte Basis ab ist, dargestellt werden könnte.

Will man aber gleich im Felde die Lage des Standortes C gegen AB, in Beziehung auf die gegebene Verjüngung ab finden, so muß man ab aus der fehlerhaften in die richtige zu AB paral lele Lage versetzen. Dies kann folgendermaßen annähernd oder auch ganz genau geschehen: Da am ∦ AB ist, so lege man das Diopterlineal an am, und suche in dieser Visirebene ein ent ferntes, deutlich und scharfbegrenztes Richtobjekt R; fehlt ein solches, so hilft man sich durch Auf stellung einer Signalstange in dem Alignement aR. Sodann lege man das Diopterlineal an ab, und drehe den Meßtisch so weit horizontal herum, — der Meßtisch mit Schraube ohne Ende eignet sich hierzu am besten — bis man in der Visirebene ab den Richtpunkt R sieht, oder bis (Fig. 81.) ab in die zu AB parallele Lage ab′ kommt. Läge a in der Achse der horizontalen Umdrehung, so er hielte man dermaßen geometrisch-genau ab′ ∦ AB. Liegt aber, wie gewöhnlich, a außer jener Achse, so kann eigentlich ab, nicht genau wie am zu AB parallel bleiben; indessen beträgt der Feh ler wegen dieser Excentricität, wenn man R in

eträchtlicher Entfernung von C genommen, im- ner so wenig, daß er in der Praxis durchaus un- edeutend wird. Der Beweis für diesen Satz ist anz elementarisch.

Hat man ab in die Lage ab′ ∥ AB gebracht, o ziehe man endlich die Visirlinien Aa, Bb′ ückwärts, bis sie einander c schneiden. Da jetzt △ ab′c ∼ △ ABC, so giebt c die Lage des Ortes C gegen AB. Bei dieser Operation kann s sich ergeben, daß c in vertikaler Projection um twas, etwa um ein paar Zoll, vom Punkt C uf dem Boden abweicht. Wie gering aber da- urch der Excentricitätsfehler im ∠ acb′ wird, äßt sich aus dem beurtheilen, was vom Centri- ren der Winkel im §. 102. beigebracht wor- den.

t nach dieser Aufgabe die gegenseitige Lage der r ABC durch das kleine auf dem Meßtisch con- e △ ab′c einmahl bestimmt, so kann man die nderer Oerter gegen jene durch Seitenalignements, Rückwärts- und Vorwärtseinschneiden leicht wei- stimmen. Einige practische Vortheile bei dieser be, welche ich hier noch bemerken könnte, mögen, Ersparung des Raumes, dem Nachdenken und der n practischen Uebung der Leser überlassen bleiben.

Bestimmung der Lage eines oder mehre Punkte gegen drei bereits bestimmte Pun auf der Erde, durch Rückwärtseinsch den.

§. 112.

(Fig. 82. 83. 84.)

Wenn zwei ähnliche Dreiecke A B C und a b c einer und derselben Ebene eine solche Lage gegen e ander haben, daß wechselseitig ihre homologen Sei parallel sind, a b ∥ A B, b c ∥ B C, a c ∥ A so schneiden die rückwärtsgezogenen Richtungslinien A Bb, Cc einander in einem einzigen gemeinschaftlic Punkt d, und es hat dieser Punkt d gegen a b c d selbe Lage, wie gegen das größere Dreieck A B C.

Mein Beweis *) dafür ist dieser:

Die geraden Linien B b, C c müssen einander v längert in d schneiden, weil b c parallel zu B C, a

---

*) In andern Schriftstellern finde ich diesen Satz entw gar nicht bemerkt und erwiesen, oder Beweise, die schwachen Füßen stehen. Der Herausgeber der Lehman schen Schrift: Anleitung zum Gebrauch des Me tisches ꝛc. als zweiter Theil der Lehre der Situ tionszeichnung ꝛc. giebt folgenden:

Weil A B mit a b und B C mit b c parallel ist, so △ ABD ∼ △ a b d und △ BCD ∼ △ b daher A D : a d = B D : b d = C d : c d.

Folglich müssen A D, B D und C D in dem Punkt d zusa mentreffen. Dieser Beweis ist nicht schlußgerecht, wen stens nicht deutlich genug.

als dieſe iſt. Die Dreiecke BCd und bcd
egen der Gleichheit der Winkel ähnlich; folglich:
: bd = BC : bc = AB : ab, auch iſt
∠ ABD = ∠ abd
dun ſey Aa rückwärts gezogen, und ſchneide die
rts verlängerte Bb in irgend einem Punkt, der
en mag. Es muß erwieſen werden, daß beide
chnittspunke D und d zuſammenfallen. Man
: ſich die geraden da und DA gezogen. Da
B : ab = BD : bd und ∠ ABD = ∠ abd,
△ ABD ∼ △ abd, daher auch ∠ ADB =
b; folglich müſſen ad und AD zuſammenfallen,
uch die Durchſchnittspunkte D und d.
Daß die kleine Figur abcd der großen ABCd
) iſt, erhellt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke,
s ſie zuſammengeſetzt ſind. Giebt daher z. B.
ach irgend einem verjüngten Maßſtab die Länge
ſo giebt nach demſelben Maßſtab da die Länge
DA) db die Länge dB u. ſ. w.
Das kleine Dreieck abc kann übrigens gegen das
ABC jede Lage in einer Ebene haben, wenn nur
ie homologen Seiten AB, ab u. ſ. w. parallel ge-
inander ſtehen. In unſrer Figur 82. ſind nur
verſchiedene Lagen angedeutet. Der Leſer wird
thun, ſich die übrigen Lagen des △ abc, jenſeits
innerhalb des △ ABC, in einer Seite deſſelben
o. durch geometriſche Zeichnung anſchaulich zu ma-

Aus dem Geſagten ergiebt ſich durch einen indi-
n Beweis ſehr leicht, daß die rückwärts gezogenen
tungslinien Aa, Bb, Cc einander nicht in einem
einſchaftlichen Punkt d ſchneiden können, wenn
abc in einer Ebene mit △ ABC, aber ſo liegt,
die homologen Seiten AB, ab u. ſ. w. nicht gegen
nder parallel laufen. In dieſem Falle entſtehen drei

Durchschnittspunkte, nehmlich für jedes Paar der
Richtungslinien ein andrer. So schneiden z. B.
Fig. 83. die rückwärts verlängerten Linien A a,
einander d, die Linien B b, C c in f, die Linien
C c aber in e. Das kleine Dreieck d e f, dessen W
kelspitzen die Durchschnittspunkte d, e, f sind, f
den ganz schicklichen Namen eines fehlerzeigent
Dreiecks, weil es in jedem Fall die nicht parallele L
des △ a b c zum △ A B C anzeigt, bei vollkomm
paralleler Lage beider Dreiecke aber durch Rückwä
ziehen der Visirlinien A a ꝛc. nicht zum Vorschein k
men kann, auch um so kleiner ausfallen muß, je ge
ger der Fehler im Parallelismus beider Dreiecke ist.

Aus der Lage des fehlerzeigenden Dreiecks d
nehmlich seiner zu je zwei Richtungslinien gehöri
Winkelspitzen (Durchschnittspunkte) läßt sich jeder
die Art der geneigten Lage des △ a b c gegen das
A B C beurtheilen, und daraus schließen, nach wel
Richtung a b c in der Ebene gewendet (gedreht) w
den müsse, um parallel gegen A B C zu werden.
wie z. B in Fig. 83 die Winkelspitze e der beiden
ßern Richtungslinien A a, C c gegen f hin rücken m
damit alle drei Winkelspitzen zusammenfallen, so m
auch a c oder b c nach derselben Seite gedreht werd
u. s. w. Die übrigen Fälle, wo z. B. das △ a b c
nerhalb des △ A B C in einer fehlerhaften Lage st
kann man sich durch eine geometrische Construction le
erläutern. Hier wollen wir uns damit nicht aufh
ten. *)

So wie das fehlerzeigende Dreieck d e f in jed
Fall beweist, daß △ a b c gegen △ A B C keine par

*) Ausführlich handelt davon der 2te Theil der vorerwähn
Lehmannschen Schrift.

lele Lage hat, so kann man umgekehrt aus der Nichtentstehung jenes Dreiecks d e f nie mit Gewißheit folgern, daß auch wechselseitig alle drei Seiten des △ a b c zu den gleichnamigen des △ A B C eine parallele Lage haben. Nach Fig. 84. kann gegen das große △ A B C das kleine diesem ähnliche zweierlei Lagen, die parallele a b c und die nicht parallele a b′ c haben, ohne daß ein fehlerzeigendes Dreieck entsteht, nehmlich nicht allein die Richtungslinien A a, B b, C c, sondern auch A a, B b′, C c schneiden rückwärts verlängert einander in einem einzigen Punkte d. Eben so kann das große Dreieck die Lage A B′ C, das kleine ihm ähnliche die Lage a b c haben ꝛc. In solchen unbestimmten Fällen sind nur zwei gleichnamige Seiten, hier a c und A C parallel, aber nicht die andern. Hätte nun das große Dreieck die Lage A B C, das kleine die Lage a b′ c, so würde offenbar der Durchschnittspunkt d gegen A B C anders liegen, als gegen a b′ c, und die Länge d b′ der Länge d B nicht nach dem Maße proportionirt seyn, wie a c der Länge A C. Diese Ungewißheit beim Rückwärtseinschneiden mit dem Meßtisch, auch bei trigonometrischer Bestimmung des Ortes d gegen die Oerter A, B, C kann, wie wir weiterhin sehen werden, in der Ausübung nur durch anderweitig bekannte Umstände gehoben werden; man muß nehmlich schon vorläufig wissen, ob das große Dreieck die Lage A B C oder die entgegengesetzte A B′ C habe, um darnach das kleine Dreieck in die correspondirende Lage a b c oder a b′ c zu bringen.

Ein anderer unbestimmter Fall tritt ferner ein, wenn A B C ein großes Dreieck im Felde, und das gegen dasselbe äußerst kleine ähnliche Dreieck a b c auf dem Meßtischblatt in der Peripherie des durch A B C laufenden (eingebildeten) Kreises liegt. Hier werden sich nehmlich immer die rückwärts verlängerten Rich-

tungslinien A a, B b, C c in einem Punkte d (wenigstens so nahe, daß keine Abirrung bemerkbar wird) schneiden, wenn auch (Fig. 83.) a b c etwas fehlerhaft gegen A B C steht.

Man stelle sich nun (Fig. 82.) vor, A, B, C seyen drei Oerter auf der Erde, durch bestimmte Richtobjecte begrenzt, ihre gegenseitige Lage, nehmlich △ A B C, durch anderweitige geodätische Bestimmung bereits gegeben, auf dem Meßtischblatt sey ein kleines Dreieck a b c ∼ △ A B C nach irgend einem verjüngten Maßstab construirt. Ferner sey D ein Standort außerhalb oder innerhalb A B C. Es wird die Lage von D gegen A B C mittelst des Meßtisches gesucht, nehmlich auf diesem der Punkt d in ähnlicher Lage gegen a b c, wie D gegen A, B, C im Felde. Man begreift auf den ersten Anblick, daß es hier nur darauf ankommt, den Meßtisch über dem Standort D also zu orientiren, daß das △ a b c zu dem großen Dreieck A B C eine parallele Lage erlange. Hat man dies auf irgend eine Weise erreicht, so zieht man die Visirlinien A a, B b, C c rückwärts, bis solche einander in d schneiden. Da die Figur d a b c ∼ der Figur DABC, so hat d gegen die Punkte a, b, c dieselbe Lage, wie der Standort D gegen die Oerter A, B, C u. s. w. Meistens wird sich beim Fortgang einer geometrischen Aufnahme die richtige Orientirung des Meßtisches dadurch bewirken lassen, daß man schon früher an einem der Oerter A, B, C aufgestellt war, und also hier Seitenalignements auf dem Tischblatt ziehen oder den Stand der Orientirbouſſole beobachten konnte. Wo aber diese Hülfsmittel ganz abgehen, da wird die Orientirung des Tisches über D schwieriger, und es bedarf dann anderweitiger Kunstgriffe durch geometrische Construction. Die trigonometrische Auflösung dieses höchst wichtigen Problems, von der ich weiterhin spreche, bleibt frei

)n dieſer Verlegenheit und künſtlichen Beihülfe; ſie darf zum Kalkul bloß die Lage der Oerter A, B, C nd die Sehewinkel vom Standort D gegen jene, um e Lage dieſes vierten Ortes D gegen A, B, C in ingenmaß zu finden. Indeſſen treten auch hier die- lben unbeſtimmbaren Fälle ein, wie beim Rückwärts- nſchneiden auf dem Meßtiſch.

§. 113.

Aufgabe. (Fig. 85.)

Die Lage dreier Punkte auf der Erde oder das)reieck ABC iſt gegeben und in verjüngtem Maßſtab uf dem Meßtiſch conſtruirt, als △ abc; es werde ie Lage eines vierten Punktes D beſtimmt, der in der eraden AB oder in ihrer Verlängerung liegt.

Auflöſung:

1) Liegt D zwiſchen AB (Fig. 85.), ſo orientire man hier den Meßtiſch ſo, daß ab in die Vertikalebene AB fällt, mithin auch ac ∥ AC, bc ∥ BC wird; dann ziehe man die Viſirlinie Cc rückwärts, ſo giebt der Durchſchnittspunkt d die Lage des Standorts D gegen A und B an, nehmlich die verjüngte da die wahre Weite DA u. ſ. w.
2) Liegt D′ in der Verlängerung von AB (Fig. 85.), ſo richte man auch hier ab auf dem Meßtiſch in das Alignement AB ein, ziehe Cc rückwärts, bis ſolche die verlängerte ab in d′ ſchneidet, ſo giebt d′ die Lage des Standorts D′ gegen AB an u. ſ. w.

Nur ſelten wird der Ort D in der geraden AB oder ihrer Verlängerung liegen; jedoch kann dieſe Aufgabe bisweilen dazu dienen, in einer der Länge nach

gegebenen Basis einen oder mehrere Zwischenstandorte zum Einschneiden gegen andere Objecte zu bestimmen, wenn man den Meßtisch in den Endpunkten der Basis A B nicht aufstellen kann, oder wenn man nicht allein aus A und B, sondern auch zur Versicherung noch aus einem dritten Zwischenpunkt Visirlinien nach entfernten Richtpunkten ziehen will.

§. 114.

Aufgabe.

Die Lage dreier Punkte A, B, C auf der Erde ist gegeben, und nach einem verjüngten Maßstab auf dem Meßtisch construirt; es soll die Lage eines vierten Punktes D gegen jene bestimmt werden; der Standort D liegt außerhalb der Seiten des Dreiecks A B C und deren Verlängerungen.

Auflösung: Es sind verschiedene Methoden hierzu bekannt; wo die eine nicht anwendbar, wird es wohl eine andre seyn.

Iste Methode mit Beihülfe einer Orientirbouſſole.

Es liege z. B. (Fig. 82.) der Standort D außerhalb des Dreiecks A B C; wir nehmen hier an, wie es bei fortgesetzten Operationen mit dem Meßtisch meistens geschieht, man habe denselben früher in einem Endpunkt des gegebenen Dreiecks oder in einer Seite desselben oder deren Verlängerung, z. B. in C, aufgestellt, und eine Seite ac des kleinen Dreiecks in eine gleichnamige A C des großen terrestrischen eingerichtet; in dieser Stellung des Tisches habe man den Stand der damit verbundenen Orientirbouſſole, deren Nadel sehr empfindlich seyn muß, beobachtet. Man hat sodann über dem

neuen Standort D den Tisch durch Horizontalbewegung also zu orientiren, daß die Nadel der Bousſole wieder denſelben Stand zeigt, oder auf denſelben Punkt, Grad, einſpielt, wie über C. Dadurch wird man das Dreieck a b c, wenn ſonſt die Nadel keine Störungen, z. B. durch Eiſen, in der Nähe erleidet, wenigſtens ſehr nahe parallel zu dem △ A B C ſtellen. Zwei rückwärtsgezogene Viſirlinien, z. B. A a, C c, werden ſich in d ſchneiden, und d wird dieſelbe Lage gegen a b c haben, wie der Ort D auf dem Felde gegen die Oerter A, B, C. Zur Verſicherung, daß man den Meßtiſch richtig orientirt, kann man noch die dritte Viſirlinie B b rückwärts ziehen; gehet dieſe nicht durch d, ſondern entſtehet ein fehlerzeigendes Dreieck (Fig. 83.), ſo kann man durch eine geringe Horizontalbewegung des Tiſches den Fehler ſo weit verbeſſern, daß alle drei Viſirlinien einander in einem gemeinſchaftlichen Punkt d ſchneiden. Uebung thut in dieſer Sache ſehr viel. Uebrigens darf man hier, wie bei allen Meßtiſchaufnahmen überhaupt, nicht die äußerſte geometriſche Schärfe erwarten, und muß ſich mit einem gewiſſen Grad der Annäherung begnügen. Unter je ſpitzern Winkeln ſich die Viſirlinien bei d ſchneiden, deſto zweifelhafter wird der Durchſchnittspunkt d, und zwar wird dann in Beſtimmung der Lage des Ortes D gegen A B C um ſo mehr gefehlt, je kleiner man den verjüngten Maßſtab für das Dreieck a b c wählte. Geringer und meiſtens ganz unbedeutend wird die Abirrung von der Wahrheit, wenn nach geſchehener Conſtruction der Durchſchnittspunkt d in vertikaler Projection um einige Zolle vom Punkt D auf dem Boden abſteht. Auch bei der vollkommenſten Aufnahme mit dem Meßtiſch wird man ſich auf etwas beträchtliche Entfernungen nicht allein um einige Zoll, ſondern wohl auch um einige Fuß irren, und es wäre

lächerlich, ſich um eines ſo kleinen ganz unvermeidlichen Fehlers willen zu ängſtigen.

So wenig ich ſonſt der Bouſſole das Wort reden mag, ſo nützlich und brauchbar finde ich ſie zum Orientiren des Meßtiſches, beſonders wenn es ſich um kleinere ökonomiſche und militäriſche Aufnahmen handelt. Was manche Schriftſteller, z. B. Lehmann in ſeiner öfter erwähnten Schrift, dagegen erinnert haben, iſt nicht ganz oder nur einſeitig begründet, und erklärt ſich wohl zum Theil aus beſonderer Vorliebe für andere, auch eigne, Methoden.

IIte Methode vermittelſt einer geometriſchen Conſtruction:

Es ſey (Fig. 83.) der Meßtiſch über dem Standort D durch ungefähre Schätzung nach dem Augenmaß oder auch mit Zuziehung einer unvollkommenern Orientirbouſſole ſo orientirt, daß a b c wenigſtens parallel zu A B C liegt. Entſteht nun beim Rückwärtsziehen der Viſirlinien Aa, Bb, Cc ein fehlerzeigendes Dreieck d e f, ſo kann man ohne Fehler annehmen, daß dennoch ∠ a d b gleich iſt dem Sehewinkel von D gegen die Objecte A, B, wenn auch d nicht genau über D auf dem Boden liegt, weil dieſe Winkelexcentricität bei beträchtlichen Entfernungen und der gleichſam zu einem Punkt werdenden Größe des Meßtiſches als Null zu betrachten iſt. Eben ſo kann man ∠ b f c = dem Sehewinkel B D C und ∠ a e c = ∠ A D C ſetzen. Es kommt hier nur darauf an, die Winkel a d b, b f c, a e c in eine gemeinſchaftliche Winkelſpitze zuſammenzubringen. Dies kann, wo es der Raum des Tiſchblattes geſtattet, alſo geſchehen: Man beſchreibe um das △ a b d einen Kreis, wozu ſich bekanntlich der Mittelpunkt und Halbmeſſer durch Halbirung zweier Seiten und Perpendikularen darauf ꝛc. findet; eben ſo be-

ſchreibe man um das △ bfc einen Kreis; die beiderſeitigen Peripherien ſchneiden einander in d″. Es iſt d″ der gegen △ abc geſuchte Punkt. Denn es iſt ∠ ad″b = ∠ adb (Peripheriewinkel auf gleichen Bogen) und ∠ bd″c = ∠ bfc. Es verſteht ſich übrigens von ſelbſt, daß man von beiden Kreiſen nur kleine Bogenſtücke in der Gegend des muthmaßlichen Durchſchnittspunktes d″ zu beſchreiben braucht, und daß man die erwähnte Hülfsconſtruction mit Bleifeder ſo zart und fein als möglich ausführen müſſe, um den Hauptplan, auf dem Tiſchblatt nicht zu verunreinigen. Der gefundene Punkt d″ hat gegen abc dieſelbe Lage, wie der Standort D gegen ABC. Hätte gleich anfänglich das △ abc parallel geſtanden gegen das △ ABC im Felde, ſo würde d″ durch das Rückwärtsziehen der Viſirlinien nicht anders gefunden worden ſeyn. Will man nun ferner zu anderweitigen Beſtimmungen das △ abc in eine zu ABC parallele Lage bringen, ſo lege man das Diopterlineal an eine der Richtungslinien, z. B. d″b, drehe den Meßtiſch durch gröbere und feinere Horizontalbewegung ſo weit herum, bis das entfernte Object B in der Viſirlinie d″b erſcheint; zur Verſicherung ziehe man auch Aa, Cc rückwärts. Wofern ſich beim jetzigen Stand des Tiſches alle drei Viſirlinien im Punkte d″ ſchneiden, ſo liegt abc parallel zu ABC, und es iſt d″ richtig beſtimmt, wenigſtens ohne merklichen Fehler annähernd. Ein weniger geübter Leſer wird wohl thun, die hier bemerkte und in Fig. 83. nur klein bezeichnete Conſtruction, ſich durch eine größere Zeichnung und zwar für verſchiedene Lagen des Ortes D gegen A, B, C mehr zu veranſchaulichen.

IIIte Methode, verſuchsweiſe mittelſt eines dreifüßigen Zirkels oder durchſichtigen Papiers:

Es befinde ſich (Fig. 84.) das kleine Dreieck auf dem Meßtiſch in der fehlerhaften Lage $\alpha\beta\gamma$. Man ziehe von einem nahe dabei gelegenen Punkt d Viſirlinien gegen A, B, C, ſo erhält man auf dem Papier die Sehewinkel von D gegen die Objecte A, B, C. Man ſtelle die Spitzen eines dreifüßigen Zirkel auf α, β, γ, und bringe nun verſuchsweiſe das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ in die Lage abc, ſo daß nehmlich α in die Viſirlinie dA, β in dB und γ in dC fällt; dann iſt offenbar $\triangle$ abc $\#$ $\triangle$ ABC. Dieſe immer leicht ausführbare Operation gewährt bei kleinen Aufnahmen hinlängliche Genauigkeit; ſie hat aber gegen ſich, daß man das auf dem Tiſch conſtruirte Dreieck $\alpha\beta\gamma$ in eine andere Lage abc verſetzen muß. Man könnte indeſſen, wenn $\alpha\beta\gamma$ wegen anderweitig auf dem Plan ſchon aufgetragener Punkte nicht verſchoben werden dürfte, den Punkt d in dieſelbe Lage gegen $\alpha\beta\gamma$ bringen, die er gegen abc hat, indem man an $\alpha\gamma$ das Dreieck acd ſetzte. Geſchieht die Hülfsconſtruction mit zarten Bleilinien, ſo läßt ſie ſich zuletzt vom Papier wieder vertilgen und ganz unmerklich machen.

Auf eine ganz ähnliche doch weniger zuverläßige Weiſe bedient man ſich auch zuweilen eines durchſichtigen, gewöhnlich mit Wachs oder Oel ſchwach eingetränkten, Papiers. Man befeſtigt nehmlich durch Nadeln oder Mundleim oder auf andere Art ein verhältnißmäßig großes Stück des durchſichtigen Papiers über dem Meßtiſchüberzug, ziehet von einem willkührlich angenommenen Punkt d Viſirlinien nach A, B, C auf jenes Papier, welches ſich aber hierbei nicht verſchieben darf, und ſtellt daſſelbe nun verſuchsweiſe ſo über das

ehlerhaft liegende Dreieck $\alpha\beta\gamma$, daß die Visirlinie dA urch α, die zweite dB durch β, die dritte dC durch läuft; dadurch kommt d'' in dieselbe Lage gegen $\alpha\beta\gamma$, die d gegen abc oder D gegen ABC. Der Punkt l'' wird auf dem Meßtischblatt durch einen feinen Nadelstich bemerkt. Kleine Irrthümer auf dem geometrischen Grundriß und verhältnißmäßig größere für die wahren Entfernungen sind bei diesem Verfahren noch weniger zu vermeiden, als bei allen übrigen Methoden für das in Rede stehende in der Ausübung immer sehr schwierige Problem. Es sind dafür auch einige

IV. Annäherungsmethoden

ausgedacht worden, unter welchen besonders die von Lehmann im 2ten Theil seiner Schrift, worin er verschiedene neue beachtenswerthe Winke über den Gebrauch des Meßtisches ertheilt, beschriebene Verfahrungsart sich ausgezeichnet. Den wahren Punkt d, welcher bald rechts, bald links, bald innerhalb des fehlerzeigenden Dreiecks liegt, findet Lehmann nicht auf einem direct geometrischen Wege, sondern durch eine an sich mit keinem Instrumente bestimmbare Construction bloß nach dem Augenmaß, folglich tentando. Nachdem ein solcher Punkt auf dem Papier muthmaßlich angenommen worden, muß seine Lage durch Rückwärtsziehen der Visirlinien Aa, Bb, Cc geprüft, und falls wieder ein, jetzt schon kleineres, fehlerzeigendes Dreieck zum Vorschein kommt, die vorige ungefähre Construction tentando wiederholt werden, bis zuletzt jenes Dreieck verschwindet. Lehmann's Gedanke ist, an sich betrachtet, sinnreich und bei einer so großen Uebung und Geschicklichkeit, als er in Meßtischaufnahmen besaß, auch wohl ausführbar, aber rein geometrisch kann seine Auflösung so wenig heißen, als eine Trisection der Winkel durch Versuche und Augenmaß. In der Voraus-

ſetzung, daß meine Leſer auch das Lehmannſche Werk (Zweite Auflage vom J. 1816) wegen ſeiner lehrreichen, originellen Anweiſung zur Situations- und Terrain-Bezeichnung, ſo wie wegen der ihm beigegebenen ganz meiſterhaften, in ihrer Art ganz einzigen Situationspläne entweder ſchon haben oder ſich unbedenklich noch anſchaffen werden, erlaube ich mir, in Hinſicht jener Annäherungsmethode auf das Original ſelbſt zu verweiſen. Lehmann's Vortrag iſt zwar für die meiſten Leſer etwas dunkel, aber die Sache ſelbſt bei weitem ſo hoch und ſchwierig nicht, als ſie auf den erſten Anblick Anfängern erſcheinen mag. Mit einiger Geduld und Aufmerkſamkeit wird man bald den Sinn derſelben faſſen und in Anwendung ſetzen können. In einem Anhang jener Schrift (2te Aufl.) giebt ein andrer practiſcher Geometer eine eigne Methode zum Rückwärtseinſchneiden mit einem einfachen Beweis, der aber die Richtigkeit der Auflöſung nicht erhärtet.

Wir wollen nun noch eine fünfte Auflöſung unſerer Aufgabe kennen lernen, theils weil ſie rein geometriſch und elegant, theils auch, weil ſolche in vielen Fällen recht brauchbar iſt.

§. 115.

Vte Methode vermittelſt einer directen geometriſchen Conſtruction:

Es ſtelle (Fig. 86.) ABC das gegebene Dreieck im Felde vor, abc das kleine ihm ähnliche Dreieck im Felde vor, abc das kleine ihm ähnliche Dreieck auf dem Meßtiſch im Standort D, hier außerhalb ABC; der Meßtiſch ſey über D ſo orientirt, daß △ abc ∥ △ ABC, und d der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunkt der rückwärts gezogenen Viſirlinien. Man ge-

enke ſich durch A B D einen Kreis, und die Sehnen
A E, B E und zu dieſen parallel a e, b e. Da alle
Peripheriewinkel auf gleichen Bogen in einem Kreiſe
leich, ſo iſt der Sehewinkel m = m' = e b a (wenn
△ a b c # △ A B C), und der Sehewinkel n = n'
= e a b; eben ſo iſt ∠ p' = p und q' = q, daher
uch im kleinen Dreieck ∠ a b d = ∠ a e d und ∠ b a d
= ∠ b e d.

Geben nun wegen nicht paralleler Lage des △ a b c
egen △ A B C die rückwärtsgezogenen Viſirlinien ein
ehlerzeigendes Dreieck, ſo liegen an ſelbigem deſſenun-
eachtet die wahren Sehewinkel von D gegen A, B, C,
ehmlich m und n. Wie nun auch △ a b c auf dem
Meßtiſch liegen mag, ſo kann man immer an a b die
Winkel a b e = m und b a e = n anſetzen; ſo erhält
man den Durchſchnittspunkt e. Zieht man durch c e
rückwärts eine unbeſtimmt lange gerade Linie, ſo liegt
in dieſer der geſuchte Punkt d. Trägt man endlich an
a b den ∠ a b d = ∠ a e d, ſo erhält man den Durch-
ſchnittpunkt d in einer Lage gegen a b c, wie man ſolche
finden würde, wenn △ a b c # △ A B C ſtände. Zur
Verſicherung kann man noch ∠ b a d = ∠ b e d an a b
ſetzen; wird dadurch derſelbe Punkt d, wie zuvor, er-
halten, ſo iſt die geometriſche Conſtruction richtig voll-
bracht. Endlich kann man an d c das Diopternlineal
anlegen, und ohne ſeine Lage zu verrücken, den Tiſch
ſo weit herumdrehen, daß man in der Viſirebene d c
das entfernte Richtobject C erblickt. Schneiden bei die-
ſem Stand des Tiſches alle drei Viſirlinien A a, B b, C c
einander in dem vorher beſtimmten Punkt d, ſo iſt
△ a b c # △ A B C, und es giebt d die wahre Lage
des Standorts D gegen A B C.

Könnte man ſich auf die richtige Feſtſetzung des
Punktes e immer verlaſſen, ſo wäre die weitere Beſtim-
mung des Punktes d durch Antragung der beiden oder

eines der Winkel unterhalb ab nicht einmahl nöthig; man dürfte nur den Tisch so stellen, daß in der Visirebene ec das entfernte Object C gesehen würde, und dann ferner die Visirlinien Aa, Bb rückwärts ziehen, um d zu erhalten. Ein Zeichen der Richtigkeit wäre es dann, wenn beide Linien Ba und Aa die auf dem Meßtisch verlängerte ce in einem und demselben Punkte d schnitten. Nach Befinden der Umstände mag man zu mehrerer Bequemlichkeit das letztere Verfahren gebrauchen, um sich die geometrische Construction der zwei Winkel abd und bad zu ersparen.

Noch leichter geschieht die Ansetzung der Sehewinkel m und n an ab und somit die Bestimmung des Richtpunktes e, ohne Zirkel und Lineal, auf folgende, so viel mir bekannt von keinem andern Schriftsteller erwähnte, Art:

Man lege das Diopternlineal an ab, und drehe den Meßtisch über D durch gröbere und feinere Horizontalbewegung so weit herum, daß in der Visirebene ab das entfernte Object B gesehen wird; nachdem man den Tisch in dieser Stellung befestigt, bewege man das Diopternlineal um den Punkt a so weit fort, bis man in der Visirebene das zweite links liegende Object C siehet; man ziehe eine Visirlinie von a gegen C hin, so ist ∠Cab oder eab = ∠n an ab in a hinlänglich genau angelegt. Denn die Winkelexcentricität, welche daher entstehen kann, daß bei der Umdrehung des Tisches und der Richtung der geraden ab gegen B der Punkt a nicht genau über D auf dem Boden liegt, kommt bei der Kleinheit des Meßtisches gegen beträchtliche Entfernungen der Oerter A, B, C in keine Betrachtung. Eben so kann man ba nach der entgegengesetzten Seite gegen das Object A richten, und an ab in b den Winkel Cba oder eba = m durch Ausziehen der Visirlinie ansetzen. Die beiden Visirlinien aC

und bC geben den Richtpunkt e, wenn er sonst nicht zu nahe an c fällt, zuverläßig genug für kleinere Detailaufnahmen. Wie vorher gezeigt wurde, bestimmt man dann weiter den Punkt d, indem man ec gegen C einrichtet, beliebig verlängert, und durch die rückwärtsgezogenen Visirlinien Aa, Bb schneidet ꝛc.

Es lassen sich diese, so wie die vorher gezeigten Arten des Rückwärtseinschneidens, auch die Lehmannsche Annäherungsmethode, durch besondere Meßtischmodelle sehr anschaulich und deutlich machen. Ein solches instructives Modell kann man sich selbst anfertigen, indem man ein weißes Papier, etwa von 1 Quadratfuß, oder noch größer, über einen Rahmen ausspannt, darauf ein größeres Dreieck ABC zeichnet, und in einer hinlänglichen Entfernung davon ein kleines mit weißem Papier überzogenes Quadrat von Pappe, worauf ein viel kleineres △abc ∼ △ABC gezeichnet ist, so aufsetzt, daß es sich um seinen Mittelpunkt drehen und in jede beliebige Lage gegen ABC bringen läßt u. s. w.

Liegt der Standort D innerhalb des Dreiecks ABC im Felde (Fig. 87.), so fällt auch, bei parallelem Stand des ähnlichen △abc, der Durchschnittspunkt d der rückwärts gezogenen Visirlinien Aa, Bb, Cc innerhalb abc, der Richtpunkt e hingegen außerhalb desselben. Man denke sich, wie im vorigen Fall durch ABd einen Kreis gelegt ꝛc., so wird hier der Richtungswinkel n' nehmlich ABE oder abe = AdE = dem Nebenwinkel von adc, welches der Sehewinkel vom Standort D gegen die entfernten Objecte A und C ist. Eben so wird der zweite Richtungswinkel n' nehmlich BAE oder bae = BdE = dem Nebenwinkel von bdc, welches der Sehewinkel von D gegen die Objecte B und C ist. Man müßte demnach an ab in a den ∠bae = 180° — ∠bdc und in b den ∠abe = 180° — ∠adc setzen, um den Richtpunkt e zu erhalten, so-

denn e c gegen C hin einrichten, und durch die rückwärtsgezogenen Visirlinien A a, B b schneiden. Findet sich so nur ein Durchschnittspunkt d innerhalb des kleinen △ a b c, so ist dies ein Beweis für die parallele Stellung des △ a b c gegen △ A B C. An a b läßt sich hier ∠ b a C = ∠ b d c, und damit zugleich ∠ b a e = ∠ b d e durch einen ähnlichen Kunstgriff, wie im vorerwähnten Falle (Fig. 86.), ohne Zirkel und Lineal antragen, indem man durch Anlegung des Dioptrenlineals und schickliche Drehung des Meßtisches a b gegen B hin einrichtet, so daß b zwischen a und B kommt, und hierauf von a eine Visirlinie gegen C hin ziehet, welche rückwärts verlängert den ∠ b a e = ∠ b d e giebt; eben so macht man ∠ a b e = ∠ a d e; man vergleiche, was über diesen Act oben bemerkt worden. Eine weitere Erklärung thut nicht Noth; der Leser kann sich das Verstehen durch etwas größere Figuren sehr erleichtern, noch mehr durch ein Meßtischmodell, am besten durch eine wirkliche Meßtischaufnahme im Felde. Aus dem bisher Gesagten lassen sich nun die übrigen noch möglichen Fälle, z. B. wenn A, B, C in gerader Linie liegen und der Standort D außerhalb derselben und ihrer Verlängerung ꝛc., ganz leicht erklären.

Je näher (Fig. 86.) E gegen C rückt, desto unsichrer erhält man durch die Richtungslinie c e die parallele Lage des △ a b c zu △ A B C und den gesuchten Punkt d. Fällt E mit C oder e mit c zusammen, oder wird ∠ m = ∠ A B C, welches immer geschieht, wenn der Standort D, also auch d auf dem Meßtisch, in der Peripherie des durch A B C laufenden Kreises liegt, so bleibt die Lage von d gegen a b c oder von D gegen A B C unbestimmt, der Meßtisch mag richtig orientirt seyn oder nicht; die rückwärts gezogenen Visirlinien werden dann immer in einem gemeinschaftlichen Punkt jener Kreisperipherie zusammenlaufen. In diesem Falle

bleibt auch die trigonometrische Auflösung dieses Problems unbestimmt, wie wir in der Folge sehen werden. — Je weiter der Standort D von der Peripherie des durch A B C gehenden Kreises liegt, desto bestimmbarer wird er durch alle Methoden des Rückwärtseinschneidens, auch durch die Lehmannsche Annäherung; denn bei gleich fehlerhaftem Stande des Tisches wird das fehlerzeigende Dreieck dann größer, als wenn D jener Kreisperipherie näher liegt. Ob sich aber D in der Peripherie des Kreises durch A B C befinde, erfährt man dadurch, daß die rückwärtsgezogenen Visirlinien A a, B b, C c bei verschiedenen Stellungen des △ a b c sich immer in einem Punkte schneiden.

In einem solchen Fall muß man die Lage des Ortes D auf dem geometrischen Grundriß (Charte) nicht durch A B C, sondern durch drei andere bereits in Grund gelegte Richtobjecte mittelst des Rückwärtseinschneidens bestimmen. Sind mehrere Punkte im Felde auf dem Plan des Meßtisches entworfen, so thut man wohl, die Lage des neuen Standorts D nicht bloß nach drei Objecten A, B, C zu fixiren, sondern die dafür gefundene Lage auch nach mehreren anderen Objecten zu prüfen und zu berichtigen. Hat man mehrere Dreiecke im Felde zum Rückwärtseinschneiden gebraucht und etwas abweichende Durchschnittspunkte bekommen, so wählt man für die gesuchte Lage des Ortes D den Punkt d, welchen die meisten Dreiecke geben. Uebrigens wird hier, wie auch beim Vorwärtseinschneiden, der Punkt d um so unzuverläßiger gefunden, je spitzer die Sehewinkel m und n (Fig. 86.) ausfallen. Hat man daher die Auswahl, — man hat sie aber nicht immer, — so nimmt man zur Festsetzung des Punktes d drei nicht allzuweit entlegene Richtobjecte A, B, C so, daß die Winkel m und n nicht viel kleiner als 45° werden. Einige hieher gehörige practische Bemerkungen findet

man in Lehmann's Schrift 2ter Th. p. 19 sqq.

Auf die bisher vorgetragenen Meßtischaufgaben gründet sich jedes mehr oder weniger zusammengesetzte Aufnehmen und Trianguliren mit diesem höchst nützlichen Werkzeug. Einige practische Anwendungen jener Aufgaben wollen wir in der 5ten Abth. dieser Schrift kennen lernen, und dann zugleich den Gebrauch einiger andern Werkzeuge: der Bouſſole, des reflectirenden Halbkreises ꝛc. zur Auflösung derselben Aufgaben betrachten.

Indirecte Distanzenmessung und Aufnahmen mittelst trigonometrischer Berechnung.

§. 116.

Zu Aufnahmen kleinerer Erdstrecken, etwa von einigen Quadratmeilen, reicht der Meßtisch, mit gehöriger Vorsicht gebraucht, immer aus. Soll dagegen von einer großen Erdstrecke, einem weit ausgedehnten Lande, eine Charte entworfen werden, so ist es unumgänglich nothwendig, zuerst weit entfernte Hauptpunkte des Landes vermittelst einer oder mehrerer Basen und der gemessenen Winkel, welche die fixen Punkte mit einer oder der andern Standlinie bilden, durch trigonometrischen Kalkul zu bestimmen. Die Seiten eines Dreiecknetzes, welches man dermaßen gleichsam über die ganze große Erdstrecke legt, können eine Länge von 1 bis 3 Meilen haben. Nachdem dies Dreiecknetz erster Größe (erster Ordnung) mit Zuziehung der vollkommensten Winkelmesser, als: Bordaschen Kreise, repetirenden Theodoliten ꝛc. genau erhalten worden, so können innerhalb eines jeden großen Dreiecks wieder kleinere Dreiecknetze der zweiten Ordnung mit Hülfe einfacherer Winkelmesser, als:

Astrolabien, nicht repetirender Theodoliten, kleiner Sextanten ꝛc. eingeschaltet werden; die Seiten dieser zweiten Dreiecksordnung können etwa ½ bis 1 Meile lang seyn. Endlich kann man zwischen diese Dreiecke der zweiten Ordnung noch kleinere Dreiecke der dritten Ordnung entweder mit gemeinen Winkelmessern oder noch bequemer und zuverläßig genug mit dem Meßtisch, nach den vorher gezeigten Methoden, bringen. Das weitere Detailliren des Terrains zwischen den kleinen Dreiecken der dritten Ordnung kann dann weiter mit dem Meßtisch, der Boussole und durch andere noch unvollkommenere Mittel vollendet werden.

So nützlich und bequem (weil alle Rechnung dabei erspart wird) nun auch der Meßtisch zu kleinern Weiten- und Ortsbestimmungen ist, so unsicher würde er zur Gründung der Dreiecknetze erster und zweiter Ordnung werden. Jede trigonometrische Bestimmung von Dreiecken, Distanzen ꝛc. muß überhaupt genauer zu erhalten seyn, als solche mit dem Meßtisch seiner Natur nach erreichbar ist. Denn bei gleicher Genauigkeit der Basismessung kann man Winkel immer zuverläßiger messen, als auf dem Meßtisch geometrisch construiren; ferner findet die Unsicherheit der auf letzterem bestimmten Punkte, wegen des immer sehr kleinen verjüngten Maßstabes und wegen der unter etwas spitzen Winkeln zusammenlaufenden Visirlinien, bei trigonometrischen Bestimmungen durchaus nicht Statt. Man darf deshalb aus übertriebener Vorliebe für den Meßtisch seinen Gebrauch nicht zu weit ausdehnen, wie es von einigen Geometern geschehen, wenn man nicht Gefahr laufen will, statt einer richtigen Charte ein Gewebe von geometrischen Unwahrheiten (falschen Lagen der Oerter) zu erhalten.

Auch kleinere Distanzen findet man durch eine trigonometrische Operation immer annähernder, als mit

dem Meßtisch. Wo es daher mit einem gleichen Aufwand von Zeit und Kosten geschehen kann, wo es die Umstände erlauben oder sogar gebieten, — denn nicht überall kann der Meßtisch angewendet werden, — da wird man sich einer Winkelmessung und einer trigonometrischen, eben nicht schwierigen, Rechnung recht gern unterziehen, um damit ein genaueres Resultat zu gewinnen.

Je zuverläßiger aber die data zu dieser Rechnung, nehmlich eine Seite (Basis) und die zwei gemessenen Winkel, überhaupt drei bestimmende Stücke eines Dreiecks gegeben sind, desto richtiger wird auch das berechnete Resultat ausfallen.

So wie es bei Meßtischaufnahmen zweierlei Methoden, die des Vorwärts- und die des Rückwärtseinschneidens giebt, so auch bei trigonometrischen Bestimmungen der Distanzen und Lagen der Oerter auf der Erde. Die zwei einfachen Hauptfälle, worauf sich alle übrigen zusammengesetztern gründen, werden nehmlich seyn:

a) aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks ein viertes (als die gesuchte Größe) oder auch alle drei übrigen zu berechnen;

b) die Lage eines vierten Punktes D gegen ein gegebenes Dreieck A B C mit Hülfe der bei D gemessenen Sehewinkel zu berechnen.

Der trigonometrische Kalkul bleibt übrigens derselbe, die zu berechnenden Dreiecke mögen in einer horizontalen, oder schiefgeneigten oder aber in einer Vertikalebene liegen. Bei den allermeisten geodätischen Arbeiten kommen jedoch nur horizontalliegende Dreiecke vor, und wenn die Richtobjecte, welche ein solches Dreieck bilden, nicht in einer Horizontalebene liegen, so werden solche auf den Horizont eines der Eckpunkte (als Standort) reducirt. Wir lassen nun die einfachern trigonometri-

schen Hauptaufgaben, als Fundament jeder größern und kleinern Triangulirung, mit den brauchbarsten Auflösungsmethoden, folgen.

§. 117.

Aufgabe. (Fig. 75.)

Die Horizontalweite der Oerter A, B läßt sich, wegen eines Zwischenhinderuisses, z. B. eines Gewässers, Berges ꝛc., directe nicht messen; die Grenzpunkte A und B sind aber zugängig, und man kann in schicklicher Lage seitwärts AB einen Standort C finden, von wo aus man nach A, B visiren und in gerader Richtung messen kann.

Auflösung: Man messe $CA = b$, $CB = a$ und den Sehewinkel $ACB = C$. Nach einer Aufgabe der ebenen Trigonometrie (§. 19.) wird die gesuchte Weite $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos. C}$ oder ꝛc.

Es würde zu weitläufig seyn, erst die Winkel bei A, B und darnach die Länge AB zu berechnen, wenn bloß letztere verlangt wird.

Liegen die Oerter A und B nicht in der durch C gelegten Horizontalebene, und wird der wahre gerade Abstand derselben verlangt, so muß man den schiefgeneigten Winkel ACB und die wahren Weiten CA, CB messen, welches immer schwerer fällt, als die Messung der horizontalen Abstände CA, CB; den schiefen Winkel ACB mißt man am bequemsten mit einem Sextant. Mehrentheils wird aber der horizontale Abstand der Oerter A, B verlangt; dann müssen als data der Berechnung die horizontalen Weiten CA, CB mit Meßkette oder Maßstäben, so wie der auf den Horizont von C reducirte Winkel ACB gemessen werden. Astro-

labien mit gemeinen Dioptern, vollkommener mit Fernrohr als Kippregel, noch zuverläßiger ein Repetitionstheodolit geben den reducirten Winkel unmittelbar. Braucht man aber einen Sextant, so ist eine dreifache Winkelmessung und eine besondre Berechnung nöthig (§. 101.), um jenen Horizontalwinkel zu erhalten. Es wird auf den geforderten Grad der Genauigkeit für die gesuchte horizontale oder schiefe Weite AB ankommen, wie weit man die Vorsicht und Annäherung im Ausmessen der bestimmenden Weiten und Winkel treiben müsse.

§. 118.

Aufgabe. (Fig. 88.)

Der horizontale (oder auch wahre) Abstand zweier Oerter A, C, von denen bloß einer A zugängig, werde indirect trigonometrisch bestimmt, überhaupt die Lage eines oder mehrerer Punkte gegen eine bekannte Basis AB.

Auflösung: Man wähle seitwärts einen Standort B, von wo aus man nach A und C hin ungehindert visiren, und nach A messen kann. Nun sey gemessen $AB = c$, $\angle CAB = A$, $\angle CBA = B$, daher auch $\angle C$ bekannt; so wird:

$$AC = \frac{c \,.\, \sin. B}{\sin. C}, \text{ eben so } BC = \frac{c \,.\, \sin. A}{\sin. C.}$$

Ein Beispiel in Zahlen (die Weiten in Ruthen- oder Fußmaß) kann sich jeder Leser selbst ansetzen und berechnen.

Wenn man es in seiner Gewalt hat, so nimmt man die Standlinie ungefähr so lang, wie AC, und in einer solchen Lage gegen C, daß $\triangle ABC$ nahe

eichseitig wird. Beträchtliche Abweichungen von die= : Regel lassen sich wohl auf dem Papier aber nicht der wirklichen Ausübung vermeiden; auch haben sehr itze Winkel bei trigonometrischer Bearbeitung dieser ıfgabe keinen so nachtheiligen Einfluß auf das gesuchte ıdresultat, als bei einer geometrischen Construction t dem Meßtisch.

In Hinsicht des horizontalen und wahren Abstan= s AC — gewöhnlich verlangt man ersteren — gilt, s in der vorigen Aufgabe davon gesagt worden. äre AC die zu bestimmende Breite eines Flusses, lche Aufgabe oft vorkommt, so würde die an AC he senkrecht zu setzende Basis AB insgemein eine r mäßige Länge zu haben brauchen. Will man diese reite AC nur ungefähr bestimmen, so mißt man AB hl nur mit Schritten und die Winkel bei A und B t einem gemeinern Winkelmesser bis auf 3 — 5 Min. nau.

Bisweilen kann man sich weder in A noch in C fstellen, sondern nur zwischen diesen Oertern oder er in der Verlängerung von AC. Für den Zwischen= ndpunkt D müßte man die Basis BD und die Win= CDB, ADB, CBD, ABD messen. Hieraus ße sich durch eine Doppelrechnung CD und DA, mit= n auch AC finden. Für den Standpunkt E in der erlängerung von CA würde man die Basis EB und e Winkel E, EBA, EBC messen, hiernach sodann EC d EA, mithin auch AC = EC — EA berechnen.

Wenn die Basis AB einmahl recht genau ausge= essen worden, so läßt sich dann durch eine Winkelmes= ng bei A und B die Lage jedes andern Punktes, z. B. , L, gegen jene, eben so wie des Punktes C, durch Winkelbeobachtungen bei A, B ꝛc. finden, folglich auch ie gegenseitige Lage aller um AB herum liegenden ichtpunkte C, G, L u. s. w. auf einer Charte.

Es ist diese Aufgabe die wichtigste und gleichsam das Hauptfundament aller größern und kleinern Triangulirung, wie wir in der 6ten Abth. sehen werden. Zur Prüfung und Berichtigung der bei A und B gemessenen Winkel pflegt man bei großen Operationen, wo es irgend möglich, auch noch den dritten Winkel eines jeden Dreiecks, z. B. C, zu messen.

§. 119.

Aufgabe. (Fig. 78.)

Eine, auch in ihrer Verlängerung, ganz unzugängige Weite AB, werde mit Hülfe einer bekannten Seiten-Basis CD trigonometrisch bestimmt.

Auflösung: Man messe eine gegen AB schicklich liegende und genugsam lange Standlinie $CD = a'$ (Ruthe oder Fuß), ferner die Sehewinkel $ADC = \alpha$, $BDC = \beta$, $BCD = \gamma$ und $ACD = \delta$. Die Messung von je zwei Winkeln bei D und C ist nicht viel weitläufiger, als die eines einzigen. Allein die trigonometrische Berechnung wird mühsamer, weil sie aus drei Acten besteht.

Zuerst muß im $\triangle DCB$ nach den gegebenen datis die Seite,

$$DB = \frac{a \,.\, \sin.\ \gamma}{\sin.\ B},$$

sodann im $\triangle DCA$ . . . . die Seite,

$$DA = \frac{a \,.\, \sin.\ \delta}{\sin.\ A},$$

endlich im $\triangle ADB$ aus den berechneten Seiten DB, DA und dem eingeschlossenen Winkel $ADB = \alpha - \beta$ die Weite AB berechnet werden. Nach §. 19. erhält man für AB folgenden Ausdruck in den gegebenen Größen.

$$B = a\sqrt{\left\{\left(\frac{\text{Sin.}\gamma}{\text{sin.B}}\right)^2 + \left(\frac{\text{Sin.}\delta}{\text{sin.B}}\right)^2 - \left(\frac{2\,.\,\text{Sin.}\gamma\,.\,\text{sin.}\delta\,.\,\text{cos.}\,(\alpha-\beta)}{\text{Sin. A. sin. B}}\right)\right\}}$$

Jedes Glied unter dem Wurzelzeichen läßt sich besonders logarithmisch bearbeiten; die für die ersten beiden Glieder aufgeschriebenen Logarithmen gebraucht man auch für das dritte Glied, wodurch die Rechnung etwas erleichtert wird.

Beispiel: Gemessen $a = 750'$, $\angle\alpha = 110^0$, $\beta = 37^0\,40'$, $\gamma = 117^0\,30'$, $\delta = 38^0\,20'$.

Der dreifache trigonometrische Kalkul giebt die Länge

$$AB = 750 \,.\, \sqrt{4{,}341984} = 1562{,}8'.$$

Der Leser wolle zur Uebung noch einmahl nachrechnen, und sein Resultat mit dem hier angesetzten vergleichen. Dergleichen schwierige Rechnung muß man, um sicher zu gehen, wenigstens zweimahl anstellen; noch besser, wenn dieselbe von zwei verschiedenen Trigonometern vorgenommen wird.

In Hinsicht der wahren und horizontalen Weite AB gilt auch hier die in § 117. gemachte Bemerkung. Insgemein findet sich der Unterschied zwischen der schiefen und horizontalen Distanz der Oerter A, B sehr gering oder ganz unmerklich, wenn A, B, C, D auf einem nahe ebenen Terrain liegen. Bequemer löst man die hier behandelte Aufgabe mit dem Meßtisch, aber in jedem Fall gewährt der trigonometrische Kalkul mehr Genauigkeit. Bei einer fortgesetzten trigonometrischen Operation wird übrigens die Weite AB schon durch die Lage der Orter A, B gegen die Basis AB nach der Aufgabe §. 118. völlig bestimmt.

§. 120.

Aufgabe. (Fig. 89.)

Die Lage dreier Oerter (Richtobjecte) A, B, C au der Erde, oder das Dreieck ABC ist nach dem Ma seiner Seiten und Winkel gegeben; es soll die Lage ei nes vierten Ortes D, innerhalb oder außerhalb des △ AbC, gegen die Oerter A, B, C durch trigonom trische Berechnung gefunden werden. Es wird voraus gesetzt, daß man bloß von D aus die Sehewinkel α und gegen A und C, gegen B und C messen kann, und daß D nicht in der Peripherie des durch ABC gehende Kreises liege.

Auflösung: Die Maße der Seiten BC = a, AC = b sind nach irgend einem Längenmaß (in Ruthen, Fuße ꝛc.) ingleichen der ∠ ACB = γ bekannt, die Winkel α, β im Standort D gemes sen. Zur Berechnung der Weiten DA, DC, DB sind die Winkel x und y erforderlich. Die Berech nung des einen dieser Winkel, z. B. x, ist eigent lich das Unterscheidende und Schwierige bei dieser wichtigen Aufgabe. Man findet den ∠ x also:

Es ist $\angle y = 360^0 - \angle C - \angle D - \angle x$, oder wenn wir die bekannte Winkelgröße

$360^0 - C - D = \gamma$ nennen,

$y = \gamma - x.$

Ferner ist im △ ACD die Seite $CD = \frac{b \cdot \sin. x}{\sin. \beta}$,

$$\triangle BCD \quad " \quad " \quad CD = \frac{a \cdot \sin.(\gamma - x)}{\sin. \alpha},$$

folglich $\frac{b \cdot \sin. x}{\sin. \beta} = \frac{a \cdot \sin. (\gamma - x)}{\sin. \alpha}$, daher

$$\frac{b \cdot \sin. \alpha}{a \cdot \sin. \beta} = \frac{\sin.(\gamma - x)}{\sin. x} = \frac{\sin. \gamma \cdot \cos. x - \cos. \gamma}{}$$

$$= \sin. \gamma. \cot. x$$

Ludwig [illegible] 1827 heirat in Mainz den 22. 9. Juli Anna Maria Hoffmann.

Cöln, 22. 9. Juli 1827. [illegible]

Bisher war in Mainz nur ein Cöln-grosser im Rhein. Jetzt sind es zwei. Der Rhein-Strom ist bei uns leicht zu durchwaten. Cöln ist tief. Das ist seine Ehre. Es ist eine Ehre, eine tiefe Stadt zu sein. Die Tiefe ist ein Vorzug. Wo Tiefe ist, da ist Geist. Wo Geist ist, da ist Tiefe

spitzen Winkel, und subtrahirt solchen von 180°, um den stumpfen Winkel x zu erhalten.

Der Standort D und die Oerter A, B, C können folgende verschiedene Lagen gegen einander haben, wornach sich die Werthe in obiger Formel modificiren:

a) C liegt oberhalb AB, D unterhalb (Fig. 89); hier ist ∠C kleiner als 180°.

b) C liegt in gerader Linie mit AB (Fig. 90.); hier wird ∠C = 180°; also ∠.γ = 180° — D ein stumpfer Winkel, wenn D ein spitzer, daher wird in unsrer Formel cot. γ = — cot. D negativ, dagegen sin. γ = + sin. D positiv.

c) C und D liegen beide unterhalb oder nach einer Seite von AB (Fig. 91.), folglich wird der Winkel C (nehmlich der convexe ACBD) größer als 180°; derselbe ist = 360° — ∠ACB (spitze Winkel C), welcher letztere als bekannt angenommen wird.

d) Der Standort D liegt innerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 92.), folglich wird der Winkel D (nehmlich der convexe ADBC = α + β) größer als 180°, nehmlich = 360° — ADB, welchen letztern man durch Beobachtung erhält.

e) Der Standort D liegt in der Peripherie des durch ABC laufenden Kreises (Fig. 93.), welcher Fall immer Statt findet, wenn ∠D + ∠C = 180°; hier wird: ∠γ = 180°, folglich cot. γ = — ∞ und sin. γ = o, daher wird unsre Formel diese Gestalt annehmen:

$$\text{Cot. } x = \frac{b \,.\, \text{sin. } \alpha}{o} - \infty,$$ ein unbestimmter Ausdruck.

Es leuchtet ein, daß in diesem Fall die Lage des Standorts gegen ABC unbestimmbar bleibt. Dies

ziebt sich auch aus der geometrischen Construction
ig. 93.), wo der Standort verschiedene Lagen in der
eisperipherie, z. B. D oder D'', haben kann, ohne
ß sich die Sehewinkel α, β ändern u. s. w. Daß der
tandort D in Hinsicht seiner Lage gegen ABC un-
stimmbar sey, wird man immer daraus schließen, daß
: beiden Winkel C und D (der erste ist gegeben, der
eite gemessen) zusammen = 180° sind. In solchem
lle muß man, wenn bereits mehrere Punkte (Dreiecke)
i Felde gegeben sind, zur Bestimmung des Ortes D gegen
ie ein anderes Dreieck, z. B. AEC, welches mit D
cht in einer Kreisperipherie liegt, zu Hülfe nehmen.

Wir haben noch zu bemerken, daß hier, so wie
i der geometrischen Construction auf dem Meßtisch,
i Hinsicht des ersten und dritten Falles (a und c) bis-
eilen eine Zweideutigkeit Statt finden kann. C kann
hmlich jenseits oder diesseits AB gegen D hin liegen,
ne daß sich das △ABC und die Sehewinkel α, β
ndern. Zur sichern Bestimmung des Ortes D gegen
, B, C muß man daher in der Praxis schon vorläufig
issen, welche Stellung C gegen AB diesseits oder jen-
its D habe. Fast immer hebt diesen Zweifel eine be-
eits vorhandene Situationscharte oder ein gutes Au-
enmaß im Abschätzen der Weiten DA, DC, DB;
ur bei geringen Differenzen dieser Weiten kann zu-
eilen Ungewißheit eintreten.

Wir wollen nun an ein paar Beispielen den Gang
er Berechnung nach obiger Formel betrachten.

Es ist gegeben: ∠C(ACB) = 115°, a = 2000', b = 1112'
Gemessen: ∠α = 45°, ∠β = 25°;
daher γ = 175°.

Demnach wird log. b = 3,0461048
log. sin. α = 9,8494850 — 10 (für sin. tot. = 1)

\+ 2,8955898 (Log. d. Zählers vom ersten Glied)

Ferner log. a = 3,3010300.
log. sin. β = 9,6259483 — 10
log. sin. γ = 8,9402960 — 10.

— 1,8672743 (Log. d. Nenners vom ersten Glied)
+ 2,8955898 (Log. d. Zählers vom ersten Glied)

$$+ 1{,}0283155 = \log. \left\{ \frac{b . \sin. \alpha . \sin. tot.}{a . \sin. \beta . \sin. \gamma.} \right\}$$

Diesem Logarithmus entspricht die Zahl 10,673 71 sehr nahe.

Es ist ferner Cot. (γ) 175^0 = — Cot. 5 = — Tang. 85^0 = — 11,430052 . . .

Daher cot. x = + 10,673710 — 11,430052
= — 0,756342.

Da dieser Werth negativ gefunden wird, so muß x ein stumpfer Winkel seyn. Man suche daher den negativen Werth, als positiv betrachtet, unter den natürlichen Cotangenten der Winkel auf, so findet man dafür den spitzen Winkel 52^0 54′; demnach wird der stumpfe

$$\angle x = 180^0 - 52^0\ 54' = 127^0\ 6'.$$

Man findet sodann die Weite DA = 1083, 33′ u. s. w. Gelegentlich will ich hier, einmahl für allemahl, noch erinnern, daß bei solchen Berechnungen durch Logarithmen, wo mehrere negative, (zusammen addirt,) von positiven zu subtrahiren sind, statt der negativen Logarithmen auch ihre dekadischen Ergänzungen (arithm. Complemente)*) als positiv angesetzt wer-

*) Es ist gleichgültig, ob man von einer Zahl eine andre (kleiner als 10) subtrahirt, oder ob man zu ersterer die dekadische Ergänzung der letztern addirt, und von der Summe wieder 10 abzieht, z. B. 17 — 8 = 17 + 2 — 10, weil + 2 — 10 = 8 ꝛc.

n können. Dann addirt man alle Logarithmen zu-
mmen, und subtrahirt von der Totalsumme so viel-
ahl 10 (ganze Zehner), als man dekadische Ergänzun-
n gebrauchte. Die kurze Bezeichnung der dekadischen
rgänzung eines Logarithmus pflegt Compl. Log. noch
rzer C. l. geschrieben zu werden. Man gewinnt nicht
el mit dieser Abänderung des Kalkuls, und ist dabei
ch mehr als bei dem gewöhnlichen Ansatz der Gefahr
sgesetzt, zu irren, weil man die in einer Tafel auf-
suchten Logarithmen gleich von 10,00 . . . subtrahi-
n und so niederschreiben muß. Indessen kommt es
er, wie überall, auf Uebung und eine gewisse Fertig-
it im Sehen und gleichzeitigem Niederschreiben an ꝛc.

Nach dieser Methode der dek. Erg. würde der benangesetzte

$$\log. \left\{ \frac{b \,.\, \sin.\alpha \,.\, \sin.\,tot.}{a \,.\, \sin.\beta \,.\, \sin.\gamma} \right\}$$ also bestimmt werden:

log. b = 3,0461048
g. sin. α + log. sin. tot. = 19.8494850
C. l. a = 6,6989700 (— 10)
C. l. sin. β = 0,3740517 (— 10
C. l. sin. γ = 1,0597040 (— 10)

Diese — 10 können beim Ansatz wegbleiben.

+ 31,0283155 — 30 = 1,0283155.

Zur Belehrung und nochmahligen Nachrechnung für weniger geübte Leser möge hier noch ein Beispiel mit dekadischem Ansatz stehen. Wir wollen den vierten Fall (Fig. 92.) wählen, wo der Standort D innerhalb des gegebenen Dreiecks A B C liegt.

Es sey gegeben: a = 3796 (Ruthen oder Fuß ꝛc.)
b = 2514,
∠C (A C B) = 65° 7′,
gemessen: ∠α = 113° 20′,
= ∠β = 135° 19′, hieraus ergiebt sich
∠γ = 46° 14′.

Nach unsrer Formel wird das erste Glied logarithmisch also bearbeitet:

$$\begin{aligned} \log.\ b &= 3{,}4003653 \\ \log.\ \sin.\ \alpha + 10 &= 19{,}9629449 \\ C.\ l.\ a &= 6{,}4206738 \\ C.\ l.\ \sin.\ \beta &= 0{,}1529286 \\ C.\ l.\ \sin.\ \gamma &= 0{,}1413649 \\ \hline + 30{,}0782775 &- 30 \\ = 0{,}&\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dazu gehört die Zahl + 1,197505 (oder 6)
Ferner ist Cot. γ = + 0,9578494.

Also Cot. x = + 2,1553544

Folglich ist der spitze W. x = 24° 53′ 22″ sehr nahe. In obigem Ansatz kann man log. sin. tot. = 10 immer weglassen, und dafür in der Totalsumme eine 10 weniger streichen, nehmlich — 20 statt — 30 setzen u. s. w.

§. 121.

Zweite Auflösung der vorigen.

Aufgabe. (Fig. 89.)

Da diese Aufgabe, von Manchen die Pothenotsche genannt, weil solche nach Dupain de Montesson (Vermessungskunst) zuerst von Pothenot gründlich behandelt worden seyn soll — die erste Idee dazu mag wohl viel älter seyn — in der niedern und höhern Erdmessung sehr wichtig und brauchbar wird, so haben sich damit mehrere Geometer beschäftigt; unter diesen besonders der scharfsinnige Lambert. Die oben gegebene Formel ist wesentlich die von Lambert gebrauchte. Sie hat jedoch, ungeachtet ihrer einfachsten Gestalt,

die große Unbequemlichkeit, daß sie sich wegen ihrer Zusammensetzung aus 2 Gliedern nicht ganz logarithmisch bearbeiten läßt, und eine besondre Tafel der natürlichen trig. Linien erfordert. Man hat sich deshalb zu verschiedenen Zeiten bemüht, jene Formel so umzugestalten, daß der gesuchte Winkel x sich durch einen bloß logarithmischen Kalkul, ohne eine Tafel der natürlichen Winkelfunctionen, bequemer finden lasse. Indessen ist dadurch bis jetzt für die Abkürzung der Rechnung selbst wenig oder gar nichts gewonnen worden. Der Merkwürdigkeit halber, und weil man in der Praxis bei einiger Uebung wirklich recht guten Gebrauch davon machen kann, will ich hier die logarithmische Auflösung von dem berühmten Geometer Delambre beigeben. Unser verdienstvolle Landsmann, der Astronom Dr. Burkhardt, ertheilte uns Deutschen dieselbe zuerst mit einem Beispiel in Zach's Monatl. Correspondenz 1801. p. 360, wie es schien, als eine ihm eigne Methode, berichtigt indessen in einem spätern Stück jener Zeitschrift seine Anzeige dahin, daß schon früher Delambre im Wesentlichen dieselbe Formel gefunden habe, und also diesem die Ehre der Erfindung gebühre.

Burkhardt giebt am angeführten Orte die Auflösung nur abgebrochen in ein paar Zeilen ohne allen Beweis. Ich will solche hier mit etwas veränderter, zu unsern Figuren passenden, Buchstabenbezeichnung hersetzen, und durch einen, wie ich glaube, einfachen, jedoch etwas versteckt liegenden, Beweis erläutern; der Beweis von Delambre selbst ist mir in der That nicht bekannt, wahrscheinlich kann er aber von dem meinigen nicht viel abweichen.

Es sey (Fig. 89.) ABC das gegebene Dreieck, D der Standort, α und β die gemessenen Sehewinkel, $\angle x$ der gesuchte ꝛc.

$$\text{Es ist } CD = \frac{a \,.\, \sin. y}{\sin. \alpha} = \frac{b \,.\, \sin. x}{\sin. \beta},$$

$$\text{folglich } \frac{\sin. y}{\sin. x} = \frac{b \,.\, \sin. \alpha}{a \,.\, \sin. \beta}.$$

1) Man setze $\text{tang. } \varphi = \frac{b \,.\, \sin. \alpha}{a \,.\, \sin. \beta}$. (I.)

Nach diesem Ausdruck suche man nehmlich den Hülfswinkel φ logarithmisch, welches immer möglich, da die Tangenten jede Größe von o bis ∞ haben können. Man rechnet hier also:

log. tang. φ = log. b + log. sin. α + 10
— (log. a + log. sin. β) oder = log. b + log.
sin. α + C. l. a + C. l. sin. β — 10 (dek. Ergz.

So findet man unter den Logarithmen der Tangenten den $\angle \varphi$.

Da ferner $\text{tang. } \varphi = \frac{\sin. y}{\sin. x}$, so wird $\frac{1 + \text{tang. }\varphi}{1 - \text{tang. }\varphi}$
$= \frac{\sin. x + \sin. y}{\sin\ x - \sin. y}$, oder nach den trigon. Formeln

43. 33. (§. 8.)

$$\text{tang. } (45^0 + \varphi) = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(x + y)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(x - y)}.$$

Da die Winkel C und D bekannt, so ist auch $\frac{1}{2}(x + y)$
$= 2R - \frac{1}{2}(C + D) = m$ bekannt; mithin wird
$\text{tang. } \frac{1}{2}(x - y) = \text{tang. } m \,.\, \text{cot. } (45^0 + \varphi)$.

Nun ist $\frac{1}{2}(C + D) = 2R - \frac{1}{2}(x + y)$,

$\frac{1}{2}(C + D) + y = 2R - \frac{1}{2}(x - y)$, also

$\text{tang. } \frac{1}{2}(x - y) = \text{tang. } \{\frac{1}{2}(C + D) + y\}$.

Demnach erhält man durch gehörige Substitution diese Formel:

II) $\text{Tang. } \{\frac{1}{2}(C + D) + y\} =$
$\text{tang. } \frac{1}{2}(C + D) \,.\, \text{cot. } (45^0 + \varphi)$.

So kann man logarithmisch den Winkel $\{\frac{1}{2}(C+D)+y\}$ erechnen; subtrahirt man davon den bekannten Winkel $(C+D)$, so erhält man $\angle y$, und darnach ferner $\angle x$.

Wie man sieht, geschieht die Berechnung des $\angle y$ urch zwei logarithmische Operationen; durch I) wird uerst der Hülfswinkel φ, sodann durch II) der Winkel $(C+D)+y$ und daraus y bestimmt. Schneller ührt diese künstliche Methode wohl nicht zum Ziel, als ie einfachere im §. 120. angezeigte; allein sie gestattet en Vortheil einer rein logarithmischen Behandlung. Uebrigens muß man hierbei die größte Aufmerksamkeit auf die positive und negative Bedeutung der Tang. und Cotang. (nach §. 4.) richten. Auf ganz ähnliche Art, wie $\angle y$, wird $\angle x$ durch diese zwei Operationen gefunden:

I) tang. $\varphi = \frac{a \,.\, \sin.\, \beta}{b \,.\, \sin.\, \alpha}$, darnach berechnet man den Hülfswinkel φ;

II) tang. $\{\frac{1}{2}(C+D)+x\} = \text{tang.}\, \frac{1}{2}(C+D) \,.\, \text{cot.}\, (45^0+\varphi)$, darnach berechnet man $\angle \frac{1}{2}(C+D)+x$, also auch $\angle x$.

Um den Gang der Berechnung auf diesem Wege kennen zu lernen, und zur Vergleichung derselben mit dem im §. 120. gewiesenen Verfahren, wollen wir das dort gebrauchte erste Beispiel auch hier wählen. Setzen wir nehmlich:

$$a = 2000', \quad b = 1112', \quad \angle C = 115^0$$

$$\angle \alpha = 45^0, \quad \angle \beta = 25^0, \quad \text{also}$$

$$\tfrac{1}{2}(C+D) = 92^0\ 30';$$

so wird mit Hülfe der bek. Ergänzungen (Compl.)

log. a = 3,3010300
log.sin.tot.+log.sin.β=19,6259483
l. C. l. b = 6,9538952
C. l. sin. α = 0,1505150—20 (bek.Abzug)

log. tang. φ =10,0313885, daher

$\angle\varphi = 47^0\ 4'\ 7''$.

Ferner iſt tang. $(92^0\ 30' + x)$ = tang. $92^0\ 30'$. Cot. $92^0\ 4'\ 7''$.

log. tang. $92^0\ 30'$ = 11,3599069,
log. cot. $92^0\ 4'\ 7''$ = 8,5577449 — 10 (log. sin. tot.)

Alſo log. tang. $(92^0\ 30' + x) = 9{,}9176518$.

Dazu gehört, weil hier beide Tangenten von $92^0\ 30'$ und von $92^0\ 4'\ 7''$ negativ ſind, und zuſammen ein poſitives Product geben, eine poſitive Tangente von einem Winkel entweder zwiſchen 0^0 bis 90^0 oder zwiſchen 180^0 und 270^0. Zu dem Log. 9,9176518 gehört der ſpitze Winkel: $39^0\ 36'$; derſelbe zu 180^0 addirt, giebt:

$(92^0 + 30' + x) = 219^0\ 36'$ ſehr *nahe*,

folglich wird der geſuchte $\angle x = 127^0\ 6'$, wie er nach der Methode (§. 118.) gefunden wurde.

Dies Beiſpiel mag zur Vergleichung beider Rechnungsarten hinreichen; zugleich kann es dem denkenden Leſer als ein Beleg dienen zu der in §. 4. gegebenen Erklärung von den poſitiven und negativen Werthen der goniometriſchen Funktionen in den vier Quadranten eines Kreiſes und der davon abhangenden Beſchaffenheit der Winkel. Zur poſitiven Tangente, deren Logarithmus 9,9176518, gehören zwei Winkel $39^0\ 36'$ und auch $219^0\ 36'$. Daß letzterer in unſerm Beiſpiel zu nehmen ſey, leuchtet ſogleich ein.

§. 122.

Aufgabe. (Fig. 94.)

Die Lage von drei Oertern (Richtobjecten) A, B, C auf der Erde, oder das Dreieck A B C (Fig. 94.) ist nach dem Maß seiner Seiten und Winkel gegeben. Es soll die Lage von zwei andern Oertern D, E gegen jene bestimmt werden, vorausgesetzt, daß man vom Standort D aus bloß gegen A, C, E und von E aus bloß gegen B, C, D hin visiren, folglich nur die Sehewinkel α, β, γ, δ messen kann.

Auflösung: Es kommt hier, wie in der vorigen Aufgabe, zunächst darauf an, den $\angle x$ bei A zu berechnen, woraus sich sodann $\angle y$, und die Längen D A, D C durch eine einfachere Rechnung ergeben. Der $\angle x$ wird auch hier durch zwei logarithmische Operationen gefunden:

I) $\text{Tang. } \varphi = \frac{a \,.\, \sin.\ \alpha \,.\, \sin.\ \gamma \,.\, \sin.\ \text{tot.}}{b \,.\, \sin.\ \beta \,.\, \sin.\ \delta.}$,

so berechne man den Hülfswinkel φ in Graden, Minuten, Sekunden ꝛc.

Setzt man ferner $(540^0 - \angle C - \angle D - \angle E) = M$, eine bekannte Winkelgröße, so wird:

II) $\text{Tang.}\left(\frac{1}{2}M - x\right) = \text{tang.}\frac{1}{2}M \,.\, \text{cot.}\,(45^0 + \varphi)$,

so berechne man $\angle\left(\frac{1}{2}M - x\right) = D$, und daher $\angle x = \frac{1}{2}M - D$.

Beweis: Auf die einfachste und einleuchtendste Art glaube ich meinen Lesern diesen schönen, auch practisch nützlichen, Satz also demonstriren zu müssen:

$$CD : CE = \sin.\ \gamma : \sin.\ \beta,$$

$$CD = \frac{b \,.\, \sin.\ x}{\sin.\ \alpha} \text{ und}$$

$$CE = \frac{a \,.\, \sin.\ y}{\sin.\ \delta}.$$

Die Summe aller Winkel im Fünfeck ACBED ist $= 6R = 540^0$, also

$$\angle y = (540^0 - C - D(\alpha + \beta) - E(\gamma + \delta) - x).$$

Daher verwandelt sich die obige Proportion in diese:

$$\frac{b \,.\, \sin. x}{\sin. \alpha} : \frac{a \,.\, \sin.(540^\circ - C - D - E - x)}{\sin. \delta} = \sin. \gamma : \sin. \beta.$$

Setzt man $540^0 - C - D - E = M$ (bekannt), so erhält man:

$$\frac{a \,.\, \sin. \alpha \,.\, \sin. \gamma}{b \,.\, \sin. \beta \,.\, \sin. \delta} = \frac{\sin. x}{\sin.(M - x)}.$$

Man setze I) $\text{tang. } \varphi = \frac{a \,.\, \sin. \alpha \,.\, \sin. \gamma \,.\, \sin. tot.}{b \,.\, \sin. \beta \,.\, \sin. \delta}$

und berechne darnach logarithmisch den Hülfswinkel φ.

Hierauf setze man $\text{tang. } \varphi = \frac{\sin. x}{\sin.(M - x)}$

$$= \frac{\sin. x}{\sin. M \,.\, \cos. x - \sin. x \,.\, \cos. M}$$

Daraus folgt vermittelst einer ganz einfachen Substitution:

$$1 - \text{tang. } \varphi = \frac{\sin. M \,.\, \cos. x - (1 + \cos. M) \,.\, \sin. x}{\sin. M \,.\, \cos. x - \sin. x \,.\, \cos. M}$$

$$1 + \text{tang. } \varphi = \frac{\sin. M \,.\, \cos. x + (1 - \cos. M) \,.\, \sin. x}{\sin. M \,.\, \cos. x - \sin. x \,.\, \cos. M}$$

Folglich $\frac{1 - \text{tang. } \varphi}{1 + \text{tang. } \varphi}$ oder nach trig. Formel 43. §. 8.

$$\text{Cotang.}(45^0 + \varphi) = \frac{\sin. M \,.\, \cos. x - (1 + \cos. M) \sin. x}{\sin. M \,.\, \cos. x + (1 - \cos. M) \sin. x}$$

(div. durch cos. x Zähler u. Nenner)

$$= \frac{\sin. M - (1 + \cos. M) \,.\, \text{tang. } x}{\sin. M + (1 - \cos. M) \,.\, \text{tang. } x}$$

(oder wenn man Zähler u. Nenner durch $(1 + \cos. M)$ div.)

$$= \frac{\text{sin. M}}{1 + \text{cos. M}} - \text{tang. x}$$
$$\frac{\text{sin. M}}{1 + \text{cos. M}} + \left(\frac{1 - \text{cos. M}}{1 + \text{cos. M}}\right) . \text{tang. x.}$$

Nun ist $\frac{\text{sin. M}}{1 + \text{cos. M}} = \frac{2 \text{ . sin. } \frac{1}{2}\text{M . cos. } \frac{1}{2}\text{M}}{2 \text{ . cos.}^2 \frac{1}{2}\text{M}}$ (nach Form. 21. 23. §. 8.)

$$= \text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{M}$$

und $\frac{1 - \text{cos. M}}{1 + \text{cos. M}} = \frac{2 . \text{sin.}^2 \frac{1}{2}\text{M}}{2 . \text{cos.}^2 \frac{1}{2}\text{M}}$ (nach Form. 23. 24. §. 8.)

$$= \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\text{M.}$$

Demzufolge wird

$$\text{Cotang. } (45^0 + \varphi) = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} - \text{tang. x}}{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} + \text{tang}^2 \frac{1}{2}\text{M} . \text{tang. x}}$$
$$= \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} - \text{tang. x}}{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} (1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} . \text{tang. x}'}$$

also $\text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} . \text{cot. } (45^0 + \varphi) = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} - \text{tang. x}}{1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} . \text{tang. x}'}$,

oder wenn man Zähler u. Nenner mit cos. x multiplicirt,

$$= \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} . \text{cos. x} - \text{sin. x}}{\text{cos. x} + \text{tang. } \frac{1}{2}\text{M} . \text{sin. x}}, \quad \text{oder}$$

wenn man Zähler u. Nenner mit Cos. $\frac{1}{2}$M multiplicirt,

$$= \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\text{M . cos. x} - \text{cos. } \frac{1}{2}\text{M . sin. x}}{\text{cos. } \frac{1}{2}\text{M . cos. x} + \text{sin. } \frac{1}{2}\text{M . sin. x}}$$
$$= \frac{\text{sin. } (\frac{1}{2}\text{M} - \text{x})}{\text{cos. } (\frac{1}{2}\text{M} - \text{x})} = \text{tang. } (\tfrac{1}{2}\text{M} - \text{x}).$$

Daher II) $\text{Tang. } (\frac{1}{2}\text{M} - \text{x}) = \text{tang. } \frac{1}{2}\text{M}$, cotang. $(45^0 + \varphi)$, welches zu erweisen war.

Beispiel: Gegeben: $a = 173'$, $b = 243'$, $\angle C = 99^0\,41'$,
gemessen: $\alpha = 42^0\,53'$, $\beta = 67^0\,9'$, $\gamma = 83^0\,54'$,
$\delta = 26^0\,37'$.

Hier wird I) $\text{tang. } \varphi = \frac{173 . \sin. 42^0 53' . \sin. 83^0 54' . \sin. \text{tot.}}{243 . \sin. 67^0 9' . \sin. 26^0 37'}$.

Logarithmen des Zählers.	Logarithmen des Nenners.
2,2380461	2,3856063
9,8328331	9,9645069
9,9975340	9,6512966
+ 10,.....	
+ 32,0684132	— 22,0014098
— 22,0014098	
+ 10,0670034 = log. tang. φ.	

Also $\angle \varphi = 49^0\ 24'\ 9''$ sehr nahe.

Ferner ist $M = 540^0 - 320^0\ 14' = 219^0\ 46'$, folglich $\frac{1}{2} M = 109^0\ 53'$; daher wird:

II) $\text{Tang.}(109^0 53' - x) = \text{tang.} 109^0 53' . \cot. 94^0 24' 9''$.

Nun ist log. tang. $109^0\ 53'$ oder log. cot. $19^0\ 53'$
$= 10{,}4416923$
log. cot. $94^0\ 24'\ 9''$ oder log. tang. $4^0\ 24'\ 9''$
$= 8{,}8864326 - 10$ (log. sin. tot.)

log. tang. $(109^0 53' - x) = 9{,}3281249$, also $109^0 53' - x = 12^0\ 1'\ 3''$ sehr nahe, und endlich der gesuchte Winkel $x = 97^0\ 51'\ 57''$.

Nachdem dieser Winkel berechnet, wird ferner $\angle y = 540^0 - C - x - D - E$ bestimmt, sodann aus b, $\angle x$ und $\angle \alpha$ die Weiten DA, DC, aus a $\angle y$ und $\angle \delta$ die Weiten EB, EC, aus DC (oder EC) $\angle \beta$ und $\angle \gamma$ die Weite DE, aus DE, EB und $\angle(\gamma + \delta)$ die Weite DB ꝛc. Die Seite DE kann nun weiter als Basis zu neuen Dreiecksverbindungen benutzt werden.

Wenn, wie wir in der Aufgabe angenommen haben, nur die Sehewinkel α, β, γ, δ gemessen werden können, so hat man zur Auflösung gerade so viel Bestimmungsstücke, als erforderlich sind; eine Prüfung

derselben wird dann nicht möglich, und es gehört hier zu einem richtigen Resultat, nicht allein die richtig gegebene Lage der Oerter A, B, C, sondern auch eine sehr scharfe genaue Messung der Winkel α, β, γ, δ. Kann man aber von D nach B und von E nach A visiren, welches in den meisten Fällen möglich, und daher noch die Winkel CDB und CEA messen, so erhält man hiermit noch mehr Bestimmungsstücke, als nöthig, und damit Prüfungsmittel der berechneten Resultate.

Uebrigens verdient hier noch bemerkt zu werden, daß die Auflösung dieser Aufgabe nicht, wie der einfachern (§. 120.) unbestimmt oder zweifelhaft wird, wenn auch die Oerter D, E in der Peripherie des durch ABC laufenden Kreises fallen, wie man sich durch eine geometrische Construction leicht erklären kann. In so fern hat diese Aufgabe für neue Ortsbestimmungen gegen schon gegebene Oerter entschiedene Vorzüge vor der einfachern vorerwähnten, wenn D oder E in einer unbestimmten oder doch nahe unbestimmten Lage gegen A, B, C stehen.

Die geometrische Construction unsrer Aufgabe, nehmlich die Bestimmung der Punkte D, E gegen ABC mit Hülfe der gemessenen oder auf dem Meßtisch aufgetragenen Winkel α, β, γ, δ durch Kreisdurchschnitte auf dem Papier übergehe ich, als zu wenig genau und unbrauchbar für die Praxis.

Man hat noch mehrere andere, mit den zwei vorgetragenen und erläuterten, verwandte Aufgaben von zusammengesetzterer Beschaffenheit. Da solche aber selbst bei den größten trigonometrischen Operationen (Triangulirungen) wohl nur äußerst selten ihre Anwendung finden, und in dieses Werk seinem Plan zufolge nur das wirklich Practische eingehen soll, so erlaube ich mir hier, mit gutem Grunde, glaube ich, jene Aufgaben wegzulassen, so interessant sie auch, theoretisch betrach-

tet, seyn mögen. Von dieser Art sind unter andern folgende:

Es sind vier Oerter auf der Erde, ihrer Lage nach, gegeben; in drei andern Standpunkten kann man gegen jene gewisse Sehewinkel, aber nicht alle, messen; daraus soll die Lage der drei letztern gegen die vier erstern durch trigonometrischen Kalkul bestimmt werden.

Die vor dem scharfsinnigen Geometer Lambert (im 1sten B. s. Beiträge) aufgelöste:

Es soll die verhältnißmäßige Lage von sechs Oertern auf der Erde A, B, C, D, E, F (Fig. 95.) daraus bestimmt und berechnet werden, daß man in vieren derselben B, D, E, F die Sehewinkel a, b, c, d, e, f, g, h messen kann. Nach der Lambertschen, mühsam zu berechnenden, Formel *) werden die Cotangenten der Winkel FAB und BCD also auch diese Winkel selbst aus den datis abgeleitet, die übrigen Stücke ergeben sich sodann durch einfache Dreiecksberechnung.

Eine andre, ebenfalls von Lambert (s. dessen Beiträge B. I. p. 186.) zuerst behandelte, theoretisch sehr merkwürdige, Aufgabe bestimmt die gegenseitige Lage von acht verschiedenen Oertern auf der Erde aus den Sehewinkeln von vier dieser Oerter aus gegen die übrigen beobachtet.

Der Liebhaber solcher Aufgaben kann nähere Belehrung darüber finden in Lambert's Schriften selbst, oder auch in der fleißig und musterhaft geschriebenen Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch, im 1sten B. p. 175 u. f. Die zweite von mir in §. 121. erläuterte Auflösungsmethode, in-

*) Sie ist aus mehreren Gliedern zusammengesetzt und gestattet demnach keine durchaus logarithmische Behandlung.

gleichen die rein logarithmische der in diesem §. behandelten Aufgabe sind in jener Sammlung nicht anzutreffen.

Höhenbestimmungen durch geometrische Construction, besonders aber durch trigonometrische Berechnung von Dreiecken.

§. 123.

Was man unter der vertikalen Höhe eines Gegenstandes auf der Erde, z. B. eines Berges, Thurmes u. s. w., verstehe, ist jedem Anfänger bekannt. Absolute Höhe eines Gegenstandes bezeichnet den senkrechten Abstand von seiner Spitze (höchstem Punkt) bis auf seine eigne Basis oder Grundfläche; relative hingegen den senkrechten Abstand vom höchsten Punkt bis zu einer durch einen andern bestimmten Ort gelegten, in Gedanken beliebig erweiterten, Horizontalebene. Bei wirklichen Höhenmessungen wird bald die absolute, bald die relative Höhe eines Objectes gesucht. Meistens bezieht man relative Höhen, besonders der Berge, auf den tiefsten Theil einer Gegend, namentlich den Wasserspiegel eines Flusses ꝛc. Seltener, nehmlich in der physischen Geographie zur Vergleichung der beträchtlichsten Berghöhen, gebraucht man als Grundhorizont für die relativen Höhen das Niveau eines nächstgelegenen Meeres.

Directe Höhenmessung läßt sich nur in wenigen Fällen möglich machen. Etwas ähnliches ist die Messung einer Berghöhe mit eingetheilten Maßstäben (Culteliren), wovon im §. 91. gesprochen worden. Indirecte Höhenbestimmungen geschehen entweder durch geo-

metrische Nebenmessungen, oder durch eine trigonometrische Operation. Bei letzterer hängt besonders von der scharfen Messung der Winkel die Genauigkeit des gesuchten Resultats ab. Zur Bestimmung der Vertikalwinkel (Höhen- und Tiefen-Winkel), welche hier vorkommen, dienen mit weniger oder mehr Zuverläßigkeit das Astrolabium, oder ein besondrer Höhenquadrant, der Theodolit mit Höhenkreis, der Sextant mit Libelle oder künstlichem Horizont, zu wenig genauen ökonomischen und militärischen Aufnahmen ein Diopterlineal mit Höhenmaßstäben, oder auch ein kleiner, unlängst von Schmalkalder in London, in Form seiner Handboussole ausgeführter Höhenmesser, dessen Beschreibung man in der Schrift: Das militärische Aufnehmen ꝛc. von Decker — nachsehen kann. Der Schmalkaldersche Höhenmesser giebt aber die Vertikalwinkel höchstens bis auf $\frac{1}{2}$ Grad genau, und kaum dies mit Sicherheit; er ist daher nur in solchen Fällen zu gebrauchen, wo es auf $\frac{1}{2}$ oder 1^0 mehr oder weniger nicht ankommt, wie bei den Böschungswinkeln zur Darstellung der Terrainbeschaffenheit.

Eine andre nicht geometrische noch trigonometrische Methode, Höhen und Höhenunterschiede, besonders der Berge, zu finden, gründet sich auf Barometerbeobachtungen, deren man sich in solchen Fällen zu bedienen genöthigt sieht, wo eine andre Messung nicht möglich oder zu umständlich wird.

Endlich dient auch das sogenannte Nivelliren, theoretisch betrachtet, die einfachste und kunstloseste Methode, zur Bestimmung der Höhenunterschiede zweier oder mehrerer Punkte auf der Erde in Beziehung auf einander oder auch auf den Horizont eines bestimmt angenommenen Ortes.

Von Höhenmessungen durch Barometer, so wie vom Nivelliren, werde ich in der 5ten Abtheilung, hier

aber zuvörderſt von den geometriſchen und trigonometriſchen Methoden für dergleichen Aufgaben handeln.

§. 124.

Aufgabe. (Fig. 96.)

Es werde die abſolute Höhe AB eines zugängigen Gegenſtandes, z. B. eines Thurmes, gefunden; es wird vorausgeſetzt, daß man in der durch B (Baſis der Höhe) gelegten Horizontalebene einen Standort C annehmen darf, von wo aus man nach B hin meſſen und nach A viſiren kann.

Auflöſung:

1) Geometriſche Methoden: ABC iſt ein rechtwinklichtes Dreieck in der durch AB gelegten Vertikalebene. Um nun ohne trigonometriſchen Kalkul die Größe der Kathete AB (geſuchten Höhe) zu erhalten, laſſen ſich verſchiedene Wege gedenken. Sie haben aber insgeſammt für die Praxis keinen großen Werth, daher ich ſolche nur kurz andeuten will.

Kann man von B gegen C hin ſo weit fortgehen, bis bei C der Vertikalwinkel $ACB = \frac{1}{2}R = 45^0$ wird, welches annähernd mit einem Sextant oder einem ähnlichen Werkzeug geſchieht, ſo wird die gemeſſene Horizontalweite CB gleich der geſuchten Höhe AB.

Wir wollen ferner annehmen, man habe die Weite BC und in C den Elevationswinkel $ACB = \alpha$ gemeſſen. Braucht man einen Sextant, ſo ſtelle man den Inder auf einen Winkel $= \frac{1}{2}\alpha$, und gehe über C hinaus ſo weit fort, bis man bei D die Grenzpunkte A und B der Höhe im kleinen Spiegel zur Bedeckung bringt, welches

man versuchsweise durch allmähliges Fortschreiten erlangt. Dann wird der Höhenwinkel $CDA = \frac{1}{2} \angle BCA$, folglich auch $CA = CD$. Mißt man also $CD = CA$, so läßt sich daraus und aus der gemessenen Weite BC die Höhe AB berechnen, nehmlich $AB = \sqrt{CD^2 - CB^2}$. Im Kleinen, und wo man auf einer wenigstens nahe horizontalen Ebene operirt, habe ich dies Verfahren zur Höhenbestimmung von Thürmen, Bäumen ꝛc. wirklich nicht ganz unbrauchbar befunden.

Ein andres sehr bekanntes aber wenig genaues Verfahren besteht darin, daß man in einer durch AB gelegten Vertikalebene einen Stab EF, dessen Länge (etwa 10 bis 15 Fuß) man kennt, senkrecht aufstellt, hierauf hinter EF so weit zurückgehet, bis das Auge bei C, so nahe als möglich der Horizontale BC, in der Visirlinie CE den Grenzpunkt A sieht. Aus den gemessenen Längen CB, CF, EF läßt sich AB berechnen; denn es ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$CF : FE = CB : AB, \text{ daher } AB = \frac{CB \cdot FE}{CF}$$

Auf demselben geometrischen Grunde beruht die noch unvollkommnere Höhenmessung durch die Längen der Schatten, die von erhöhten Objecten bei gleicher Sonnenhöhe auf eine Horizontalebene geworfen werden. Man soll nehmlich seitwärts AB einen Stab EF von bekannter Länge aufstellen, und in gleichem Moment, nehmlich bei einer und derselben Sonnenhöhe, die Schattenlängen BC und FC der Objecte AB und EF messen, daraus sodann AB wie vorher berechnen. Wie trüglich diese Methode seyn müsse, erhellt schon daraus, daß die Schattengrenze nie scharf genug

abgeschnitten ist. Es ist nehmlich die Sonne nicht ein einziger leuchtender Punkt, sondern eine Scheibe, daher außer dem vollen Kernschatten noch Halbschatten entstehen.

2) Trigonometrische Methode: Man messe in einer durch AB gelegten Vertikalebene eine horizontale Standlinie BC und in C den Elevationswinkel $ACB = \alpha$. Nach einem Satz der ebenen Trigonometrie ist:

$BC : AB = \text{sin. tot.} : \text{tang. } \alpha$, also

$$AB = \frac{BC \,.\, \text{tang. } \alpha}{\text{sin. tot.}}$$

Beispiel: Es ist gemessen

$BC = 367'$, $\angle \alpha = 32^0\, 17'\, 23''$,

die gesuchte Thurmhöhe $AB = 231{,}915'$.

Man erhält ein genaueres Resultat, wenn man e horizontale Standlinie BC so lang nimmt, daß der . α nicht zu spitz, sondern nahe 45^0 wird.

Ist AB ein Thurm, so wird die Basismessung s zum Centrum B seines Fußes bisweilen Schwierigit haben; indessen kann man durch eine genaue Seinmessung der halben Thurmbreite der Wahrheit imer nahe genug kommen.

Da man insgemein in einiger Erhöhung über C, z. B. bei G, den Elevationswinkel $AGM = \beta$ zu essen genöthigt ist, und dann $GM = BC$, $GC =$ lB wird, so erhält man:

$$AM = \frac{BC \,.\, \text{tang. } \beta}{\text{sin. tot.}}, \text{ also } AB = AM + GC.$$

Auf jeden Fall ist diese trigonometrische Bestimnung den vorerwähnten geometrischen überall vorzuzien.

Da die Höhe AB, wenn wir die Horizontal BC als eine unveränderliche Größe setzen, eine Funktion nehmlich die Tangente des Elevationswinkels α ist, die Tangenten von 45^0 oder nahe 45^0 aber bei Fortschreitungen der Winkel um einzelne Minuten geringere Veränderungen erfahren, als die Tangenten von sehr kleinen oder nahe rechten Winkeln bei gleichen Zunahmen, so begreift man, warum es in möglichen Fällen immer sichrer ist, die horizontale Standlinie nahe gleich AB und mithin den Winkel α nahe $= 45^0$ zu wählen. Bei gleich großen Fehlern in der Winkelmessung wird man daher sehr weit entfernte Höhen, wofür man kleine Elevationswinkel, z. B. von $3 — 5^0$, erhält, immer weniger zuverläßig bestimmen, als nahe gelegene, wenn man auch für beide die horizontale Standlinie BC gleich genau gefunden hätte. Ein Beispiel möge dies erläutern:

Es sey $BC = 3570'$, der wahre Winkel $\alpha = 5^0 7'$,
so wird $AB = 319,66'$, hätte man $\angle \alpha = 5^0 8'$ also
um $1'$ zu groß gemessen,

so wäre $AB = 320,71$

Differenz oder Fehler $= 1' 05'$

Für $BC = 3570'$ und den wahren W. $\alpha = 42^0 13'$
wäre $AB = 3238,7'$, für den $\angle \alpha = 42^0 15'$, also
um $2'$ zu groß gemessen,

wäre $AB = 3242,7'$

Differenz od. Fehler $= 4,0'$

Im letztern Falle, wo wir absichtlich den Fehler im Winkel doppelt groß angenommen, ist dessenungeachtet der Fehler in der gesuchten Höhe verhältnißmäßig geringer als im ersten Falle.

Wofern die Höhe AB weit entfernt und der Elevationswinkel α sehr spitz ist so können in der Messung desselben auch wegen der Strahlenbrechung, wegen der

ternden Bewegung der Atmosphäre und der durch
se hindurch anvisirten Richtpunkte, auch wegen der
ärischen Gestalt der Erde noch andere Abweichungen
rfallen. Von der Correction der gefundenen Höhen
gen der irdischen Strahlenbrechung und wegen der
dkrümmung weiter unten.

Unbeträchtlicher wird in jedem Fall der Fehler für
B, wenn die Standlinie BC nicht genau horizontal,
mlich der rechte Winkel ABC um einige Minuten
groß oder zu klein ist.

§. 125.

Aufgabe. (Fig. 97.)

Es wird dasselbe verlangt, wie in der vorigen
ufgabe §. 124; man kann aber wegen eines Zwischen-
ndernisses (Flusses, Sees, Mauer oder desgl.) von der
rizontalen Standlinie nur ein Stück CD directe
essen, und die Elevationswinkel α, β nehmen.

Auflösung: Es sey $CD = b$ (Fuße oder ein
idres Maß) und $\angle \delta = \angle \alpha - \angle \beta$ bekannt, so
ird

$$b : AD = \sin.\delta : \sin.\beta, \text{ also } AD = \frac{b \,.\, \sin.\beta}{\sin.\delta}$$

$$AD : AB = \sin.tot. : \sin.\alpha, \text{ also}$$

$$AB = \frac{b \,.\, \sin.\beta \,.\, \sin.\alpha}{\sin.\delta \,.\, \sin.tot.}$$

$$\text{Da } BD = \frac{AD \,.\, \cos.\alpha}{\sin.tot.} = \frac{b \,.\, \sin.\beta \,.\, \cos.\alpha}{\sin.\delta \,.\, \sin.tot.}$$

o läßt sich so zugleich der ganze horizontale Abstand

$$CB = b + \frac{b \,.\, \sin.\beta \,.\, \cos.\alpha}{\sin.\delta \,.\, \sin.tot.}$$ berechnen. Man

kann auch zuerst AC, sodann hieraus und aus ∠ β die Höhe AB, ingleichen die Horizontale BC ableiten.

Ein Zahlenbeispiel kann sich der Leser zur Uebung selbst aufgeben und berechnen. Wie sich leicht erachten läßt, findet diese Aufgabe in der Praxis oft ihre Anwendung.

§. 126.

Aufgabe. (Fig. 98.)

Die absolute Höhe AB ist zu bestimmen; man kann in einer durch AB gelegten Vertikalebene bloß eine schiefgeneigte Standlinie CB oder nur ein Stück derselben CD messen, nehmlich der Fuß der Höhe B liegt unter dem Horizont des Standorts C.

Auflösung: Es sey gemessen CB = b, der Elevationswinkel α und der Depressionswinkel β, so ist auch δ = 90° — α bekannt. Man hat

$$b : AB = \sin.\,\delta : \sin.\,(\alpha + \beta), \text{ also}$$

$$AB = \frac{b \,.\, \sin.\,(\alpha + \beta)}{\cos.\,\alpha}$$

Verlangte man statt der absoluten Höhe AB die relative AM in Beziehung auf den Horizont des Ortes C, so wäre

$$b : BM = \sin.\,tot. : \sin.\,\beta, \text{ also } BM = \frac{b \,.\, \sin.\,\beta}{\sin.\,tot.}$$

woraus sich AM = AB — BM ergiebt.

Könnte man vom schiefen Abstand CB nur ein Stück CD = m messen, so müßte man außer den Winkeln α, β noch den Elevationswinkel ε bei D nehmen. Dann erhält man ∠ ADB = ε + β und ∠ CAD = ε — α.

Es ist $m : AD = \sin.(\varepsilon - \alpha) : \sin.(\alpha + \beta)$,

$$\text{also } AD = \frac{m \,.\, \sin.(\alpha + \beta)}{\sin.(\varepsilon - \alpha)}$$

Da $\angle ABD = 90^0 - \beta$, also $\sin. ABD = \cos. \beta$, so wird ferner

$AB : AD = \sin.(\varepsilon + \beta) : \cos. \beta$, also

$$AB = \frac{m \,.\, \sin.(\alpha + \beta) \,.\, \sin.(\varepsilon + \beta)}{\sin.(\varepsilon - \alpha) \,.\, \cos. \beta}$$

Wie man ferner CB bestimmen könne, bedarf ner weitern Erklärung.

Anm. Kann man die Ebene eines guten Winkelmessers genau in die durch ABC gelegte Vertikalebene und vermittelst einer Libelle die Sehachse des Fernrohrs (oder gemeiner Dioptern mit Hülfe eines Bleilothes) horizontal einstellen, so wird man die Elevationswinkel α, ε auch dann noch messen können, wenn man bloß nach A visiren kann; mehrentheils kann man von C aus auch B sehen und den Depressionswinkel β beobachten.

§. 127.

Aufgabe. (Fig. 99.)

Die absolute Höhe AB werde bestimmt; man kann vom Standort C gegen B hin nur eine schiefe Standlinie CB oder aber nur ein Stück derselben CD messen, nehmlich der Fuß der Höhe B liegt über dem Horizont von C.

Auflösung: Es seyen gemessen $CB = b$ und die Elevationswinkel α, β, woraus sich $\angle \delta = 90 - \alpha$ ergiebt. Es wird

$AB : b = \sin.(\alpha - \beta) : \cos.\alpha' (\sin.\delta)$, also

$$AB = \frac{b \,.\, \sin.(\alpha - \beta)}{\cos.\alpha}$$

Verlangt man die relative Höhe AM, nehmlich die Erhöhung des Richtpunktes A über den Horizont des bestimmten Standortes C, so setze man

$b : BM = \sin.\text{tot.} : \sin.\beta$, folglich $BM = \frac{b \,.\, \sin.\beta}{\sin.\text{tot.}}$,

woraus $AM = AB + BM$ hervorgeht.

Läßt sich vom schiefen Abstand CB nur ein Stück $CD = m$ abmessen, so nehme man noch den Elevationswinkel ε. Hier wird, begreiflicherweise

$m : AD = \sin.(\varepsilon - \alpha) : \sin.(\alpha - \beta)$, also

$$AD = \frac{m \,.\, \sin.(\alpha - \beta)}{\sin.(\varepsilon - \alpha)},$$

ferner $AB : AD = \sin.(\varepsilon - \beta) : \cos.\beta$, also

$$AB = \frac{AD \,.\, \sin.(\varepsilon - \beta)}{\cos.\beta} = \frac{m \,.\, \sin.(\alpha - \beta) \,.\, \sin.(\varepsilon - \beta)}{\sin.(\varepsilon - \alpha) \,.\, \cos.\beta}$$

Nach den bekannten datis wird auch CB, so wie CM, CA ꝛc. leicht zu bestimmen.

§. 128.

Aufgabe. (Fig. 100.)

Die absolute Höhe AB (z. B. eines Thurmes) wird gesucht; man kann aber weder eine horizontale noch schiefe Standlinie oder Stücke davon in einer durch AB gelegten Vertikalebene abmessen.

Auflösung: Man wähle eine Seitenstandlinie CD von schicklicher Lage und Größe gegen AB; wir wollen hier, wie es in der Praxis mehren-

theils möglich wird, voraussetzen, daß die Standorte C und D oder doch einer, z. B. C genau oder wenigstens sehr annähernd in der durch den Fuß der Höhe B gelegten Horizontalebene liege.

Man messe $CD = b$, die Winkel an dieser Basis BDC und BCD, woraus sich die horizontale Weite CB wie gewöhnlich berechnen läßt. Diese wird nun die Standlinie für AB. Man observire ferner den Elevationswinkel $ACB = \alpha$, so wird:

$CB : AB = \text{sin. tot.} : \text{tang. } \alpha$, also

$$AB = \frac{CB \,.\, \text{tang. } \alpha}{\text{sin. tot.}} = CB \text{ tang. } \alpha \text{ für sin. tot.} = 1.$$

Beispiel: Gemessen $b = 857'$, $\angle BCD = 79^0\,45'$,
$\angle BDC = 61^0\,4'$, $\angle \alpha = 14^0\,19'\,27''$,
gesucht $AB = 303,128'$.

Liegt zugleich D im Horizont von B, so kann zur Versicherung die Höhe AB auch nebenbei aus BD und dem Elevationswinkel β bestimmt werden.

Es ist diese Aufgabe mit der im folgenden §. bemerkten Modification die hauptsächlichste und brauchbarste zur trigonometrischen Messung der Höhen, unter andern auch der Berghöhen, bei welchen man die durch ein natürliches Merkmahl, z. B. eine Felsenspitze oder durch ein künstliches Signal ausgezeichneten höchsten Gipfel für den Richtpunkt A annimmt. Sind jedoch die Berge sehr weit vom Beobachtungsorte oder der Standlinie CD entfernt, so schleichen sich wegen der spitzen Winkel, besonders der Vertikalwinkel, mehr oder weniger beträchtliche Fehler in der Bestimmung ihrer Höhen ein, auch bedarf es dann sehr großer Standlinien, deren genaue horizontale Abmessung mit vielen Schwierigkeiten verknüpft ist. In solchen Fällen wird

man lieber auf einem einfachern weniger mühsamen und kostspieligen Wege, nehmlich durch Barometerbeobachtungen, die Berghöhen finden. Man kann auch, wo es auf große Genauigkeit und auf Vergleichungen ankommt, beide Methoden, die trigonometrische und barometrische, in Verbindung setzen.

§. 129.

Aufgabe. (Fig. 101.)

Umstände und Bedingungen, wie in der vorigen; allein die Hülfsstandlinie CD liegt mit keinem ihrer Endpunkte in der durch B gelegten Horizontalebene.

Auflösung. Kann man die Ebene des Winkelmessers in die des schiefgeneigten Dreiecks CDB bringen und also die schiefgelegenen Winkel BCD, BDC so wie die schief angenommene Standlinie CD messen, so läßt sich daraus CB oder DB berechnen; dann wird CB, der Punkt C mag über oder unter dem Horizont von B liegen, die Standlinie für AB in einer durch dieselbe gelegten Vertikalebene. Aus CB, den Elevations- und Depressions-Winkeln läßt sie sodann die Höhe AB nach den in den §§. 126. 127. vorgetragenen Aufgaben berechnen.

Da man aber mit den Winkelmessern, den Sextant und den Bordaschen Multiplicationskreis ausgenommen, wegen der leichten Horizontalstellung der Limbusebene jederzeit bequemer und zuverläßiger horizontale Winkel mißt, als schiefgeneigte, so wird man statt der letztern lieber gleich ihre horizontalen Projectionen observiren, und darnach die trigonometrische Operation weiter also einrichten:

Man lege in Gedanken durch B eine Horizontalebene, fälle von C und D Senkrechte auf dieselbe u. s. w., so wird der W. Bcd der auf den Horizont reducirte W. BCD und Bdc der reducirte BDC. Braucht man ein Astrolabium mit gewöhnlichen Dioptern oder vertikal beweglichem Fernrohr oder zuverläßiger einen Theodolit, so werden diese Horizontalwinkel directe durch Observation ohne weitere Rechnung erhalten. Ferner messe man den Depressionswinkel BCF und den Elevationswinkel ACF; wir nehmen hier an, B liege unter dem Horizont von C, und die Horizontale CF falle zwischen A und B. Liegt C niedriger als D, so messe man auch den Elevationswinkel DCE, um daraus und aus der gemessenen Standlinie CD = b ihre horizontale Projection CE = cd berechnen zu können. Dieser letztere Act der Winkelmessung und Berechnung wird erspart, wenn entweder CD selbst eine Horizontale, oder im Fall sie schief liegt, durch eine Abmessung mit Kette oder Maßstäben gleich horizontal als CE = cd ausgemessen worden. In den meisten Fällen läßt sich der horizontale Abstand der Oerter C, D leichter und sichrer finden, als der schiefe.

Aus cd und den Horizontalwinkeln Bcd, Bdc läßt sich die Horizontale cB = CF berechnen, so wie ferner aus CF, dem Elevationswinkel α und dem Depressionswinkel β die Vertikalen AF und FB, folglich auch die absolute Höhe AB sowohl, als die in Hinsicht auf C relative Erhöhung AF. Der ganze trigonometrische Kalkul, obgleich zusammengesetzt, hat keine Schwierigkeit, die größte Sorgfalt aber erheischt die Messung der Standlinie und der Winkel, wenn man

A B bis auf einige Fuße richtig zu erlangen beabsichtigt.

Jeder denkende Leser wird übrigens sogleich auf den ersten Anblick begreifen, daß es für diese Aufgabe außer dem hier bemerkten noch verschiedene andere Fälle geben kann; so kann z. B. A B eine Höhe in einem Thale, und die auf einem Berge schiefliegende Standlinie C D über dem Horizont von A erhöht seyn u. s. w. Wie man in jedem Falle die trigonometrische Operation zu vollbringen habe, erhellt aus dem Gesagten zur Genüge.

Einige abgeleitete Nebenaufgaben durch trigonometrische Operationen aufgelöst. Messung durch eine vertikale Standlinie u. s. w.

§. 130.

Aufgabe. (Fig. 100.)

Es werde im Standort A der Spitze einer gegebenen Höhe A B = a, eine Horizontaldistanz C D trigonometrisch bestimmt; hierbei wird vorausgesetzt, daß die Oerter C und D in der durch B gedachten Horizontalebene sich befinden.

Auflösung: Man messe bei A den Sehewinkel C A D und die Depressionswinkel E A C, E A D, welche Complemente der Winkel C A B, D A B und den Höhenwinkeln α, β gleich sind.

So läßt sich im rechtwinklichten Dreieck A B C die Seite A C berechnen, nehmlich

$$AC : AB = \text{sin. tot.} : \text{sin.}\,\alpha, \text{ also } AC = \frac{AB \cdot \text{sin. t.}}{\text{sin.}\,\alpha},$$

$$\text{ingleichen wird } AD = \frac{AB \cdot \text{sin. tot.}}{\text{sin.}\,\beta}.$$

Hierauf läßt sich im schiefgeneigten Dreieck ACD aus den gefundenen Seiten AC, AD und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel CAD, den man am bequemsten mit einem Sextant observirt, die Horizontale CD ableiten, nach §. 19.

Es tritt indessen gar oft der Fall ein, daß die zu bestimmende gerade CD weder an sich horizontal noch im Horizont von B liegt. Wie man sich dann zu verhalten habe, mag folgendes Beispiel zeigen.

§. 131.

Aufgabe. (Fig. 102.)

Man bemerkt in einer belagerten Festung, daß der Feind außerhalb in C und D Depots anlegt. Man sucht die Entfernungen der Depots von der Festung, so wie die gerade Entfernung CD selbst.

Auflösung: Am angegriffnen Polygone stehe ein Thurm AB, dessen Höhe = 90 Schritte bekannt ist. Wir wollen ferner annehmen, daß man bei A und B die Depressionswinkel $EAC = 29'$, $GAD = 38'$, die Elevationswinkel $FBC = 1^0 30'$, $HBD = 1^0$, ingleichen den schiefen Sehewinkel $CAD = 12^0 36'$ beobachten könne. Dem zufolge wird im vertikalen Dreieck ABC der Winkel $BAC = 89^0 31'$, $\angle ABC = 88^0 30'$ und $\angle ACB = 1^0 59'$.

Daher 90 Schr. : AC = sin. $1^0 59'$: sin. $88^0 30'$.

So findet man AC = 2599,6 Schritte.

Gleicherweise findet man im zweiten Dreieck **ABD** den Abstand **AD** = 3157,06 Schritte.

Endlich läßt sich im schiefgeneigten Dreieck **ADC** aus den zwei Seiten **AC** = 2599,6, **AD** = 3157,06 und dem eingeschloßnen Winkel **CAD** = 12°36′ die wahre Weite **CD** = 840 Schritte annähernd berechnen.

Die geodätische Bestimmung durch vertikale Standlinien, wozu insbesondere Berghöhen, schon anderweitig durch Barometerbeobachtungen oder trigonometrisch bekannt, dienen können, läßt sich zuweilen recht vortheilhaft anwenden. Alex. v. Humboldt hat sich dieser Methode zur Verbindung von Mexico mit Veracrux auf eine Entfernung von 160000 Tois. bedient.

§. 132.

Aufgabe. (Fig. 103.)

Es werde eine Weite **AB** bestimmt; in ihrer Verlängerung nach beiden Seiten sind die Weiten **AM**, **BN** durch eine directe Messung oder anderweitig bekannt; auch kann man an einem seitwärts gelegenen Standort **D**, der sich mit **M**, **A**, **B**, **N** wenigstens sehr nahe in einer Ebene befindet, die Sehewinkel m, n, o messen.

Auflösung: Der Kürze halber bezeichnen wir **AB** = x (gesucht), **AM** = a, **BN** = b.

$$\text{Es ist Sin. } MAD = \frac{MD \,.\, \sin. m}{a},$$

$$\text{Sin. } NAD = \frac{ND \,.\, \sin.(n+o)}{b+x}$$

Da MAD und NAD Nebenwinkel, mithin ihre Sinus gleich sind, so wird

$$\frac{MD \,.\, \sin.\, m}{a} = \frac{ND \,.\, \sin.\,(n+o)}{b+x}, \text{ also}$$

$$\frac{ND}{MD} = \frac{(b+x) \,.\, \sin.\, m}{a \,.\, \sin.\,(n+o)}.$$

Ferner ist $\text{Sin. } MBD = \frac{MD \,.\, \sin.\,(m+n)}{a+x}$

$$\text{Sin. } NBD = \frac{ND \,.\, \sin.\, o}{b}$$

Hieraus folgt: $\frac{MD \,.\, \sin.\,(m+n)}{a+x} = \frac{ND \,.\, \sin.\, o}{b}$,

$$\frac{ND}{MD} = \frac{b \,.\, \sin.\,(m+n)}{(a+x) \,.\, \sin.\, o} = \frac{(b+x) \,.\, \sin.\, m}{a \,.\, \sin.\,(n+o}.$$

So ergiebt sich $(a+x) \,.\, (b+x$

$$= \frac{ab \,.\, \sin.\,(m+n) \,.\, \sin.\,(n+o)}{\sin.\, m \,.\, \sin.\, o}$$

$$= ab + (a+b)\,x + x^2.$$

Entwickelt man diese vermischte quadratische Gleichung nach der hier als bekannt vorauszusetzenden Methode, so erhält man den gesuchten Werth

$$x = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{ab \,.\, \sin.\,(m+n) \,.\, \sin.\,(n+o}{\sin.\, m \,.\, \sin.\, o} + \left\{\frac{a-b}{2}\right\}^2}$$

Die Rechnung wird am einfachsten dadurch bewirkt, daß man zuvörderst das Glied unter dem Wurzelzeichen $\frac{ab \,.\, \sin.\,(m+n) \,.\, \sin.\,(n+o)}{\sin.\, m \,.\, \sin.\, o}$ durch Logarithmen findet, dazu $\left\{\frac{a-b}{2}\right\}^2$ addirt, hierauf aus der Summe die Wurzel logarithmisch zieht u. s. w.

Eine andere Methode durch Einführung eines Hülfswinkels φ, welche ich hier anführen könnte, führt wenigstens nicht kürzer zum Ziele, daher ich solche mit Stillschweigen übergehe. Ueberhaupt wird sich in der Praxis wohl nur höchst selten Gelegenheit zur Nutzanwendung dieses Problems finden. Theoretisch betrachtet ist dasselbe nicht ohne Interesse; auch Lambert behandelt dasselbe in seinen Beiträgen ꝛc. 1r Band. Ein Beispiel der Art kann sich der geneigte Leser zur Uebung selbst ansetzen und ausrechnen.

§. 133.

Aufgabe. (Fig. 104.)

Eine unzugängige Weite AB werde mit Hülfe von Perpendikularen trigonometrisch bestimmt.

Auflösung: In schicklicher Lage gegen AB stelle man sich über C auf, und bestimme vermittelst des Diopterkreuzes oder eines Winkelmessers (am besten eines Sextanten) die Gerade CD senkrecht an die Visirlinie CB, von C rücke man progressive gegen D hin so weit vor, bis bei D das entfernte Object B unter einem gegen DC rechten Winkel gesehen wird. Man messe die Standlinie $CD = b$ und die Sehewinkel γ, δ.

Nach der ebenen Trigonometrie wird

$CA = b \,.\, \text{tang.}\,\delta$, $DB = b \,.\, \text{tang.}\,\gamma$ für sin. tot. $= 1$.

Man denke sich AN parallel mithin gleich CD, so wird $BN = BD - AC = b \,.\, (\text{tang.}\,\gamma - \text{tang.}\,\delta)$

Im rechtwinklichten Dreieck ABN ist $AB^2 = AN^2 + BN^2 = b^2 + b^2\,(\text{tang.}\,\gamma - \text{tang.}\,\delta)^2$,

folglich $AB = b\sqrt{1 + (\text{tang.}\,\gamma - \text{tang.}\,\delta)^2}$

Man bestimme einen Hülfswinkel φ so, daß nehmlich tang. φ = tang. γ — tang. δ ist, welches immer möglich, da die Tangenten von o bis 90° alle Zahlenwerthe von o bis ∞ durchlaufen. Dann bekommt man

$$AB = b\sqrt{1 + \text{tang.}^2\,\varphi} = b \,.\, \text{secant.}\,\varphi$$

$$= \frac{b \,.\, \text{sin. tot.}}{\text{cos.}\,\varphi}.$$

Wäre das Ansetzen der Perpendikularen im Felde so leicht und genau möglich, wie auf dem Papier, so würde die eben bemerkte Methode einer Weitenbestimmung der früher im §. 119 angezeigten vorzuziehen seyn. Allein wegen der Schwierigkeit, zu trigonometrischer Rechnung zuverläßig genug rechte Winkel abzustecken, hauptsächlich aber in einer bestimmten Vertikalebene CD so weit vorzurücken, bis man versuchsweise von D die Richtpunkte B, C unter einem rechten Winkel sieht, entzieht dieser theoretisch guten einfachen Verfahrungsweise in der wirklichen Ausübung beinahe allen Werth. — Es lassen sich noch eine Menge ähnlicher Methoden durch Ansetzen von rechten, halbrechten und andern Winkeln gedenken, aber eben weil ich glaube, daß sie der Praxis sehr wenig oder gar nichts nützen, übergehe ich solche zur Ersparung des Raumes.

§. 134.

Sogenannte Messung aus einem einzigen Standort (Station). (Fig. 195.)

Bloß des Geschichtlichen wegen, und um dem Vorwurf der Unvollständigkeit zu begegnen, will ich diese an sich sehr unsichre und meines Erachtens unbrauchbare Messungsart mit ein paar Worten berühren.

Die geometrische sowohl als trigonometrische Be-

ſtimmung einer directe nicht auszumeſſenden Weite AB bloß aus einem Endpunkt (Station) A iſt wörtlich genommen abſolut unmöglich, und nur Unwiſſende können an ein ſolches mathematiſches Wunderwerk glauben. Soll die Weite AB gefunden werden, ſo gehört dazu eine bekannte Länge am Standort oder außerhalb deſſelben. Bei allen ſogenannten Weitenmeſſungen aus einem Standpunkt wird auch immer eine jedoch verhältnißmäßig ſehr kleine Grundlinie als bekannt angenommen. Dieſe Baſis des Beſtimmungsdreiecks wird entweder am Beobachtungsort ſelbſt oder vielmehr am Inſtrument gebraucht, womit man die wunderbare Operation vollzieht, oder aber ſie befindet ſich am zweiten unzugängigen Ende der geſuchten Entfernung. Für letztern Fall haben die Erfinder von Diſtanzenmeſſern, Diaſtimetern oder wie die Herrlichkeiten ſonſt ſich benamen, insgemein die Höhe einer abgemeſſenen Signalſtange, noch bequemer die eines erwachſenen Menſchen, eines Soldaten zu Fuß oder zu Pferde ꝛc. zum bekannten Maßſtab für das Unbekannte erkohren. So etwas, nehmlich einen Diſtanzenmeſſer von Oberſt von Mecklenburg, nebſt einigen andern, findet man belobt in Bugge's Feldmeßkunſt, überſ. von Tobieſen, S. 186 ꝛc. Von ähnlicher Beſchaffenheit und Güte iſt das vom Prediger Romershauſen unter dem veränderten Namen Diaſtimeter erfundene und von ihm in einer kleinen Schrift beſchriebene Inſtrument, womit man nach des Verfaſſers pomphafter Ankündigung aus einem einzigen Standpunkt auf eine leichte und ſichre Art, noch dazu ohne trigonometriſche Rechnung, alle Arten von Meſſungen ſoll verrichten können!? auch ſoll man ſogar kleine Winkel damit genauer als mit andern Winkelmeſſern obſerviren können, nehmlich bis auf Tertien. Parturiunt montes etc. denkt bei ſolchen Verheißungen je-

)er gründliche Geometer. Gewöhnlich gehen auch nicht)on solchen dergleichen Wunderwerke aus. Männern, vie Newton, Tob. Mayer, Hadley, Rams=)en ꝛc., ist, so viel ich weis, der Gedanke an soge= tannte Distanzenmesser nie in den Sinn gekommen.

Für die kleine Grundlinie AC am Beobachtungs=)rte A (Fig. 105.) scheint mir der vom Grafen Pa= :etto ab Ucedos angegebene Distanzenmesser, unter)em zu viel versprechenden Namen Pantometrum Pa= ceccianum bekannt, noch unter allen der zweckmäßigste und brauchbarste zu ungefähren Weitenbestimmungen. Das Wesentliche seiner Einrichtung besteht darin:

Auf einer Tafel (von Holz oder Metall) mit Sta= tiv sind in A und C zwei Fernröhre HK, GD auf= gestellt, welche aber lang und sehr gut gearbeitet seyn müssen, um den parallaktischen B sehr genau bestimmen zu können. Ingleichen muß der Abstand AC, etwa 5 Fuß, äußerst scharf gefunden seyn. Die Achse des Fernrohrs HK ist rechtwinklicht gegen AC festgestellt; das Fernrohr GD läßt sich um den Mittelpunkt C dre= hen, gleichzeitig beschreibt ein damit verbundener In= der auf einem Gradbogen von großem Radius einen Winkel FCG (Bogen FG), welcher dem parallakti= schen Winkel B gleich ist, wofern nehmlich bei paralle= lem Stand der Fernröhre GD ∥ HK die Punkte D oder G den Anfang oder 0^{0} der Theilung bezeichnen u. s. w. Begreiflich muß wegen der sehr kleinen Basis AC, wodurch bei einer etwas beträchtlichen Entfernung AB der parallaktische Winkel B = FCG äußerst klein ausfällt, eine scharfe Winkelmessung bis auf einzelne Sekunden mit dem Pantometer möglich seyn, welche Genauigkeit mir in allen Fällen zweifelhaft scheint, wo keine Repetition (Multiplication) der Winkel gebraucht wird. Wir wollen nun setzen, ein solches Werkzeug, in der durchaus nothwendigen Vollkommenheit viel zu

kostbar für seinen beschränkten Zweck, gebe den parallaktischen Winkel B = FCG bis auf 5″ zuverläßig, welche Genauigkeit wir jedoch bezweifeln dürfen; es soll am Standort A die Distanz AB bestimmt werden. Man müßte das Pantometer über A also stellen, daß man durch das auf AC senkrechte Fernrohr HK den Richtpunkt B sähe; bei unverrücktem Stand desselben müßte man ferner das zweite Fernrohr aus der parallelen Lage GD, welche bis auf einzelne Sekunden immer schwer zu erlangen steht, auch beim Gebrauch sehr weit entlegener Objecte in die Lage FE drehen, so nehmlich, daß man durch das Fernrohr ebenfalls den Richtpunkt B sähe. So erhielte man den parallaktischen Winkel ABC = FCG, und es ließe sich, wenn wir AC und ∠ ABC in geometrischer Schärfe bekannt annehmen dürften, im rechtwinklichten Dreieck ABC die Seite AB berechnen.

Denn es ist AB : AC = sin. tot. : tang. B,

$$\text{folglich } AB = \frac{AC \,.\, \text{sin. tot.}}{\text{tang. } B}$$

Ein Beispiel möge zeigen, bis zu welchem Grad der Genauigkeit sich eine solche Weitenmessung aus einer Station erheben könne.

Wenn AC = 5′ (Fuß), ∠ B gemessen = 17′ 12″, so wird logarithmisch berechnet AB = 999,34′. Ist nun ∠ B wirklich = 17′ 8″, also um 4″ zu groß gemessen, so wird AB = 1003, 2′. Folglich hätte man auch unter den vortheilhaftesten Umständen, die wir hier zu Gunsten der Erfinder von Pantometern, Distanzenmessern ꝛc. zugeben wollen, die kleine Entfernung um beinahe 4 Fuß falsch gefunden.

Der Fehler wird aber noch weit erheblicher, wenn die Weite AB größer, mithin der parallaktische Winkel B noch kleiner wird, und man wird doch wohl in

allem Ernste ein kostbares Instrument bloß für kleine Weiten von circa 1000 Fuß nicht erfinden und kaufen wollen.

Wenn AC = 5′, der Winkel B gemessen = 1′40″, so wird AB = 10313, 2′. Ist ∠ B wirklich = 1′37″, also nur um 3″ zu groß gemessen, so wird AB = 10632. Folglich hätte man unter den günstigsten Umständen die Weite von etwa $\frac{1}{2}$ Meile um 319 Fuß falsch gefunden. Wie nun erst, wenn das Instrument unvollkommen, wie gewöhnlich, und die Entfernung AB noch größer ist? So grobe Fehler können bei einer bessern trigonometrischen Operation mit eigentlichen Standlinien im Felde nicht Statt finden, wenn auch hier noch viel beträchtlichere Irrthümer in der Winkelmessung vorkämen, als wir solche an den Distanzenmessern aus Nachgiebigkeit gegen ihre Erfinder angenommen. Jeder sogenannte Distanzenmesser muß daher ein höchst unvollkommenes, etwa nur zu ganz oberflächlichen, z. B. flüchtigen militärischen, Bestimmungen dienliches Werkzeug bleiben. Es werden solche Künsteleien überhaupt durch andere weniger kostbare Mittel ganz entbehrlich gemacht. Für größere Entfernungen wird sich gewiß überall eine mäßig große Standlinie finden lassen, für kleinere Entfernungen von 1000 bis 2000 Fuß hingegen thut ein geübtes Augenmaß ungefähr dieselben Dienste, wie ein künstlicher und noch obendrein theurer Distanzenmesser.

Beobachtete man vom Standort B aus den parallaktischen Winkel B als scheinbare Größe der bekannten Länge AC, so ließe sich so, ebenfalls sehr wenig genau, die Weite AB berechnen. Wenn nehmlich ∠ B sehr klein und die Winkel bei A und C sehr nahe = 90° wären, so könnte man letztere, also auch BA und BC,

ohne beträchtlichen Fehler als gleich annehmen, und dem zufolge die Berechnung machen. Ein Beiſpiel der Art findet man in Käſtner's geom. Abh. 1. Samml. — Die entfernte Diſtanz A C zwiſchen zwei Ruinen war 86 Fuß, der ∠ B = 8' 44", beobachtet auf dem Obſervatorium zu Göttingen. Der Kalkul gab A B die Entfernung der Ruinen vom Obſervatorium = 33852 F. Wäre der W. B wirklich nur 8' 40", ſo würde jene Entfernung um 228 F. falſch erhalten. Auf dieſe letztere Methode und die Aehnlichkeit der Dreiecke gründet ſich eine zweite Art von Diſtanzenmeſſern, welche indeſſen durch beſonders eingetheilte Maßſtäbe ſelbſt die leichte trigonometriſche Rechnung erſparen, und dadurch zu faulen Rechenknechten werden.

So das obenerwähnte Diaſtimeter, deſſen Conſtruction und Gebrauch ſich weſentlich darauf gründet:

Es iſt (Fig. 105.) B der Ort des beobachtenden Auges (gemeines Viſirloch), c m = h ein bekannter Abſtand von zwei in einer pappenen oder meſſingenen Röhre parallel ausgeſpannten Pferdehaaren, C M = H die als genau bekannt (?) angenommene Höhe oder Länge eines entfernten Objects, z. B. eines Soldaten mit Kopfbedeckung, = 6 F.; c m läßt ſich von B durch Ausziehen der Röhre mehr oder weniger entfernen, folglich iſt B a eine veränderliche Länge, die beim Obſerviren durch einen eingetheilten Maßſtab begrenzt wird u. ſ. w. Durch Verſchieben kann man c m in die Lage bringen, daß c und m in die Viſirlinien B C, B M fallen; dann haben c m = h, C M = H und B a = e beſtimmte Größe, woraus ſich die geſuchte Entfernung B A = E ergeben ſoll, wenn △ B c m und B C M ähnlich und ſonſt alles richtig iſt. Nehmlich es wäre h : H = e : E, daher $E = \frac{e}{h} . H.$

heißt $\frac{e}{h} = N$ nach Romershausen die Normale, so wird allgemein $E = HN$, oder wenn E bekannt, so wird $H = \frac{E}{N}$.

Um E nur einigermaßen annähernd zu bekommen, müßten H und N sehr genau determinirt seyn; was aber noch mehr sagen will, die entfernte Länge $CM = H$ müßte beim Observiren vollkommen parallel zu cm im Beobachtungsrohr stehen. Wenn, wie gar sehr leicht und oft geschehen kann, CM nur etwas schief (nicht parallel) zu cm steht, welches sich bei B nicht einmahl genau bemerken läßt, so müssen die Diastimeterangaben statt Wahrheit die gröbsten Irrthümer in Weitenbestimmungen für einen zu hohen Preis verkaufen. Doch genug hiervon. Der denkende Leser kann die hier angedeuteten Betrachtungen ohne Schwierigkeit noch weiter ausdehnen.

Reduction schiefgeneigter Längen und Figuren auf den Horizont eines bestimmten Punktes auf der Erde.

§. 135.

Aufgabe. (Fig. 106.)

Die schiefgemeßne Weite CB werde auf den Horizont des Ortes C reducirt, nehmlich auf die horizontale Projection CB'.

Auflösung. Außer der bekannten Länge $CB = a'$

(Fuß oder desgl.) muß noch der Elevationswinkel α gemessen werden. Dann wird

$$CB' = \frac{a \,.\, \cos.\, \alpha}{\text{sin. tot.}}$$

Der Ueberschuß von CB über CB' ist demnach $= a - a \,.\, \cos.\, \alpha = a\,(1 - \cos.\, \alpha)$.

Beispiel: Gegeben $a = 357$, $\angle\, \alpha = 31^{\circ}\,17'$, also $CB' = 305{,}096\ldots$

Diese Aufgabe wird bei Bergaufnahmen angewendet.

§. 136.

Aufgabe. (Fig. 106.)

Das schiefgeneigte Dreieck ABC, dessen Seiten und Winkel anderweitig bestimmt worden, und in welchem AC horizontal angenommen wird, soll auf den Horizont von C reducirt werden, nehmlich auf die horizontale Projection ACB'.

Auflösung. Man messe die Elevationswinkel α und β, so wird im vertikalen Dreieck CBB' die Seite $CB' = CB \,.\, \cos.\, \alpha$, eben so $AB' = AB \,.\, \cos.\, \beta$.

Im Dreieck ACB' sind somit die Seiten bestimmt, woraus sich ferner die Winkel ableiten lassen. — Eben so verfährt man, wenn außer B noch mehrere andere Punkte auf den Horizont von CA zu reduciren sind. Leichter wird die Sache, wenn man wie gewöhnlich, bei A und C mit einem Winkelmesser unmittelbar die Horizontalwinkel B'CA und B'AC messen kann u. s. w.

§. 137.

Aufgabe. (Fig. 107.)

Das anderweitig bekannte schiefgeneigte Dreieck ABC, dessen drei Winkelspitzen in verschiedenen Horizontalebenen liegen, oder die Punkte A, B sollen auf den Horizont des Standorts C reducirt werden, nehmlich auf die horizontale Projection A′CB′.

Auflösung. Aus CA und dem zu messenden Elevationswinkel ACA′ wird CA′, aus CB und dem Elev. W. BCB′ wird CB′ aus den beiden Elev. Winkeln und dem schiefgemessenen Winkel ACB wird (nach §. 101) der Horizontalwinkel A′CB′ berechnet. Im Dreieck A′CB′ ergeben sich endlich aus den zwei gefundenen Seiten und dem von ihnen eingeschloßnen Winkel die dritte Seite und die zwei andern Winkel. — Auch hier wird der Kalkul der Winkelreduction durch Winkelmesser mit Kippregel erspart.

Einfluß der Kugelgestalt (Krümmung) der Erde auf terrestrische Messungen.

§. 138.

Unterschied zwischen horizontalen Distanzen und dazu gehörigen Bogen größter Kreise auf der Erde. (Fig. 108.)

Bei kleinern und größern geodätischen Operationen findet man für den Abstand zweier Oerter auf der Erde insgemein die Horizontale MN = AB. Ihre

wahre Entfernung aber ist eigentlich die Bogenlänge A B etwas größer als die correspondirende Sehne A B. Indessen ist dieser Unterschied und der Einfluß der sphärischen Erdgestalt auf die directe oder indirecte bestimmten Weiten so wie auf die Winkel terrestrischer Dreiecke immer äußerst gering, wenn die Weiten und Dreiecke wie gewöhnlich sehr klein gegen die ganze Erdoberfläche werden. Bei einer weit fortgehenden Messung und Triangulirung vermindert sich jene Differenz noch dadurch, daß eine große Weite durch mehrere gleichsam gebrochene Horizontalabstände, als Sehnen einzelner zugehöriger Bogen, dargestellt wird.

Die Theorie giebt für den Unterschied zwischen einer Horizontalweite M N und der Länge des zugehörigen Erdbogens A B folgendes:

Es sey (Fig. 108.) der Bogen A B oder zugehörige Winkel A C B am Mittelpunkt der Erde $= \alpha$ (in Graden, Minuten ꝛc.), der Erdhalbmesser $= r$, die Horizontalweite M N oder A B $= b$. Man hat

$$r : \tfrac{1}{2} b = \text{sin. tot.} : \text{sin. } \tfrac{1}{2}\alpha, \text{ also}$$

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\tfrac{1}{2} b \cdot \text{sin. tot.}}{r}$$

So findet sich, wenn man b und r als bekannt annimmt ($r = 859$ bis 860 Meilen), der Winkel oder Bogen $\frac{1}{2}\alpha$, also auch α^0 (Grade, Minuten). Setzt man ferner die Länge eines Grades nach der gebräuchlichen Annahme $= 15$ geogr. Meilen, so erhält man die Bogenlänge A B $= \alpha^0 \cdot 15$ Meilen. Bei kleinern Weiten M N von einigen Meilen wird $\angle \alpha$, also auch der Unterschied in gerader und Bogen-Distanz äußerst gering, und man kann dann jene für diese unbedenklich nehmen.

Wäre auch M N $= 4$ geogr. Meilen, so gäbe der trigonometrische Kalkul $\angle \alpha = 16'$ sehr nahe, folglich die Bogenlänge.

$$AB = \frac{16 \cdot 15}{60} = 4 \text{ Meilen äußerst nahe}$$

Man begreift hieraus, daß es bei Ausmessung lbst großer 2 bis 3 Meilen langer Basen zum Behuf ner weit ausgedehnten Triangulirung ein unnützer Scrupel, eine fruchtlose Grillenfängerei seyn würde, enn man dabei immer auf die sphärische Gestalt der rde Rücksicht nehmen wollte. Die Fehler, welche sonst ei der Messung selbst vorfallen können, sind ja doch mmer weit beträchtlicher, und werden jenen ohne Verleich geringern bald auf die eine oder andre Art (positiv oder negativ) verstecken.

§. 139.

Vom scheinbaren und wahren Horizont zweier Oerter auf der Erde. (Fig. 108.)

Es bedeuten (Fig. 108.) C den Mittelpunkt der Erdkugel, CA, CD Halbmesser derselben. Eine auf CA senkrechte Visirlinie AE stellt den wahren Horizont des Ortes A ohne Beziehung auf einen andern vor. Liegt ein zweiter Ort D gleich weit von C, so kann man ihn in A wegen der Erdkrümmung nicht mehr sehen und umgekehrt. D liegt hier unter dem eigenthümlichen Horizont von A, und unter diesem Horizont AE, der äußersten Grenze des Sehens, verschwindet ein entfernter Ort. Liegt hingegen ein zweiter Ort E weiter vom Mittelpunkt der Erde als A, nehmlich in der Richtung der Tangente oder horizontalen Visirlinie AE oder darüber, so kann E bei A gesehen werden.

In Beziehung auf beide Oerter A, D heißt der Kreisbogen AD der wahre Horizont, AE hingegen der

scheinbare, weil letzterer wohl zu A aber nicht zugleich zu D oder E gehört. Am richtigsten bestimmt die Oberfläche des Meeres die wahre Horizontalebene der Oerter A, D; alle Punkte derselben sollen nehmlich gleich weit vom Mittelpunkt der Erde abstehen. Die Länge DE heißt der Unterschied oder die Abweichung der eigenthümlichen Horizonte von A und D oder auch die Erhöhung des scheinbaren Horizontes von A über D, wenn man D und A gleich weit vom Mittelpunkt der Erde annimmt. Man pflegt bei größern Nivellements die Größe DE das Gefälle des Ortes D in Hinsicht auf A und die Horizontale AE zu nennen. Sieht man bei A nach der Richtung dieser Tangente einen Ort (Richtpunkt) E, so haben A und E nicht gleiche Entfernungen von C, sondern diese sind um das Gefälle DE verschieden. Sowohl bei Berghöhenmessungen als auch bei bedeutenden Nivellements ist dieses Gefälle DE nicht außer Acht zu lassen. Hätte man z. B. die Erhöhung einer Bergspitze über A durch eine horizontale Basis AE gefunden, so müßte die scheinbare Höhe HE noch um das Gefälle ED verbessert (vergrößert) werden, wenn man nehmlich wie gewöhnlich zu wissen verlangt, um wie viel H weiter vom Mittelpunkt der Erde absteht, als A u. s. w. Bei kleinern Entfernungen der Oerter A, D ist jene Abweichung (Gefälle) fast für Nichts zu achten; bei größern meilenweiten Abständen muß sie aber in Betracht kommen, wenn es sich um sehr genaue Berghöhenmessung und Nivellements handelt. Wir wollen die hieher gehörigen Rechnungen kürzlich in ein paar Aufgaben kennen lernen.

§. 140.

Aufgabe. (Fig. 108.)

Die Weite AE = w, welche ohne merklichen Fehler dem Bogen AD gleich gesetzt werden darf und der Halbmesser der Erde = r sind gegeben, daraus werde das Gefälle (Abweichung) DE = h berechnet.

Auflösung. Da AE = w eine Tangente an einen größten Kreis der Erde, so ist nach einem bekannten Satz der Elementargeometrie

$$w^2 = (2r + h)\,h = 2rh + h^2, \text{ mithin}$$
$$h = -r + \sqrt{w^2 + r^2}$$

Man kann auch in der Ausübung ohne beträchtlichen Irrthum

statt $r^2 + w^2 = (r+h)^2 = r^2 + h\,(2r+h)$ setzen:

$$w^2 = h \cdot 2r, \text{ weil } r \text{ gegen } h \text{ immer sehr groß ist,}$$
$$\text{also } h = \frac{w^2}{2r}.$$

Die letztere Formel ist bequemer, und reicht meines Erachtens aus, um alle Gefälle für gegebene Weiten zu berechnen. Eine Tafel der Art ist logarithmisch ganz leicht anzufertigen, wobei w und r in gleichem Maße, z. B. in Fußen oder mètres ꝛc., ausgedrückt werden; man kann hierbei r = 18937251 Rheinl. F. ansetzen. Im Handbuch der angewandten Geometrie von Dr. Benzenberg findet sich eine solche Tafel der Gefälle für r = 6366200 mètr. (Puissant in seiner Traité de Topographie setzt r = 6366198 mètr.) und Abstände von 100 bis 10000 mètr. von 100 zu 100 fortschreitend. Dies genügt für die meisten Fälle, da Weiten über 10000 mètr. (gegen 2 Mei-

len) nicht leicht vorkommen. Ist z. B. w = 100 mètr. so wird

$$h = \frac{100^2}{2 . 6366200}$$

$$\log. 100^2 = 4,0000000$$
$$-\log. 2 . 6366200 = 7,1049103$$
$$\log. h = 0,8950897 - 4$$
$$h = 0,00078\ldots$$ also kaum 1 millimètre.

Eben so fände man für w = 10000 mètr.
h = 7,854 mètr. nahe.

Man sieht also, daß bei kleinern Aufnahmen und Nivellements die Abweichung wegen der Kugelgestalt der Erde nicht erwogen zu werden verdient, wohl aber bei Höhenbestimmungen weit entfernter Gebirge.

§. 141.

Aufgabe. (Fig. 108.)

Die vertikale Höhe DE = h, z. B. eines Berges, ist bekannt; daraus soll die Größe der Tangente EA berechnet, nehmlich gefunden werden, wie weit man von E aus rund im Horizont herum sehen kann.

Auflösung. Die Erdoberfläche wird hiebei vollkommen sphärisch angenommen, ihr Halbmesser CD = CA = r.

Hier wird

$$w^2 = (r + h)^2 - r^2 = 2rh + h^2 = h(2r + h)$$
$$w = \sqrt{h(2r + h)}$$ oder $\sqrt{h(d + h)}$ für $2r = d$.

Will man zu noch größerer Genauigkeit statt w die zugehörige Bogenlänge DA haben, so setze man:

r : w = sin. tot. tang. β, woraus sich Bogen DA = β⁰ (gewöhnlich nur in Minuten ꝛc.) ergiebt. Für 1^0 = 15 geogr. Meilen wird dann die Bogenlänge DA = β^0 . 15 Meilen.

So läßt sich in der Voraussetzung der sphärischen Erdgestalt die Weite bestimmen, bis wohin man mit unbewaffneten oder bewaffneten Augen von der Spitze E eines Berges sehen kann; auch wie weit auf einer Ebene das Auge eines Menschen reicht, der 5 bis 6 Fuß hoch ist. Diese Seheweite beträgt ungefähr $2\frac{1}{2}$ Min. und in Bogenlänge etwas über $\frac{1}{2}$ Meile. Sind beide, das Auge und das entfernte Richtobject, über dem als sphärisch angenommenen Erdboden erhöht, so wird dadurch die Seheweite noch größer.

Beispiel: Nimmt man die Höhe des Brocken im Harz = 580 Tois., den Durchmesser der Erde = 1719 Meil. = 6543717 Tois., so wird w = 61609 Tois. nahe = 16, 18 geogr. Meil.

Ferner wird der terrestrische Bogen $\beta = 1^0 4' 44''$ nahe, daher die Weite DA im Bogen $= \frac{3884 \cdot 15}{3600}$ = 16, 183 geogr. Meilen.

Man kann sonach vom Gipfel des Brockens rund herum über 1^0 eines größten Kreises der Erde weit sehen, nehmlich mit Hülfe eines guten Fernrohrs. Doch kann auch die mögliche Seheweite durch näher gelegene, obwohl niedrigere Objecte (Berge oder desgl.) verdeckt werden. Der Anfänger wird wohl thun, wenn er sich zur Uebung noch einige Beispiele der Art für andere Berghöhen aufsetzt und ausrechnet. Wie weit kann man vom Montblanc oder vom Chimboraco, deren Höhen über dem Niveau des Meeres bekannt, sehen? Wie hoch muß ein Thurm am Ufer des Meeres seyn, wenn

man ſeine Spitze auf der See am Bord eines Schiffes 30 Meilen weit ſoll ſehen können? u. ſ. w.

Aus einer Tafel der Gefälle, wie man ſolche in mehreren Büchern, als in Picard's Schrift vom Waſſerwägen mit Lambert's Beiträgen, in Rheinl. Fußmaß, in Caſſini's Abh. von d. Fig. der Erde, in altfranzöſiſchem Maß, in Vega's Vorleſ. über die Mathematik u. ſ. w. 2r Bd. S. 374 u. a. m. findet, kann man nach der Größe der Höhe h auch umgekehrt die Seheweite w oder die Bogenlänge DA ohne weitere Rechnung herausnehmen.

Aus dem Geſagten erhellt zugleich, warum man bei einer großen Triangulirung die Standorte der Winkelmeſſung ſo hoch wie möglich, am liebſten auf Bergſpitzen nimmt.

§. 142.

Aufgabe. (Fig. 108.)

DH ſtelle eine Berghöhe vor, CA = CD Halbmeſſer der hier als ſphäriſch angenommenen Erde; es wird die wahre Erhöhung der Bergſpitze H über den Standort A, nehmlich DH verlangt.

Auflöſung. Es ſey die Baſis AD oder AH, welche hier = AE geſetzt werden dürfen, ingleichen der Elevationswinkel EAH gemeſſen. Da ∠ HEA = 90° + β, ſo iſt eigentlich das Dreieck AEH bei E nicht ganz rechtwinklicht, und läßt ſich ſtreng genommen als ſolches nicht berechnen. Indeſſen iſt in der Ausübung der terreſtriſche Bogen AD alſo auch der Winkel β, um welchen ∠ AEH größer als 90°, immer ſehr klein, gewöhnlich nur einige Minuten; man darf daher ohne beträchtlichen Fehler das Dreieck AEH als rechtwinklicht bei E behandeln. Wollte man jedoch

lrenger verfahren, ſo müßte man $\angle AEH = 90^0 + \beta$ n die Rechnung einführen. Ein Beiſpiel mag zur Erläuterung und Vergleichung der Reſultate dienen

Die franzöſiſchen Akademiker Bouguer ꝛc. (Boug. Fig. de la terre) maßen in Peru die ſchiefgeneigte Ba- is $AH = 6274{,}05$ tois., den ſcheinbaren Höhenwin- el $HAE = 1^0\ 5'\ 43''$ nach Abzug des Fehlers wegen er Strahlenbrechung. Nimmt man $\angle AEH = 90^0$, o wird:

$$6274{,}05 : HE = \text{sin. tot.} : \text{sin. } 1^0\,5'\,43'';$$

logarithmiſch berechnet $HE = 119{,}93$ tois.

Eigentlich iſt aber $\angle AEH = 90^0 + \beta$. Nimmt man nun ohne bedeutenden Fehler die gemeſſene Länge AH = der Bogenlänge AD, und 1 Meile = 3800 tois. in Gradmaß = $4'$, ſo gehört zu 6274 tois. der Win- kel β ungefähr = $7'$. Daher wird $\angle AEH = 90^0\ 7'$,

$$\text{mithin } 6274{,}05 : HE = \text{sin. } 90^0\,7' : \text{sin. } 1^0\,5'\,43'',$$

$$\log.\ HE = 2{,}0789203,$$

$$HE = 119{,}92 \text{ bis } 119{,}93 \text{ ſehr nahe.}$$

Setzt man daher den $\angle AEH = 90^0$ an, ſo beträgt der hieraus entſpringende Fehler für HE kaum $\frac{1}{100}$ ei- ner Toise und kaum $\frac{1}{10000}$ der ganzen Höhe, welcher bei ſolchen Beſtimmungen ſchlechterdings in gar keine Betrachtung kommt. Gewöhnlich ſind die Baſen AH oder AD noch kleiner als die oben bemerkte, dann wird die Correction des ſcheinbaren Höhenwinkels und der Größe HE noch unbedeutender. Man kann demnach meines Erachtens bei allen Höhenbeſtimmungen, ſelbſt ſehr weit entfernter Berge, jene Verbeſſerung außer Acht laſſen, oder $\angle EAH$ als wahren Elevationswinkel und $\angle AEH = 90^0$ ſetzen. Weit beträchtlicher aber und nie zu vernachläßigen iſt die Verbeſſerung der be- rechneten Höhe HE um den Zuſatz ED wegen des

ſcheinbaren Horizonts, wovon im §. 140. genügende Erklärung gegeben worden.

Im vorſtehenden Exempel wird $ED = 6{,}02$ tois., eine nicht zu überſehende Größe bei genauern Höhenmeſſungen.

Hieraus ergiebt ſich die wahre Erhöhung des Berggipfels H über den Standort A, nehmlich $DH = 119{,}93 + 6{,}02 = 125{,}95$ tois. $= 755{,}70$ Par. F.

Wird die Erhöhung der Bergſpitze H über den Meereshorizont verlangt, ſo muß durch anderweitige Beſtimmungen durch ein Nivellement oder durch Barometerbeobachtungen u. ſ. w. ſchon vorläufig die Erhöhung des Standorts A über die Meeresfläche bekannt ſeyn. Dieſe Höhe wird ſodann zu der trigonometriſch gefundenen DH addirt.

Caſſini brauchte zur Baſis $AH = 28764$ tois. von ſeinem Standort nahe am Meer bis an den Berg Kanigou in den Pyrenäen, der gemeſſene Höhenwinkel war $= 2^{0}\ 37'$. Daraus fand er die Höhe des Berges über das Niveau des Meeres $= 1440$ tois. Wäre das Correctionsſtück DE hier übergangen worden, ſo hätte der Fehler über 120 tois. betragen. Hieraus kann man erſehen, wie groß der Fehler wegen des ſcheinbaren Horizonts auf weite Entfernungen anwächſt, und wie ſorgfältig man ihn dann auszumitteln trachten müſſe.

Von der Correction der Höhenwinkel und Höhen wegen der irdiſchen Strahlenbrechung.

§. 143. (Fig. 109.)

Unter der irdiſchen Strahlenbrechung (terreſtriſchen Refraction — von der aſtronomiſchen

der 6ten Abth.) verſteht man die bogenförmige Ab-
nkung des Lichts terreſtriſcher Objecte von ſeinem ge-
dlinigten Wege, indem es durch die atmoſphäriſche
ıft bis zum Auge des Beobachters fortgehet. Es iſt
ne durch Erfahrung beſtätigte Thatſache, deren Grund
e Phyſik nur dürftig zu erklären vermag, daß ein
chtſtrahl bei ſeinem Uebergang aus einem dünnern in
nen dichtern durchſichtigen Körper (medium) oder um-
kehrt immer mehr oder weniger von ſeiner erſten
ichtung abgelenkt (gebrochen) wird, entweder gegen
ıs Einfallsloth zu oder abwärts davon. Das Nähere
erüber hat man in einem guten Lehrbuch der Phyſik
achzuſehen. Nach jenem Naturgeſetz wird alſo ein Licht-
rahl auch gebrochen, wenn er von einer dünnern Luft-
hicht der Atmoſphäre in eine dichtere übergeht. E t
un in Fig. 109.*) H einen erhöhten Richtpunkt, z. B.
ne Bergſpitze, vor, von wo aus ein Lichtſtrahl ſeines
Bildes nach den tiefer liegenden Beobachtungsort A
elangen kann, A E den Horizont von A, ſo giebt der
Winkel E A H die wahre Erhöhung (Elevationswinkel)
es Punktes H über den Horizont von A. Da aber
as Licht von H aus einer dünnern Luft nach und nach
n immer dichtere Luftſchichten übergeht, ehe es ins
Auge bei A gelangt, ſo wird es bei ſeinem Fortgang
ebrochen und zwar unendlich viele Mahl, weil begreif-
ich die Zunahme der Luftdichtigkeit in einer continuir-
ichen Reihe durch unendlich viele unendlich kleine Glie-

*) Das Verhältniß der Größen in dieſer Figur, wie in mehre-
ren andern, iſt nicht das wahre naturgemäße; die Höhe
B H, der Bogen A B ꝛc. ſind in der Wirklichkeit um ſehr
vieles kleiner gegen den Erdhalbmeſſer C A. Es läßt ſich
der Deutlichkeit wegen dies Mißverhältniß in kleinen Figu-
ren nicht vermeiden, und man kann ſich leicht das wahre
vorſtellen.

der geschieht. Auf solche Weise muß nothwendig die Bahn des von H gegen A fortlaufenden Lichtes eine krumme Linie HA werden, deren concave Seite hier gegen die Erde oder den Bogen AB hin gekehrt ist, da das Licht aus dünnern Medien in dichtere fallend gegen das Perpendikel HC hin gebrochen wird. Gelangt endlich das Licht des Bildes H ins Auge bei A, so sehen wir es in der Richtung des letzten unendlich kleinen Bogenelementes AN, nehmlich in der geradlinigten Richtung der Tangente AF. Daher erscheint der Punkt (Ort) H nicht an seiner wahren Stelle, sondern erhöht in F. Dadurch wird der wahre Elevationswinkel EAH bei A zu groß, nehmlich als ∠EAF beobachtet. Wollte man darnach im Dreieck AEF, das bei E immer äußerst nahe rechtwinklicht ist, die Erhöhung des Punktes H über den Horizont von A berechnen, so erhielte man dafür EF, also die wegen der Erdkrümmung corrigirte Höhe BH um HF zu groß.

Die irdische Strahlenbrechung bewirkt folglich einen entgegengesetzten Fehler in Höhenbestimmungen, als der von der Erdgestalt herrührende ist. Wenn letztere die Höhen zu klein macht, so macht die Strahlenbrechung (Refraction) dieselben zu groß. Kennte man in jedem Fall den Abweichungswinkel HAF, insgemein die Refraction genannt, so dürfte man nur den beobachteten scheinbaren Elevationswinkel EAF um die Refraction vermindern, um den wahren EAH zu erhalten. Die Refraction HAF ist indessen in der Wirklichkeit immer weit geringer, als solche in unsrer Figur vorgestellt werden konnte, nehmlich der Bogen HA ist nur sehr wenig gekrümmt. Etwas beträchtlicher ist die astronomische Strahlenbrechung, und die scheinbaren Oerter der Himmelskörper werden dadurch, besonders wenn sie nahe am Horizonte weit vom Zenith des Beobachters stehen, mehr erhöht, als die Höhen

auf der Erde durch die terreſtriſche Strahlenbrechung. Letztere wie die erſtere ſind übrigens keine ganz beſtändigen Größen, ſondern werden durch die veränderliche Schwere, Wärme und den hygrometriſchen Zuſtand der Atmoſphäre bald vermehrt, bald vermindert; ein Umſtand, welcher die Beſtimmung weit entfernter Höhen immer etwas unſicher macht und erſchwert. Die Veränderlichkeit der Refraction wächſt um ſo mehr, je weiter die Berge und je kleiner die Elevationswinkel werden; ſie zeigt ſich anders in den Mittagsſtunden als in den Stunden kurz nach dem Aufgang oder kurz vor dem Untergang der Sonne, ſelbſt an verſchiedenen Tagen weicht ſie wegen der veränderlichen Beſchaffenheit der Atmoſphäre beträchtlich ab. So wird man mit einem genauen Winkelmeſſer den Höhenwinkel eines entfernten Berges am Abend wohl um 2 oder mehr Minuten größer beobachten, als am Mittag, wovon man ſich durch einen wirklichen Verſuch leicht überzeugen kann. Nettleton (in den Philosoph. transact. 1725.) berichtet, daß er ſogar die ſcheinbare Höhe eines Hügels an einem Tage um 30′ größer gefunden habe, als an einem andern. Indeſſen kann dieſe große Differenz auch durch eine etwas fehlerhafte Winkelmeſſung entſtanden ſeyn.

Die Größe der terreſtriſchen Refraction in einer allgemeinen Formel, wenn auch nur annähernd wie es nicht anders ſeyn kann, auszudrücken, haben mehrere ausgezeichnete Geometer unternommen, unter welchen beſonders Tob. Mayer (der Vater), Lambert, Bouguer ꝛc. zu bemerken ſind. Ihre Angaben und Ausdrücke für die Refraction gründen ſich zuvörderſt auf directe Beobachtungen und Erfahrungen, ſodann auf das Geſetz der progreſſive von oben nach unten zunehmenden ſpezifiſchen Schwere der atmoſphäriſchen Luft. Wir können hier, weil der Gegenſtand mehr

physikalisch ist, nur die Resultate jener verdienstlichen Untersuchungen aufstellen. Nach den Beobachtungen aller jener Geometer ist die Bahn des von H nach A fortgehenden Lichts, nehmlich die Curve HA, sehr nahe einem regulären Kreisbogen ähnlich.

Mayer setzt den Halbmesser dieses Kreisbogens 8 Mahl so groß als den Erdhalbmesser, nach seinen in Frankreich darüber angestellten Beobachtungen, nehmlich (in unsrer Figur 109.) GA oder GH = 8 . CA. Davon handelt Mayer in einer kleinen Schrift: Programma de refractionibus objectorum terrestrium, Gotting. 1751.

Bouguer bestimmt nach seinen Beobachtungen jenen Krümmungshalbmesser GA = 9 . CA;

Lambert hingegen (in s. Schrift: Proprietés remarquables de la route de lumière, Haag 1758.) bestimmt GA = 7 . CA.

Am allermeisten wird die Lambertsche Angabe gebraucht; das arithmetische Mittel GA = 8 . CA zwischen jenen abweichenden Bestimmungen wird bei dieser an sich schwankenden und veränderlichen Sache wenigstens eben so nahe der Wahrheit kommen, als jede einzelne für sich. Lambert verbesserte nach seiner Theorie mehrere von Cassini trigonometrisch bestimmte Berghöhen, und fand sie so zusammenstimmend mit den barometrischen Messungen.

Für die eine oder andre Annahme des Krümmungshalbmessers läßt sich die Größe der Refraction also bestimmen:

Da in der wirklichen Ausübung der Bogen AB sehr klein (einige Minuten) ist, so darf man ohne beträchtlichen Irrthum die Bogenlänge AB = der Bogenlänge AH annehmen. In Gradmaß verhalten sich dieselben wie ihre Halbmesser = 1 : 7, wenn wir Lamberts Verhältnißzahl brauchen. Folglich wird

der Centriwinkel A G H nur $\frac{1}{7}$ des Centriwinkels A C B in Graden oder vielmehr in Minuten. — Ferner ist, weil A F eine Tangente und A H eine Sehne des Bogens A H, der Winkel H A F $= \frac{1}{2}$ G oder $= \frac{1}{14}$ C nach einem bekannten Satz der Elementargeometrie. Mit andern Worten, der Abweichungswinkel oder die Refraction H A F ist gleich zu setzen $\frac{1}{14}$ des terrestrischen Bogens A B in Gradmaß (Minuten). Kennt man die Länge A H, welche immer hinlänglich nahe = A B, so kann man daraus und aus dem Halbmesser oder größtem Umfange der Erde immer das Maß des Bogens A B also auch des Refractionswinkels in Minuten erlangen. Wäre z. B. die Bogenlänge A B = 1 geogr. Meile, wozu in Gradmaß 4 Min. gehören, so wäre die Refraction H A F $= \frac{4}{14} = \frac{2}{7}' = 17\frac{2}{7}''$. Wäre also, z. B. in einer Entfernung von 1 Meile, der scheinbare Höhenwinkel E A F $= 3^0\ 27'\ 30''$ gemessen worden, so wäre der verbesserte wahre E A H $= 3^0\ 27'\ 13'' = 17''$ nahe, auf $\frac{1}{2}$ Meile Entfernung betrüge dieselbe $8\frac{1}{2}''$.

Einige neuere Bestimmungen der Refraction weichen von den oben angezeigten nicht bedeutend ab. Laplace und Delambre geben dafür etwas Größeres, nehmlich 0,08, also beinahe $\frac{1}{12}$ des terrestrischen Bogens A B. Der Abweichungswinkel wegen des scheinbaren Horizonts, nehmlich E A B ist $= \frac{1}{2}$ C, folglich die Refraction H A F $= \frac{1}{7}$ oder nach der Bestimmung von Laplace und Delambre $= \frac{1}{6}$ des Winkels E A B. Da beide Winkel immer sehr klein u. s. w., so kann man ohne merklichen Irrthum annehmen, daß die Größen H F und B E sich wie jene Winkel, d. h. wie $\frac{1}{6} : 1$ verhalten. Den leichten Beweis für diese Näherung überlasse ich der weitern Betrachtung des Lesers. Ist nun die Basis A H oder A B = w, der Erdhalbmesser = r (in rheinl. Maß ungefähr = 18937251 Fuß), so ist (nach §. 140.) allgemein:

Die Abweichung wegen d. Erdgestalt B E od. $h = \frac{w^2}{2r}$, daher die Abweichung wegen der Refraction $HF = \frac{w^2}{12r}$, folglich die ganze Correction der falschbestimmten Höhe E F diese:

$$+ BE - FH = \frac{w^2}{2r} - \frac{w^2}{12r} = + \frac{5w^2}{12r}.$$

Daraus folgt die wahre Höhe B H = der scheinbaren E F $+ \frac{5w^2}{12r}$. Nach Lamberts Verhältnißzahl wird die ganze Correction:

$$\frac{w^2}{2r} - \frac{w^2}{14r} = \frac{3w^2}{7r} \text{ u. s. w.}$$

Da w immer sehr klein gegen den Erdhalbmesser r ist, so muß auch das Correctionsglied $\frac{5w^2}{12r}$ oder $\frac{3w^2}{7r}$ (man kann ohne merklichen Unterschied das eine oder das andre brauchen) sehr klein ausfallen. Bei Bestimmung nahegelegener Höhen kann man es ganz weglassen, und nur bei sehr weit entfernten Höhen muß man es berücksichtigen. Da für jede Weite w das Stück F H, um welches der Punkt H wegen der Refraction zu hoch erscheint, allgemein $= \frac{w^2}{12r}$ ist, so verhalten sich überhaupt die Größen, um welche die trigonometrisch bestimmten scheinbaren Höhen vermindert werden müssen, wie die Quadratzahlen der Entfernungen des Standorts A von dem erhöhten Object, welches insgemein ein Berg ist.

Lambert hat in besondern Tabellen angegeben,

wie viel man für eine bekannte Entfernung von der scheinbaren Höhe eines entfernten Berges abziehen müsse, um die wahre zu erhalten, z. B. in einer Entfernung von 21388 tois. habe man 10 tois. von der scheinbaren Berghöhe zu subtrahiren.

Hat man eine Tafel der Gefälle wegen der Erdkrümmung, nehmlich der Größe BE = h, für verschiedene Entfernungen, so darf man nur in jedem Fall h durch 7 (nach Lambert) dividiren, oder mit 0,16 (nach Laplace) multipliciren, um die wegen der Refraction abzuziehende Größe FH zu bekommen. Eine Tabelle auf solche Art berechnet für Entfernungen von 100 mètres, wo FH = 0, bis 10000 mètr., wo FH = 1,257 mètr. giebt. Puissant in seinem Traité de Topographie, als einen Auszug aus einem andern Werke: Essai sur le Nivellement, par Busson Descars. — Ich glaube jedoch, daß sich dergleichen Tafeln gänzlich entbehren lassen, weil für jede Entfernung w die ganze Correction der scheinbaren Höhe, nehmlich $\frac{5w^2}{12r}$ oder $\frac{3w^2}{7r}$, durch Logarithmen sich sehr bequem und schnell berechnen läßt.

Zur Ersparung des Raums muß ich meine geehrten Leser bitten, sich selbst ein Beispiel in der angezeigten Weise anzusetzen und zu berechnen. Wenn z. B. die Basis (Entfernung) AH oder AB = 17463 rheinl. Fuß, der scheinbare Elevationswinkel EAF = 5° 19′, wie groß ist die Refraction, die Abweichung BE, die ganze Correction der scheinbaren Höhe, wie groß die wahre Höhe BH des entfernten Berges?

Erwünschter wird es dem wißbegierigen, mit diesem Gegenstand noch nicht vertrauten, Leser seyn, wenn ich ihm noch mit ein paar Worten die Möglichkeit zeige, wie man durch directe Winkelmessungen die Größe der

Refraction H A F für gegebene Entfernungen und daraus auch den Halbmeſſer G A des Krümmungsbogens annähernd hat beſtimmen können.

Es ſtelle alſo (Fig. 109.) H eine Bergſpitze, A den niedrigliegenden Standort, die Senkrechte A E den Horizont von A und die Senkrechte H M den Horizont von H vor. Es ſind E A H und M H A die wahren Elevations- und Depreſſionswinkel für die Punkte A und H.

Nach Sätzen der Elementargeometrie iſt:

$$\angle C = 180^0 - \angle CHA - \angle CAH$$
$$\angle CHA = 90^0 - \angle MHA$$
$$\angle CAH = 90^0 + \angle EAH$$

$$\text{alſo } \angle C = \angle MHA - \angle EAH.$$

Aus der anderweitig beſtimmten Entfernung A H oder Bogenlänge A B, welche man hier ohne beträchtlichen Irrthum als gleich annehmen darf, läßt ſich jederzeit leicht der Winkel C oder Bogen A B in Minuten ꝛc. ableiten. Beobachtete man nun bei A und H die beiden Winkel M H A und E A H genau nach ihrer wahren, durch die Refraction nicht veränderten, Größe, ſo müßte ihr Unterſchied $= \angle C$ ſeyn. Bei ſehr vollkommener Obſervation mit vorzüglichen Winkelmeſſern findet ſich aber dieſer Unterſchied immer etwas kleiner. Die Refraction macht nehmlich den Depreſſionswinkel M H A um ein wenig zu klein, den Elevationswinkel E A H dagegen ein wenig zu groß, daher muß M H A — E A H ein wenig kleiner als C befunden werden. Die alſo bemerkte Abweichung (Fehler) in Minuten oder Sekunden giebt die Summe der Refractionen bei A und H und ihre Hälfte die einfache Refraction H A F für die Entfernung A H oder den terreſtriſchen Bogen A B. Wäre z. B. dieſer Bogen oder der Winkel $C = 4'$, die

Differenz MHA — EAH durch directe Beobachtungen = 3′ 26″ gefunden, so wäre die Summe der beiden Refractionen = 4′ — 3′ 26″ = 34″, also die einfache Refraction HAF = 17″. — Da ferner der Winkel G = 2 HAF und die Bogenlänge AH sehr nahe = der Bogenlänge AB, so läßt sich auf die bekannte Art weiter bestimmen, wie groß der Krümmungshalbmesser GA verglichen gegen den Erdhalbmesser CA seyn müsse. Begreiflich können alle dergleichen Bestimmungen wegen der nicht ganz zu vermeidenden Fehler im Beobachten, hauptsächlich aber wegen der beträchtlichen Veränderlichkeit der Refraction selbst, immer nur mittelmäßige Näherungen seyn; daher man sich die sehr stark abweichenden Angaben verschiedener Geometer erklären kann. Bouguer setzt, wie wir oben bemerkten, GA = 9 . CA, Mayer setzt ihn = 8 . CA, Lambert nimmt ihn = 7 . CA, Laplace und Delambre bestimmen ihn = $\frac{1}{6}$ CA. Gewiß hat jeder Beobachter seinen Satz für den richtigsten angenommen; eine Differenz von 3 Erdhalbmessern, um die man also irren kann, wird aber gewiß Niemand für eine Kleinigkeit halten!

Die Correction der Höhenwinkel wegen der Refraction wird aus diesem Grunde, noch mehr aber wegen der sich bei verschiedenen Zuständen der Atmosphäre nicht gleichbleibenden Größe, immer unvollkommen bleiben, was auch fernerhin dafür noch geleistet werden mag. Was aber kleine Fehler in den Elevationswinkeln, besonders wenn solche an sich sehr klein sind, auf die daraus berechneten Höhen entfernter Berge für nachtheiligen Einfluß haben können, wird jeder Leser ohne weitere Demonstration begreifen. Besonders um dieser Ursache willen zieht man daher auch in unsern Zeiten fast überall die bis zu einem sehr hohen Grad vervollkommeneten barometrischen Bestimmungen der Berg-

höhen den trigonometrischen vor; die letztern sind meistens sehr umständlich, weitläufig und gewähren wenigstens keine viel größere Genauigkeit, als die Barometermessungen, wovon ich in der folgenden Abtheilung handle.

Kurzer Inbegriff von den Fehlern in Bestimmung terrestrischer Dreiecke.

§. 144.

Bei jeder terrestrischen Messung oder Aufnahme, sie geschehe nun durch eine geometrische Construction, z. B. vermittelst des Meßtisches oder aber durch eine trigonometrische Operation, können Fehler in der directen Messung der Distanzen und Winkel vorfallen, sowohl wegen der Fehler oder doch beschränkten Vollkommenheit der Instrumente, als auch wegen Nachlässigkeit, Sorglosigkeit oder gar Unfähigkeit dessen, der die Messung verrichtet. Die Fehler, welche in der directen Messung der Distanzen und Winkel begangen worden, pflanzen sich auf die indirecte aus jenen abzuleitenden Distanzen und Winkel fort, und je größer die Irrthümer in Bestimmung der erstern, desto fehlerhafter werden auch die letztern gefunden. Die Genauigkeit der zu bestimmenden Größen hängt hauptsächlich von dem Grad der Schärfe ab, womit terrestrische Winkel geometrisch construirt, oder, was unendlich wichtiger ist, vermittelst eigner Winkelmesser in Gradmaß gefunden werden können. Denn es werden bei jeder etwas bedeutenden geometrischen oder trigonometrischen Aufnahme immer weit mehr Winkel construirt und gemessen, als geradlinigte Distanzen. Selbst bei den größten ausgedehntesten Triangulirungen ganzer Länder

mißt man jederzeit nur eine oder einige wenige Standlinien, als Basen des ganzen Dreiecknetzes, aber sehr viele Winkel. Die große Vollkommenheit, welche die Winkelmesser nach der Erfindung genauerer Theilapparate (Ramsden's Theilmaschine ꝛc.) heutiges Tages erreicht haben, trägt noch mehr als die verbesserten Methoden des Aufnehmens selbst dazu bei, unsern jetzt ausführbaren topographischen und geographischen Ortsbestimmungen eine Sicherheit und Zuverläßigkeit zu ertheilen, wie wir sie in frühern Arbeiten der Art in ältern Charten und Situationsplänen nicht antreffen. Es ist mit unsern Instrumenten ein Leichtes, einen Winkel bis auf 15″ oder 10″ annähernd zu messen; wäre nun in einem terrestrischen nahe gleichseitigen Dreiecke aus einer bekannten Seite als Basis und den gemessenen Winkeln eine zweite Seite trigonometrisch zu berechnen, so würde in diese Größe, wenn sie auch 1 Meile betrüge, nur eine Ungewißheit von höchstens ein paar Fußen kommen, folglich würde die zu bestimmende Weite etwa um $\frac{1}{8000}$ bis $\frac{1}{10000}$ ihrer wahren Länge zu groß oder zu klein gefunden. Unter weniger vortheilhaften Umständen, z. B. bei stumpfen und etwas spitzern Winkeln des Dreiecks, würde jene Genauigkeit doch zur Hälfte erreicht werden können. Allein die Genauigkeit der Winkelmessung kann mit Hülfe repetirender Kreise, z. B. des im §. 72. beschriebenen Theodolit, noch weiter bis auf 1″ oder sogar Theile einer Sekunde getrieben, folglich können die Distanzen noch genauer als auf $\frac{1}{10000}$ ihres wahren Werths durch eine sorgfältige Triangulirung erreicht werden. Bei kleinern Aufnahmen mit dem Meßtisch oder gemeinen Astrolabien muß und kann man sich mit einer geringern Genauigkeit von $\frac{1}{500}$ oder noch weniger begnügen. Die Absicht und die Größe der geodätischen Operation bestimmt den erforderlichen Grad der Genauigkeit und die hierzu nö-

thigen Werkzeuge. In jedem Fall muß man einen ungefähren Begriff haben von dem Maß der Zuverläſſigkeit, nach welchem man ſich in ſeinen Beſtimmungen und Character der Wahrheit annähert; denn ſelbſt die allervollkommenſte und vorſichtigſte trigonometriſche Operation iſt und bleibt nur eine, jedoch ſehr weit getriebene, Annäherung.

Größtentheils hängen die Fehler einer zuſammengeſetzten Aufnahme oder Meſſung von den Fehlern ab, welche in Beſtimmung einzelner Dreiecke vorfallen. Wir wollen hier, wegen Beſchränktheit des Raums, nur den einfachern Fall, auf welchen ſich die zuſammengeſetztern reduciren, in Betrachtung ziehen, nehmlich den Zuſammenhang oder die gegenſeitige Relation der Fehler in einem einzelnen terreſtriſchen geodätiſch beſtimmten Dreieck. Da in einem ſolchen ſich die Seiten verhalten, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel u. ſ. w., ſo ſind letztere gewiſſermaßen Funktionen von jenen, und umgekehrt. Mit den Fehlern eines oder einiger Stücke eines Dreiecks ſtehen immer größere oder geringere Fehler eines oder einiger Stücke eines Dreiecks ſtehen immer größere oder geringere Fehler eines oder mehrerer andern Stücke deſſelben in Verbindung. Es kann ſehr viele Fälle dieſes gegenſeitigen Zuſammenhangs (rapport) der Fehler oder Veränderungen in einem Dreieck geben, je nachdem ſich nehmlich unter den Beſtimmungsſtücken eines oder zwei ꝛc. verändern. Eine ausführliche Betrachtung aller Fälle würde die Grenzen dieſes Werkes überſchreiten, und hat übrigens nach meinem Ermeſſen mehr theoretiſchen als practiſchen Werth. Wer eine vollſtändigere wiſſenſchaftliche Belehrung über dieſen Gegenſtand der trigonometriſchen Analyſis begehrt, dem rathe ich, das in ſeiner Art ſehr klaſſiſche Werk von Cagnoli, nehmlich Trigonometrie

rectiligne et sphérique *) p. 150 sqq. nachzusehen. Lagnoli nennt die Relationen (Funktionen) der zusammengehörigen Veränderungen in einem Dreieck analogies differentielles dem Begriff der Infinitesimal- der Differential-Rechnung gemäß. Die Differentialien der veränderlichen Größen, welche bei diesen Kalkul nothwendig als verschwindende = o gesetzt werden, werden aber bei Betrachtung der Dreiecke als endliche jedoch sehr kleine Größen angenommen, die man in einem gewissen Zusammenhaug, ohne sich von der Wahrheit merklich zu entfernen, ebenfalls als wahre Differentialien = o betrachten darf, z. B. die Veränderung, welche Sin. 89° 59′ erfährt, wenn der Winkel um eine oder mehrere Sekunden wächst, kann man ohne Gefahr = o annehmen; eben so darf man den Cosinus eines sehr kleinen Winkels von einigen Sekunden oder selbst Minuten = Cos. 0° = 1 in Rechnung bringen ꝛc.

Eine einfache Art, die Relation der Fehler oder Veränderungen in einem Dreieck zu bestimmen, wird folgende seyn:

§. 118. (Fig. 8.)

Es stelle (Fig. 8.) A B C ein terrestrisches ebenes Dreieck vor, a b c seine Seitenlängen, A, B, C seine Winkel. Zur nähern Bestimmung des Ganzen oder eines gesuchten Stücks, gewöhnlich einer Seite, müssen drei Stücke gegeben seyn; gewöhnlich sind directe eine Seite c als Basis und zwei anliegende Winkel A, B,

*) Die 2te Edit. ins Französische übers. von Chompré ist vom Jahr 1808 Es ist das beste und gründlichste Werk über Trigonometrie mit vielen neuen Gedanken, wenn auch etwas weitläufig geschrieben und kaum zur Hälfte für die Praxis brauchbar, so ist es doch jedem wissenschaftlichen Denker vorzüglich zu empfehlen.

zur Versicherung auch wohl noch der dritte C gemessen. Auf dem Meßtisch wird die gefundene Basis verjüngt aufgetragen, und an diese werden die Sehewinkel durch eine geometrische Construction angesetzt.

Wären in einem oder in mehreren Bestimmungsstücken Fehler von muthmaßlicher Größe in positivem oder negativem Sinne begangen worden, so könnte man die daraus entspringenden Fehler in den gesuchten Stücken durch eine Doppelrechnung zweier Dreiecke ungefähr ermessen, indem man das eine (oder mehrere) Bestimmungsstück einmahl als falsch bestimmt, das zweitemahl, als richtiger gemuthmaßt, in Rechnung stellte. In den meisten Fällen wird man auch so verfahren, um den Grad der Annäherung oder die Grenzen der Fehler zu bestimmen, denen eine Messung wegen Unvollkommenheit der Instrumente, der Augen ꝛc. ausgesetzt ist.

Allgemeiner auf analytischem Wege, nach der Methode der Differentialrechnung,*) läßt sich jener Zusammenhang der Fehler also vorstellen:

Ein Winkel α nehme um einen sehr kleinen Winkel $\triangle\alpha$ (nach der Bezeichnung der Differentialrechnung, wo aber $\triangle\alpha = 0$ wäre) zu, so wird

aus Sin. α der veränderte

$$\text{Sin.}(\alpha + \triangle\alpha) = \text{sin.}\alpha.\text{cos.}\triangle\alpha + \text{sin.}\triangle\alpha.\text{cos.}\alpha.$$

Ist $\triangle\alpha$ sehr klein, nur einige Sekunden oder Minuten, so wird sehr nahe

---

*) Diese mathematische Scienz ist in der That weit leichter, als Anfänger und vom Namen der Rechnung des Unendlichen geblendete sich insgemein vorstellen. Bloß der metaphysische Begriff der verschwindenden Größen und der darauf sich gründenden Grenzverhältnisse (Differentialquotienten) hat einige Schwierigkeit, die jedoch ein guter Kopf bald überwindet.

Cos. $\triangle\alpha$ = sin. tot. = 1 und sin. $\triangle\alpha$ = der Bogenlänge $\triangle\alpha$,

lglich kann man ohne merklichen Fehler seßen

Sin. $(\alpha + \triangle\alpha)$ = sin. a + cos. α . $\triangle\alpha$.

aher wird die Zunahme des Sin. α, wenn der $\angle\alpha$ um $\triangle\alpha$ wächst, oder $\triangle$ Sin. α = cos. α . $\triangle\alpha$.

ngleichen wird Cos. $(\alpha + \triangle\alpha)$

= cos. α . cos. $\triangle\alpha$ — sin. α . sin. $\triangle\alpha$ oder wie vorher

= cos. α — sin. α . $\triangle\alpha$.

araus ergiebt sich

$\triangle$ cos. α = — sin. α . $\triangle\alpha$, hier die Abnahme des cos. α, wenn der W. α um etwas weniges wächst. Fände das Gegentheil Statt, so würde umgekehrt $\triangle$ cos. α = + sin. α . $\triangle\alpha$.

ch will nun den in der Ausübung am häufigsten vorkommenden Fall annehmen, wo eine Seite c als Basis nd die Winkel A, B aus einer directen Messung bekannt und gegeben sind, und hieraus eine zweite Seite berechnet werden soll. Hier wird:

a : c = sin. A : sin. C (oder sin. (A + B),

a . sin. (A + B) = c . sin. A.

ach der Differentialrechnung ist allgemein:

$\triangle xy = xy - \{(x + \triangle x) . (y + \triangle y)\}$

$= x . \triangle y + y\triangle x + \triangle x . \triangle y$

$= x . \triangle y + y\triangle x$, weil $\triangle x . \triangle y = 0$;

auch in der Praxis um so näher = o, je kleiner $\triangle x$ oder $\triangle y$ oder beide, gegen irgend eine Einheit verglichen, werden.

ieſem zufolge fließt aus der Formel:

a . $\triangle$ sin. (A + B) = c . sin. A

ieſe leicht zu überſehende Differentialgleichung, welche ber hier nur äußerſt annähernd wahr iſt,

$$a \,.\, \triangle \sin.\,(A+B) + \sin.\,(A+B) \,.\, \triangle a = c \,.\, \triangle \sin.\, A + \sin.\, A \,.\, \triangle c,$$

oder weil nach Obigem $\triangle \sin.\,(A+B) = \cos\,(A+B)\,.\,(\triangle A + \triangle B)$,

$$a\,.\cos.\,(A+B)\,.\,(\triangle A+\triangle B) + \sin.\,(A+B)\,\triangle a = c \,.\, \triangle \sin.\, A + \sin.\, A \,.\, \triangle c.$$

Sind daher von diesen 4 Fehlern (Veränderungen) $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle a$, $\triangle c$ drei in Zahlen annähernd bekannt, so läßt sich daraus der vierte berechnen, z. B. aus den bei Ausmessung der Basis c und der Winkel A, B wirklich begangenen oder muthmaßlichen Fehlern in der gesuchten Länge. Ist eine der bestimmenden Größen, z. B. c, richtig gemessen, so verschwindet ihr Differential in obiger Gleichung; sind alle drei richtig, so werden ihre Differentialien zu Null, also auch der Fehler der gesuchten Seite c. Wie man sieht, können hier mehrere Fälle Statt finden, je nachdem man von den bestimmenden Größen c, A, B alle drei oder je zwei oder je eines als falsch (veränderliche Größe) betrachtet.

$\triangle A$, $\triangle B$ sind in Theilen des Sin. tot. $= 1$ auszudrücken; bei so kleinen Winkeln kann man unbedenklich die Sinus den zugehörigen Bogen gleichstellen. Da zu einem Kreisbogen von 180^0 die Bogenlänge 3,1415926, zu 90^0 die Länge 1,5707963, und

$90^0 = 324000''$, so ist die Bogenlänge von

$$1'' = \frac{1{,}5707963}{324000} = \frac{1}{206264{,}8}.$$

Wäre nun der Fehler $\triangle A$ eines Winkels A in Sekunden bekannt, so würde

$$\triangle A = \frac{\triangle A}{206264} \text{ in Theile des Sin. tot.} = 1.$$

Beispiel: Es sey im Dreieck ABC (Fig. 109.) die wahre Basis c = 3165 Fuß, der wahre Winkel A = 37° 19′, ∠B = 44° 23′, so wird die gesuchte Weite a = 1938,995 F.

Nun wollen wir setzen es seyn falsch gemessen c = 3161 F., ∠A = 37° 21′, ∠B = 44° 22′, so wird die Weite a = 1937,94, also

$\triangle a = 1{,}055$ F. und $\frac{\triangle a}{a}$ oder der Grad der Genauigkeit beinahe $\frac{1}{2000}$ der ganzen Weite a.

Ich könnte diesen Gegenstand noch auf eine andre Art vorstellen, auch für andere Fälle, z. B. für zwei gegebene Seiten und den eingeschlossenen Winkel, andere Differentialgleichungen geben; allein der begrenzte Raum und die Absicht dieses Buches gestatten solches nicht. Ich verweise daher den wißbegierigen Leser, welchem an Erweiterung reintheoretischer Kenntnisse gelegen, nochmahls auf das oben citirte Werk von Cagnoli. Dieser behandelt jedoch den Gegenstand in einer andern Weise, als es hier geschehen, auch entwickelt er für mehrere verschiedene Fälle die Differentialgleichungen oder Analogien. Aus dergleichen Formeln und Betrachtungen, so wie aus der Natur der goniometrischen (trigonometrischen) Größen ergeben sich zugleich die vortheilhaftesten, der Gefahr der Fehler am wenigsten ausgesetzten, Gestalten terrestrischer Dreiecke Ein Dreieck ABC, von welchem eine Seite und zwei Winkel bekannt, wird um so zuverläßiger bestimmt, je näher die Winkel = 60° oder die drei Seiten einander gleich sind; sehr stumpfe und sehr spitze Winkel machen bei gleichen Irrthümern in der directen Distanzen- und Winkelmessung die Fehler in den gesuchten Stücken größer, welches schon aus gewöhnlichen trigonometrischen Betrachtungen erhellt. In einem rechtwinklichten Dreieck

wird eine Cathete, z. B. bei einer Höhenmessung, aus der zweiten Cathete und dem anliegenden spitzen Winkel bei gleichen Fehlern der Winkelmessung um so annähernder gefunden, je näher jener spitze Winkel = 45° oder je näher die beiden Catheten einander gleich sind u. s. w.

§. 146.

Vortheile einer möglichst langen Basis zu einer zusammengesetzten Triangulirung. (Fig. 110.)

Eine große Grundlinie A B ist zu einer einfachern und zusammengesetzten Triangulirung (Dreiecknetz) besser als eine kleine, einmahl darum, weil dadurch beim Anketten sehr entfernter Richtobjecte an dieselbe leichter allzuspitze oder allzugroße Winkel vermieden werden, zweitens auch darum, weil man dann nicht, wie bei größern geodätischen Operationen gewöhnlich geschieht, von kleinern Dreiecken auf größere übergeht, sondern umgekehrt. Im erstern Falle vermehren sich die bei Ausmessung der Basis vorgefallenen Fehler in den folgenden Standlinien, von wo aus man neue Winkel mißt, und dadurch die Lage neuer Richtpunkte festsetzt. Beim Uebergang von größern Dreiecken auf kleinere werden dagegen die Fehler in den folgenden trigonometrisch bestimmten Seiten und Standlinien verhältnißmäßig immer mehr vermindert, wenn nehmlich sonst in der Messung der Winkel keine beträchtlichen Irrthümer vorfallen. Für letztere hat man immer ein sichres Prüfungsmittel, wenn man alle drei Winkel eines terrestrischen Dreiecks observirt, und ihre Summe mit 180° ganz oder doch bis auf einige Sekunden nahe zusammen-

stimmend findet. Indem man endlich die kleine etwa bemerkte Abweichung von 180° in drei Theile theilt, und somit jeden der drei gemessenen positiv oder negativ corrigirt, werden die von den Winkeln abhängenden Fehler immer geringer als diejenigen, welche eine unrichtige Basis oder ein unschickliches Verhältniß in den Längen der Dreiecksseiten erzeugt.

Wir wollen annehmen, die Hauptbasis AB einer großen Aufnahme sey etwas fehlerhaft ausgemessen worden. Dieser Fehler in positivem oder negativem Sinne mag allgemein $\triangle AB$ heißen; er hat auf die indirecte bestimmten Seiten des ersten Grunddreiecks ABC und auf die im Fortgang der Triangulirung daran geketteten Dreiecke BCD, BDE u. s. w., wenn deren Seiten immer kleiner werden, einen Einfluß, der sich folgendergestalt darstellen läßt:

Wir setzen voraus, daß die Winkel a, b an der Hauptbasis AB zuverläßig genug beobachtet, auch durch den dritten bei C geprüft und verbessert worden, dann wird

$$AC = \frac{AB \,.\, \text{sin. } b}{\text{sin. } (a+b)}$$ und für die Differenz $\triangle AB$ wird

$$\triangle AC = \triangle AB \,.\, \frac{\text{sin. } b}{\text{sin. } (a+b)}.$$

Eben so wird der Fehler in der zweiten Standlinie BC nehmlich

$$\triangle BC = \triangle AB \,.\, \frac{\text{sin. } a}{\text{sin. } (a+b)}.$$

Sind nun AC und BC kleiner als AB, so müssen offenbar die Factoren $\frac{\text{sin. } b}{\text{sin. } (a+b)}$ und $\frac{\text{sin. } a}{\text{sin. } (a+b)}$ kleiner als 1, folglich auch $\triangle AC$ und $\triangle BC$ kleiner als $\triangle AB$ werden und zwar in demselben Verhältniß,

als es die kleinern Seiten AC, BC gegen die Basis AB sind

Geht man von der fehlerhaft bestimmten zweiten Standlinie CD auf ein folgendes Dreieck BCD über, so vermindert sich der Fehler △AB in den kürzern Seiten CD, BD bei richtiger Winkelmessung noch mehr. Es wird

$$BD = \frac{BC \,.\, \sin.\, a'}{\sin.\,(a' + b')}, \text{ wo } \frac{\sin.\, a'}{\sin.\,(a' + b')} \text{ wieder kleiner als 1, oder}$$

$$BD = AB \,.\, \frac{\sin.\, a \,.\, \sin.\, a'}{\sin.\,(a + b) \,.\, \sin.\,(a' + b')}.$$

Der Werth dieses Coefficienten von AB wird durch die Multiplication zweier ächten Brüche noch geringer als zuvor, also auch, indem

$$\triangle BD = \triangle AB \,.\, \frac{\sin.\, a \,.\, \sin.\, a'}{\sin.\,(a + b) \,.\, \sin.\,(a' + b')}$$

der Fehler △BD gegen den Fehler △AB noch mehr verkleinert. Gleichermaßen vermindert sich △DE noch weiter gegen △AB, wenn DE kleiner als BD wird u. s. w.

Bei richtiger Winkelbestimmung bleiben übrigens die fehlerhaften Seiten des Dreiecknetzes in denselben Verhältnissen, als es die wahren seyn würden. Jene sind daher Funktionen der unrichtig gemessenen Basis AB. Der Fehler in einer indirecte bestimmten Seite DE wird sich zum Fehler in AB eben so verhalten, wie DE : AB. Wird der Fehler in AB kleiner, so vermindert sich der auf DE übergegangene in demselben Verhältniß wie DE : AB.

Beispiel: Es sey AB wirklich = 21543′, aber falsch gemessen = 21532′, also um 11′ zu klein, ferner sei ∠a = 43° 7′, ∠b = 37° 19′.

Nach der falschen Annahme erhält man

$$BC = 14924{,}38',$$

nach der richtigen Annahme erhält man

$$BC = 14932{,}0',$$

folglich $\triangle BC = 7{,}62'$ zu $\triangle AB = 11'$ nahe wie 100 : 144. Eben so verhält sich BC : AB.

Fünfte Abtheilung.

Praxis der niedern Landmessung.

---

§. 147.

Umfang und Methoden der niedern Landmessung oder Feldmeßkunst.

Was man insgemein Feldmeßkunst, ökonomisches und militärisches Aufnehmen heißt, bezieht sich auf die Ausmessung kleinerer Distanzen und Erdstrecken, so wie auf die geometrisch-bildliche Darstellung derselben, in horizontaler Projection nach irgend einem verjüngten Maßstab; geometrische Grundrisse, topographische Charten, Situationspläne. Eine Erdstrecke kann man klein nennen, wenn sie von der gesammten Oberfläche der Erde so wenig beträgt, daß die sphärische Gestalt (Krümmung) der letztern keinen merklichen Einfluß mehr darauf hat, so daß man die geradlinigten Distanzen zweier Oerter gleich den zugehörigen Bogen (s. §. 138.) und die horizontalprojicirten ebenen Flächen gleich den zugehörigen Kugeloberflächen annehmen darf. Daß in diesem Sinne Erdstrecken von 2 bis 10 Quadratmeilen oder noch mehr als klein gelten und als solche beim Aufnehmen und in geometrischen Grundrissen (Charten) behandelt werden

dürfen, erhellt schon aus einer gewöhnlichen Betrachtung der Kugel. Meistens hat es aber die ökonomische und militärische Meßkunst nicht mit Aufnahmen von erwähntem Umfang, sondern nur mit Abständen von einigen tausend Fuß, höchstens $\frac{1}{2}$ Meile, mit Flächen von einer oder ein paar Quadratmeilen, zu thun. Dann wird die Rücksicht auf die Erdkrümmung um so mehr unnöthig und unnütz.

Hülfsmittel zu dieser beschränkten geodätischen Operation sind hauptsächlich der Meßtisch, womit man Strecken von einigen Quadratmeilen zuverläßig genug trianguliren und bis auf das kleinste Detail bildlich in einem verjüngten geometrischen Grundriß darstellen kann; zu trigonometrischen Bestimmungen weniger vollkommene Winkelmesser, als: das gemeine Astrolabium, ein kleiner Sextant, der reflectirende Halbkreis, statt deren auch wohl ein sogenannter katoptrischer Zirkel zu größerer Bequemlichkeit und Genauigkeit im Auftragen terrestrischer Winkel auf das Papier; endlich auch in einigen unvermeidlichen Fällen die Winkelbousole, bis zu dem Grad von Vollkommenheit angefertigt, deren dies höchst unvollkommene Instrument empfänglich ist. Meine unmaßgebliche Meinung über die Winkelmessung damit habe ich bereits früher ausgesprochen. Es wird aber wahrscheinlich mein Urtheil eben so wenig als die strafenden Erinnerungen anderer erfahrner Geometer von gemeinen handwerksmäßigen Conducteurs gehört werden, da, wie ich bemerke, noch immerfort die Bousolen viel häufiger gesucht, gekauft und gebraucht werden, als andere weit zuverläßigere, selbst weit wohlfeilere, Instrumente. Dem Mißbrauch und Unfug, welcher noch immer mit der Richtung der Magnetnadel von mechanischen Feldmessern getrieben wird, könnte meines Erachtens nur eine beschränkende Verordnung von Seiten der Landesregierung steuern;

denn verjährte tiefeingewurzelte Gebrechen weichen oft nur strengern Zwangsmitteln. — Zur Messung der Bergabdachungswinkel genügt eine gemeine Bergwage oder ein kleiner ganz einfacher Höhenquadrant, wie man solchen in Meinert's Lehrbuch: Die militärische Meßkunst p. 161 ꝛc. beschrieben findet.

Lassen sich die Horizontalwinkel auch nur bis auf 1 oder 2 Minuten genau beobachten, welches beim jetzigen Zustand der Wissenschaft und der damit verwandten Kunst immer erreicht und gefordert werden kann, so erlangen dadurch die Arbeiten des verständigern und gewissenhaftern Feldmessers eine Sicherheit, die ihm gewiß mehr Ehre und Freude verschafft, als die Pfuschereien mit der Winkelboussole gewähren können.

Größere Detailaufnahmen geschehen durch die Triangulirmethode, bei welcher man sich eine aufzunehmende Strecke Landes in lauter Dreiecke zerlegt denkt und als solche aufnimmt. Die Winkelspitzen dieser Dreiecke sind entweder natürliche Richtobjecte, z. B. Thürme, Windmühlen, Häuserecken, einzelne Bäume u. s. w., oder künstlich angelegte Signale, als Stangen mit Fahnen, Strohwischen ꝛc. Die Dreiecke und die dadurch bestimmten Richtpunkte beziehen sich entweder auf eine einzige ausgemessene Basis (s. §. 107.), oder aber sie bilden ein zusammenhängendes Dreiecknetz, in welchem immer eine bereits indirecte bestimmte Dreiecksseite als neue Standlinie zu einem oder mehreren andern Dreiecken dient, ohne daß diese neue Standlinie wieder directe auszumessen nöthig ist. In der Fig. 110. stellt AB die erste wirklich gemessene Basis vor, ABC das erste geometrisch mit dem Meßtisch oder trigonometrisch begründete Dreieck, BC die hierdurch ihrer Länge nach bestimmte zweite Standlinie, an welche sich ferner das Dreieck BCD oder mehrere andere ketten u. s. w. Zur Gründung und geometrischen Bezeichnung eines

Dreiecknetzes von einer kleinern Erdstrecke, etwa von einigen Quadratmeilen, leistet ohne Widerrede ein guter Meßtisch die nützlichsten Dienste. Verbindet man damit in gewissen Fällen noch eine Winkelmessung und trigonometrischen Kalkul, so kann man die Angaben des Meßtisches um so zuverläßiger prüfen und berichtigen. Bei wichtigen Detailaufnahmen wollte ich immer zu dieser Verbindung und Controle beider Methoden ernstlich rathen. Die Mühe und der Zeitaufwand werden dadurch nicht beträchtlich vermehrt, die Sehewinkel nach den entfernten Richtpunkten von dem Standort aus, wo man eben mit dem Meßtisch operirt, lassen sich mit einem kleinern leicht transportablen Winkelmesser, z. B. mit einem Taschensextanten, schnell genug observiren. Vor einer trigonometrischen Rechnung aber soll sich keiner fürchten, welcher die Meßkunst zu seinem Beruf erwählte.

Außer der Triangulirmethode bedient man sich beim Aufnehmen entweder nothgedrungen oder auch ohne Noth noch einiger andern Verfahrungsarten, welche aber insgesammt weniger Genauigkeit verstatten, und größern Fehlern ausgesetzt sind. Hierher gehört die, vom dänischen Geometer Bugge in Anregung gebrachte und in dessen Schriften: Anleitung zum Feldmessen, übers. von Tobiesen, und Beschreibung der Ausmessungsmethode ꝛc., deutsch herausg. von Aster, — als ganz vorzüglich brauchbar angepriesene Parallelmethode. Nach dieser soll man nehmlich ein Stück Land, oder wie Bugge sich ausdrückt, ein Land (am Ende gar ein großes Königreich oder ganz Europa?) durch Parallellinien eintheilen, diese erstlich genau abstecken und sodann mit der Kette ausmessen, der Ordnung willen aber am besten nach Süden und Norden nehmen. Diese Parallelen sollen stückweise auf dem Meßtisch verjüngt die Hauptgrundlinien

werden, aus welchen durch Vorwärtseinschneiden die Lage aller merkwürdigen Punkte der Gegend oder eines ganzen Landes zu bestimmen seyen. Wer sieht nicht auf den ersten Anblick, daß das richtige Abstecken und Ausmessen so vieler und langer Parallelen, besonders wenn solche über Berg und Thal laufen, Wälder, Sümpfe ꝛc. durchschneiden, eine höchst mißliche weitläufige Sache ist, und daß man hierbei wo nicht größere doch eben so beträchtliche Fehler begehen kann, als bei der ohne Vergleich einfachern und schnellern Triangulirmethode, welche nur die Messung einer einzigen oder zur Versicherung einiger wenigen Basen erheischt. Bugge ist, wie jeder Erfinder, für seine Parallelmethode sehr eingenommen. Nach meiner Privatmeinung ist sie im Großen unbrauchbar, wenigstens ganz entbehrlich; so viel mir bekannt, haben sie auch andere Geometer nicht anerkannt und ausgeübt. Ich werde sie daher in dieser Schrift auch nicht weiter erwähnen. Will der Leser jene Methode des Geschichtlichen wegen näher kennen lernen, so verweise ich ihn auf Bugge's oben citirte Schriften.

Eine zweite Nebenmethode bei kleinern Aufnahmen ist die durch Abscissen und senkrechte Ordinaten (Perpendikularen), welche besonders zur Bestimmung und bildlichen Darstellung der Flüsse, krummliniger Begrenzungen kleinerer Flächen, als Aecker, Wiesen ꝛc. dient. Es giebt auch hier sehr viel zu messen, indessen kann man dieser Perpendikularmethode ihren Werth und ihre Unentbehrlichkeit für gewisse Fälle nicht absprechen.

Gleicherweise nützlich wird bisweilen ein andres Verfahren, welches ich zum Unterschied von der erwähnten die Perimetermethode nennen will, weil man hier eine Figur im Felde, ohne Dreiecke, bloß dadurch aufnimmt, daß man progressive die Begrenzungslinien

ihres ganzen Perimeters nebst den von je zwei Seiten eingeschlossenen Winkeln mißt, und demgemäß einen verjüngten Grundriß auf Papier entwirft. Man wendet hierzu entweder Winkelmesser, gemeinhin die Bousſole, oder auch nur den Meßtisch an; auf letzterm werden die Winkel gleich an Ort und Stelle geometrisch construirt. Diese Messungsart, welche man sehr häufig zur Grundlegung von Städten, Dörfern, Wäldern, gebrochener Wege anwendet, ist äußerst beschwerlich, wird daher nur im Kleinen und im Nothfalle zu Hülfe genommen. Wir werden uns dies weiterhin an practischen Beispielen erläutern. — Aehnlichkeit damit hat das Aufnehmen der Figuren aus einem in ihnen angenommenen Mittelpunkt als Standort (s. §. 105. Fig. 75.) oder dasjenige durch Diagonalen (Diagonalmethode), durch welche man ein Vieleck im Felde in einzelne Dreiecke zerlegt. Die Dreiecke werden entweder durch eine bloße Seitenmessung mit Kette und Stäben — sehr mühsam und unvollkommen — oder mit Zuziehung des Meßtisches oder aber durch eine trigonometrische Operation bestimmt.

Als die vollkommenste, bequemste und schnellste Methode, wird sich in allen Fällen, wo ihrer Anwendung keine unausweichlichen Hindernisse in den Weg treten, das Trianguliren im Großen durch Winkelmesser, im Kleinen durch den Meßtisch bewähren.

Das Trianguliren mit dem Meßtisch geschieht entweder unabhängig für sich, d. h. man mißt in schicklicher Größe und Lage gegen die Richtpunkte der aufzunehmenden Gegend eine horizontale Basis, und knüpft sodann an diese die Bestimmungsdreiecke; oder es hängt dasselbe von einer größern vorhergegangenen trigonometrischen Operation (Dreiecknetz) ab, wodurch die Lage und die Abstände der Hauptrichtpunkte einer großen Landstrecke bereits gegeben sind. In letzterm Falle be-

darf es zum Detailliren oder Ausfüllen der größern Dreiecke keiner neuen Distanzen- oder Basismessung mehr. Die Hauptpunkte, z. B. A, B, C, D, E (Fig. 110.), sind ihrer Lage und Entfernung nach gegeben, auch nach irgend einem verjüngten Maßstab auf dem Plan des Meßtisches schon vorläufig fixirt. Der Detailleur gebraucht die gegebenen Abstände zu Standlinien, orientirt den Meßtisch nach den darauf befindlichen trigonometrischen Richtpunkten, und bestimmt nun durch Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden die Lage aller merkwürdigen Punkte, die zwischen den Hauptdreiecken liegen, z. B. der Punkte F, G, innerhalb des trigonometrisch festgesetzten △ A B C u. s. w. Hat man eine große Erdstrecke, eine Provinz, ein Land von mehreren hundert Quadratmeilen, nach dem Maße der Distanzen und der Flächenräume aufzunehmen, und davon eine Charte zu entwerfen, so ist nach allen darüber gemachten Erfahrungen und nach dem einstimmigen Urtheil der erfahrensten Geometer die erwähnte Verbindung beider Triangulirmethoden der zuverläßigste Weg dazu. Eine bloß trigonometrische Operation, selbst auf die kleinsten Dreiecke und Details fortgesetzt, würde nicht allein eine höchst mühselige, fast unausführbare Sache seyn, sondern auch mehreren Fehlern unterliegen, als gut ausgeführte Detailaufnahmen mit dem Meßtisch. Wollte man dagegen die ganze Charte durch Meßtischbestimmungen allein erhalten, nur aus einzelnen vollgearbeiteten Meßtischblättern zusammensetzen, so würde wegen der dem Meßtisch eigenthümlichen Unvollkommenheiten (man kann damit unter andern die terrestrischen Winkel nur bis auf 4 höchstens 2 Minuten genau construiren) die Charte ein verschobnes, verzerrtes, unwahres Bild der wirklichen Natur darbieten. Trigonometrie im Großen, der Meßtisch im Kleinen! dies muß der Wahlspruch und das unverletzbare Gesetz der

neuern Erd- und Landmessung seyn. Gründen sich die Operationen mit dem Meßtisch nur immer auf ein richtig ausgeführtes trigonometrisches Hauptnetz, so können sich die kleinen leicht möglichen Fehler der topographischen Detailaufnahme nicht weiter auf das Ganze verbreiten, sondern werden in sehr enge Grenzen eingeschlossen, leichter entdeckt, vermindert und für größere Specialcharten gleich Null. Ein unwissender Conducteur wird sich vor der Controle des trigonometrischen Netzes immer fürchten.

§. 148.

Verjüngter Maßstab der Situationspläne und der Charten überhaupt.

Die Einrichtung und der Gebrauch des verjüngten Maßstabes ist heut zu Tage jedem Anfänger der Geometrie bekannt.

Das Verhältniß der Verjüngung, nach welchem die Distanzen, Längen und Flächenräume einer aufgenommenen oder erst aufzunehmenden Erdstrecke in horizontaler Projection auf dem Papier (Charte) verkleinert dargestellt werden, ist sehr willkührlich, und richtet sich nach dem Umfang der dargestellten Landstrecke, nach der Größe der Charte, nach der Menge der darauf zu bemerkenden Objecte, theils auch nach einer gesetzlichen Vorschrift oder conventionellen Annahme.

Allgemein drückt der Bruch $\frac{1}{n}$ den Maßstab der Verjüngung aus; er zeigt an, daß jede horizontale Distanz auf der Erde um das nfache verkleinert auf der Charte dargestellt werden soll; die Flächenräume werden dann im quadratischen Verhältniß der Längen, nehmlich um das $\frac{1}{n^2}$fache, verkleinert nach dem Satz der Elementargeometrie, daß sich die Flächenräume ähnli-

cher Figuren gegen einander verhalten, wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Nehmen wir nun, wie gewöhnlich, die deutsche Meile = 2000 Rheinl. Ruthen = 20000 Dec. F., so wird z. B. der Exponent des Verjüngungsverhältnisses $\frac{1}{n} = \frac{1}{20000}$ für 1 Meile geben $\frac{20000'}{20000} = 1'$ F., oder eine Meile im Felde wird auf dem Papier durch die verjüngte Länge von 1 F. = 10 Zollen vorgestellt, und in demselben Verhältniß alle andern größern oder kleinern Weiten Die Flächenräume hingegen werden nach diesem Maßstab um das $\frac{1}{400000000}$fache, also viel mehr, verjüngt. Ist umgekehrt die Länge einer auf dem Papier vorgestellten Meile, halbe Meile u. s. w. gegeben, so läßt sich daraus das Verjüngungsverhältniß ungemein leicht ableiten. Wenn 1 Meile = 20000 F. = 200000 Z. durch 8 Zoll auf dem Papier vorgestellt wird, so ist das Maß der Verjüngung $\frac{1}{n} = \frac{8}{200000} = \frac{1}{25000}$. Allgemein, wenn man a F. = 10a Z. durch die verjüngte Länge b Zoll vorstellt, so wird $\frac{1}{n} = \frac{b}{10.a}$ u. s. w.

Der Maßstab, nach welchem größere und kleinere geodätische Operationen geschehen, und in Charten dargestellt werden, ist bekanntlich sehr verschieden. Generalcharten, welche nur die merkwürdigsten Gegenstände eines Landes anzeigen, sind ungefähr in dem Maßstab $\frac{1}{200000}$ oder in einem noch kleineru angefertigt. Charten nach dem Maß von 1 Milliontheilchen verjüngt, auf welchen folglich eine Meile durch 2 Linien oder $\frac{1}{5}$ Zoll repräsentirt wird, haben für sich allein keinen besondern Werth mehr. Die berühmte Cassinische Charte von Frankreich ist nach dem Maßstab von $\frac{1}{86400}$ angefertigt, so daß 100 Tois. auf der Erde 1 Par. Linie auf dem Papier betragen. Ungefähr dasselbe Größen-

erhältniß haben die Charten von Lecoq ꝛc. Spe-
elle Landcharten geben 1 bis 2 Zoll oder noch mehr
uf 1 Meile; noch speciellere trigonometrische Aufnah-
ien und Charten geschehen nach dem Maßstab von 4
is 5 Dec. Zoll auf eine Meile. Dieser reicht hin, die
Situation und die Terrainbeschaffenheit im erforderli-
en Detail aufzunehmen. Eine solche Charte, die mit
en darauf bestimmten Richtpunkten den Meßtischauf-
ahmen zur Richtschnur dient, kann fernerhin auf den
alben Maßstab von 2 oder auch $1\frac{1}{2}$ Zoll reducirt wer-
en.

Zu guten topographischen Detailaufnahmen kann
ian 1 F. = 10 Z. auf eine Meile festsetzen. Nicht so
equem hat man, ich weiß nicht warum, hier zu Lande
ür militärische Detailleurs 8 Z angenommen. Will man
un 8 — 10 Z. den ganzen militärischen Maß-
:ab heißen, so wird 4—5 Zoll der halbe seyn. Mit
) — 10 Zoll können alle dem Cameralisten, Militär ꝛc.
vissenswerthe Objecte deutlich genug ausgedrückt wer-
en. Bei sehr kleinen ökonomischen Aufnahmen, bis-
veilen auch zu militärischen Absichten, wird der Maß-
tab noch größer, 20 bis 24 Zoll auf die Meile, also
$\frac{1}{10000}$ gewählt. Ein noch größerer wird nie oder nur
äußerst nöthig seyn, da man schon dadurch alle kleinen
Details und Merkwürdigkeiten des Terrains deutlich
ind anschaulich genug bezeichnen kann.

Braucht man, wie gewöhnlich, zu kleinern Meß-
tischaufnahmen $\frac{1}{20000}$ der Verjüngung, so gehen auf 1
Dec. Zoll 200 Ruth. = 2000 F., auf 1 Dec Linie 20
Ruth. = 200 F., auf $\frac{1}{10}$ einer Linie 20 Fuß. Auf
dem Papier ist $\frac{1}{10}$ Lin. schon eine sehr kleine Größe,
um die man beim Einschneiden mit dem Meßtisch auch
bei aller Vorsicht wohl fehlen kann. Geschehen die
Durchschnitte unter sehr spitzen Winkeln, oder ist der
gebrauchte Maßstab noch kleiner, etwa nur 4 — 5 Zoll

auf eine Meile, oder verzieht sich nach dem Abnehmen vom Tischblatt das Papier auch nur ein wenig, so werden die Fehler in den Meßtischangaben noch beträchtlicher. So begreift man den Einfluß, welchen eine große schicklich gewählte Standlinie, ein großer Verjüngungsmaßstab, Vorsicht im Ziehen der Visirlinien, so wie in der Auswahl und Behandlung der gebrauchten Materialien, Papier, Bleifeder ꝛc. auf die Genauigkeit der Meßtischoperationen haben. So begreift man ferner, daß man ihre Anwendung gehörig beschränken und nicht auf allzugroße Triangulirungen ganzer Provinzen ausdehnen darf, ohne ein trigonometrisches Netz zu Grunde zu legen. Eine weitere Erörterung dieses wichtigen Gegenstandes kann nach dem Gesagten keinem Leser schwer fallen.

Die Reduction der Situationscharten von einem größern Maßstab auf einen kleinern, z. B. vom 10 auf den 5zölligen ꝛc. oder umgekehrt, hat in der Theorie keine Schwierigkeit, nur erfordert die Ausübung besondere Vorsicht und Hülfsmittel. Zu letztern gehören der Storchschnabel, noch zweckdienlicher der jetzt überall bekannte Reductionszirkel u. s. w.

Durch dergleichen Reductionen pflegt man aus guten topographischen Situationscharten, die für das Publikum zu groß und kostbar seyn würden, verjüngte Specialcharten und aus diesen weiter Generalcharten zusammenzusetzen. Doch werden hier insgemein sehr beträchtliche Fehler begangen, besonders wenn zur Hauptbasis der Special- oder Generalcharte nicht ein astronomisch und trigonometrisch festgelegtes Dreiecknetz dient. Daß auf den meisten für Wahrheit verkauften, selbst den zierlich ausgestatteten Charten die Oerter der Städte u. s. w. nicht selten um halbe Meilen oder noch mehr von ihrer wahren Stelle weggerückt stehen, muß jedem gelehrten Geographen bekannt seyn. Nur trigo-

nometrische und topographische Aufnahmen zu Berichtigung der Landcharten, zu Begründung eines gerechtern Catasters u. s. w. sind daher auch in den cultivirtesten Staaten eine so entbehrliche Sache nicht, wie es Manchem scheinen mag.

Allgemeine kurze Darstellung einer practischen Triangulirung mit dem Meßtisch.

§. 149.

Recognoscirung der aufzunehmenden Landstrecke.

Alle Aufnahmen mit dem Meßtisch gründen sich auf die einfachern Aufgaben und Sätze, welche in der dritten Abtheilung dieses Werkes von §. 104 bis §. 115 vorgetragen worden. Hat man sich diese Sätze wohl eingeprägt, so hat die zusammengesetztere Triangulirung oder Netzgründung mit dem Meßtisch keine besondere Schwierigkeiten, diejenigen ausgenommen, welche in der Praxis Lokalitäten des aufzunehmenden Terrains bisweilen verursachen. Indem ich unnöthige Wiederholungen zu vermeiden trachte, kann ich die Behandlung dieses Gegenstandes ins Kurze zusammenziehen.

Hat man eine etwas beträchtliche Landstrecke von einer oder mehreren Quadratmeilen in Grund zu legen, so ist es rathsam, dieselbe zuvörderst zu beweisen, um eine allgemeine Uebersicht über das Ganze zu erlangen. So bekommt man einen ungefähren Begriff von der Größe und Beschaffenheit des Terrains, von der Lage

und den Entfernungen der merkwürdigsten Richtobjecte, deren Namen, Bedeutung und Gestalt man sich in einem Brouillon (rohen Entwurf) aufzeichnet, um fernerhin Verwirrungen vorzubeugen. Auf solche Art lernt man zugleich die schicklichste Lage der auszumessenden Hauptbasis für das ganze Dreiecknetz kennen. In manchen Fällen kann auch statt einer Inspectionsreise und örtlichen Besichtigung eine schon vorhandene Situationscharte den nöthigen Aufschluß, allgemeinen Ueberblick über das Ganze gewähren. Soll die Aufnahme auf ein einziges Meßtischblatt kommen, wie solches z. B. mit den gegebenen Sectionen trigonometrischer Netze der Fall ist, so hat man den verjüngten Maßstab nach der Größe des aufzunehmenden Gebiets und der des Meßtisches einzurichten. Auf einem Meßtisch von 15 bis 18 Dec. Z. ins Gevierte läßt sich 1 bis $1\frac{1}{2}$ Quadratmeile nach dem 10- oder 8zölligen Maßstab immer sehr bequem construiren. Hat indessen jenes Gebiet eine viel größere Ausdehnung, so wird die Aufnahme desselben mit zwei oder mehreren Meßtischblättern in gehöriger Verbindung bewerkstelligt, und aus den einzelnen Blättern eine Totalcharte zusammengesetzt werden müssen. Zwei Blätter können hier begreiflich einander zur Prüfung und Berichtigung dienen.

Beim vorgängigen Rekognosciren der ganzen Landschaft wird man zugleich die schicklichste Lage der auszumessenden Hauptbasis, am besten auf einem nahe ebenen Terrain und in einer guten Stellung gegen mehrere Hauptobjecte, auszuwählen in Stand gesetzt. Die Grenzpunkte dieser Basis können schon jetzt durch künstliche Signale, wo es an natürlichen fehlt, bestimmt werden, wo möglich so, daß sie mit einem natürlichen Richtobject, z. B. einer Thurmspitze, einem ausgezeichneten Baum ꝛc. im Alignement liegen. Die Lage der Basis gegen das Ganze ist zwar an sich willkührlich,

doch thut man immer wohl, solche in der Mitte anzunehmen, so daß sich an dieselbe nach beiden Seiten eine doppelte Triangelreihe der herumliegenden Objecte anknüpfen läßt. Die den Meßtischaufnahmen eigenthümlichen Fehler können sich solchergestalt beim Fortgang auf neue Standlinien nicht so sehr anhäufen, als sonst geschehen würde. Aus der wahren Lage der Basis AB läßt sich ferner leicht die Lage beurtheilen, welche man ihrer Verjüngung a b auf dem Meßtischblatt zu geben habe, ob mehr in der Mitte oder näher am Rande ꝛc., um die ganze Aufnahme oder doch eine bestimmte Section davon auf einem Blatt ausführen zu können.

Fehlt es der recognoscirten Gegend auf weite Strecken an natürlichen Richtobjecten, so ersetzt man diesen Mangel durch künstliche Signale in schicklichen Abständen, um hierdurch das Ganze in mehrere kleinere Dreiecke von guter Gestalt, nehmlich mit nicht allzuspitzen noch allzustumpfen Winkeln zu zerlegen. Die künstlichen Signale braucht man indessen an den ausgewählten Stellen erst im Fortgang der wirklichen Aufnahme aufzustellen, wenn durch Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden ihre Lage gegen die Hauptbasis und andere Punkte bestimmt werden soll.

Geben mehrere von der Hauptbasis aus sichtbare Richtobjecte mit dieser keine guten Dreiecke, indem sie zu entfernt oder nahe im Alignement derselben stehen, so muß man deren Lage aus andern indirect bestimmten Standlinien bestimmen. Die richtige Wahl solcher Standlinien trifft ein etwas geübter Geometer schon bei der allgemeinen Recognoscirung. Auch lernt er dabei die Beschaffenheit des Terrains, die Aussichten zum Visiren und Einschneiden auf Richtpunkte, die Communication der Wege, die Namen und Gestalten der vornehmsten fixen Objecte, vorläufig in einem rohen

Entwurf (brouillon) zu bemerken ꝛc., kennen. Kurz eine allgemeine Besichtigung der aufzunehmenden Landstrecke erleichtert das Geschäft des Detailleurs ungemein, und ist gewissermaßen die halbgethane Arbeit.

§. 150.

Wirkliche Triangulirung mit dem Meßtisch. (Fig. 111.)

Man überspannt (überzieht) das Meßtischblatt mit feinem starken Imperialpapier. Die alte bekannte Art, das Papier auf einer Seite zuerst mit Wasser zu befeuchten, so aufzulegen und mit den umgelegten Rändern durch Mundleim zu befestigen u. s. w., taugt nichts, weil sich dann nach dem Abnehmen vom Meßtisch das Papier leicht verzieht, und die Lage der darauf bestimmten Punkte dadurch mehr oder weniger verrückt wird Man begegnet diesem Uebelstand zuverläßiger, indem man die eine Seite des Papiers mit geschlagenem (gequirltem) Eiweis, mittelst eines Schwammes, befeuchtet, dasselbe mit einem reinen Tuch von oben gleichförmig an den Meßtisch andrückt, und nun die vorher nach der Form des Tisches umgelegten Ränder mit Tischlerleim befestigt. Das rechte Verfahren hierbei ergiebt sich nach dem ersten oder zweiten Versuch.

Es sey nun A B (Fig. 111.) die schicklich ausgewählte Basis des geometrischen Netzes. Liegt dieselbe auf einem ganz oder nahe ebenen horizontalen Terrain, so ist die Absteckung und Ausmessung des horizontalen Abstandes A B mit keinen besondern Schwierigkeiten verknüpft. Man sehe, was darüber im §. 88 gesagt worden. Ist man, wie seltener geschieht, diese Basis A B auf einer schiefen Fläche zu nehmen genöthigt, so hat die Horizontalmessung, besonders mit der Meßkette,

gröſsere Schwierigkeit, beſſer ſind dann groſse Meſsſtäbe mit einer ſorgfältigen Nivellirung derſelben, vergl. §. 90, 91. Muſs man ſchief meſſen, ſo laſſen ſich die ſchiefbeſtimmten Abſtände auf den Horizont von A oder B reduciren, wenn man den oder die Neigungswinkel (Elevationswinkel) kennt; vergl. §. 135.

Bisweilen iſt die horizontale Diſtanz A B ſchon anderweitig, z. B. nach einer vorhandnen Situationscharte ꝛc. bekannt. Beim Detailliren mit dem Meſstiſch erwählt man auch wohl den Abſtand zweier Bergſpitzen, zur Baſis, weil man von einer Berghöhe aus eine freie weite Ausſicht zum Einſchneiden auf ſehr viele herumliegende Richtobjecte gewinnt. Da ſich eine ſolche Standlinie directe nicht füglich meſſen läſst, ſo nimmt man zu ihrer Verjüngung auf dem Meſstiſch eine willkührliche Länge a b, beſtimmt ſodann durch irgend eine Methode des Vorwärts- oder Rückwärts-Einſchneidens (nach §. 105 bis §. 115.) die Lage anderer Richtobjecte, z. B. C, H gegen A B, und miſst jetzt erſt eine Seitenſtandlinie, z. B. C H, directe aus. Dadurch erlangt man die Gröſse des verjüngten Maſsſtabes auf dem Meſstiſch, wo c h die gemeſſene Weite C H vorſtellt; es iſt nehmlich der Verjüngungsexponent $\frac{1}{n}$ (§. 148.) $= \frac{ch}{CH}$. Daraus und aus der verjüngten Gröſse a b auf dem Meſstiſch läſst ſich die wahre Diſtanz A B berechnen. Dieſe Methode hat ihr Unbequemes, indem der Verjüngungsexponent $\frac{ch}{CH}$ insgemein eine irrationale Gröſse wird, und nicht den vorgeſchriebenen Maſsſtab der Charte giebt, z. B. den 8 bis 10zölligen. Man muſs ſich zu einem ſolchen Verfahren nur im dringendſten Nothfall entſchlieſsen.

Häufiger aber tritt die Nothwendigkeit ein, von

einer kleinern wirklich ausgemessenen Standlinie CH auf eine größere AB durch indirecte Meßtischconstruction überzugehen; diese AB wird dann als die Hauptbasis der ganzen Aufnahme angenommen, und von ihr aus werden zunächst die herumliegenden Hauptrichtpunkte, z. B. Thürme, Bergspitzen, durch Einschneiden auf dem Meßtisch fixirt.

Die Messung einer Basis AB fällt ganz weg, ist wenigstens nicht durchaus nothwendig, wenn die gegenseitigen Lagen und Entfernungen dreier oder mehrerer Punkte im Felde, z. B. A, B, C, D, als Section eines trigonometrischen Dreiecknetzes auf dem Meßtisch nach irgend einem verjüngten Maßstab, gewöhnlich nach dem 10- oder 8zölligen, bereits gegeben sind. Hier kann man AB, AC ꝛc. zu Standlinien gebrauchen, aus welchen man durch Vorwärtseinschneiden die Lagen anderer Punkte, z. B. F, E bestimmt, oder aber man findet unmittelbar an irgend einem Standort seine Lage gegen ein (oder mehrere) auf dem Plan niedergelegtes Dreieck durch Rückwärtseinschneiden, z. B. die Lage der Oerter O und Y gegen das bekannte Dreieck ABC, wo O außerhalb, Y hingegen innerhalb des Dreieckes steht. Vergl. §. 112 bis 115.

Gleich beim Anfang der Aufnahme bestimmt man die Lage der Basis AB gegen die durch A oder B laufende Mittagslinie (Meridian), welche mit Nord — Süd in Fig. 111 bezeichnet steht. Dadurch wird die ganze Situationscharte mit den darauf fixirten Richtobjecten gegen die vier Himmelsgegenden richtig orientirt. Bei kleinern Operationen giebt eine feine Orientirbouſſole jene Orientirung hinlänglich genau, deren Stand man auf dem Meßtisch über A gehörig observirt u. s. w. Verlangt man auf der Charte statt der magnetischen die wahre Meridianlinie Nord — Süd, so muß begreiflich die bei uns westliche Deklination der

Magnetnadel annähernd bekannt seyn. — Die vollkommenste Methode, durch einen Ort A die Mittagslinie zu ziehen, deren Lage gegen zwei Oerter A, B auf der Erde und darnach auf der Charte zu finden, ist die astronomisch-trigonometrische, wovon in der 6ten Abth. gehandelt wird. Sind für das mit dem Meßtisch aufzunehmende Stück Landes die Hauptpunkte aus einem trigonometrischen Netz gegeben, so hat man die Richtung der Mittagslinie und der Himmelsgegenden schon auf der der Section des Meßtischblattes. — Die Richtung des magnetischen oder wahren Meridians pflegt man insgemein am Rand der Situationscharte in Form eines Pfeils zu zeichnen.

Durch Vorwärtseinschneiden kann man zuerst aus den zwei Endpunkten der gemessenen Basis A B und ihrer Verjüngung a b auf dem Papier die Lage mehrerer natürlichen oder künstlichen Richtpunkte, z. B. F, D, C ꝛc. gegen jene bestimmen; ein dreifaches Einschneiden aus drei Standorten der Basis gewährt mehr Gewißheit und Annäherung; vergl. §. 107.

Ich bemerke noch einmahl für allemahl, daß die künstlichen Signale, als hohe Stangen mit Kugeln, Fahnen oder Strohwischen nur so lange an ihren Stellen bleiben, als man gegen solche hinvisirt und einschneidet, daß dieselben aber im Fortgang der Messung wieder ausgezogen und an andern Stellen aufgerichtet werden können. Ihre Stellen werden auf dem Meßtisch und in einem eignen Manual durch Nummern oder besondre Zeichen und Namen bemerkt; auf dem Boden aber durch kleine gleichartig bezeichnete Marken, z. B. numerirte Stäbchen. Die Visirlinien A F, B F u. s. w. muß man nie ganz, sondern nur so viel davon mit der messerförmig zugeschärften Bleifeder ausziehen, daß man dadurch die Durchschnittspunkte F, E ꝛc. erhält. In der hierher gehörigen Figur 111 habe ich

solche bloß darum ganz ausgezogen, um das Dreiecknetz anschaulicher darzustellen. Um jeden Durchschnittspunkt, z. B. F, pflege ich mit Blei einen kleinen Kreis (Ringchen) zu zeichnen, und daneben einen Buchstaben oder eine Nummer zur Bezeichnung des gleichnamigen Richtobjects im Felde. Dadurch entgeht man zuverläßiger der leicht möglichen Verwirrung und Verwechselung der Oerter; die schwache Bleizeichnung läßt sich am Ende wieder ganz vertilgen und unmerklich machen.

Wenn andere Richtobjecte entweder zu weit von A B entfernt stehen, z. B. P, Z, ferner wenn sie unter zu spitzen oder stumpfen Winkeln (nahe im Alignement) gegen A B liegen, wie z. B. M, N, endlich wenn sie von A B aus nicht sichtbar sind, z. B. I wegen eines dazwischen gelegenen Berges, H wegen eines die Aussicht verdeckenden Waldes, so müssen die Situationen solcher Punkte aus einer zweiten oder dritten mittelbar (indirecte) auf dem Meßtisch erhaltenen Seitenstandlinie festgesetzt werden, so wie von A B aus die Lage der Punkte F, D ꝛc. gefunden worden. So bestimmt man von der Standlinie B C aus die Lage des Objectes H, von A C aus die des Objects R, von F D (auf einer Berghöhe) aus I durch Vorwärtseinschneiden. Die also begründeten Dreiecke dienen mit ihren Seiten als Standlinien der dritten Reihe wiederum zum Einschneiden auf noch entlegenere, früherhin unsichtbare, Richtobjecte, z. B. D I zur Festsetzung des Objectes K, B H zu derjenigen des Objects X u. s. w.

Die neuen Standlinien der ersten, zweiten, dritten Folge ꝛc. sind, wie man sieht, Verbindungslinien der ganzen Aufnahme. Man muß die äußerste Sorgfalt anwenden, um ihre wahren Horizontalabstände auf dem geometrischen Grundriß so annähernd wie möglich zu erreichen. Um sich dessen zu versichern,

schneidet man, wo es die Aussicht und die gute Gestaltung der Dreiecke erlaubt, auf ein und dasselbe Object auf drei oder noch mehreren Standlinien ein, z. B. auf O aus A B und A C; auch dient fernerhin das Rückwärtseinschneiden dazu, die bereits bestimmte Lage eines Objectes O gegen ein sonst richtig begründetes Dreieck A B C zu prüfen. Im Fall sehr geringer Abweichungen pflegt man, wo es auf allzugroße Genauigkeit nicht ankommt, wie gewöhnlich bei Ausfüllung eines kleinen trigonometrischen Netzes für militärischen Gebrauch, unter verschiedenen Durchschnittspunkten für ein Richtobject O einen mittlern Punkt als den richtigsten anzunehmen. Bei allzugroßen Fehlern aber wird eine Revision der Arbeit durch nochmahliges Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden durchaus nothwendig.

Noch eine andere Versicherungsmethode, die bei jeder größern trigonometrischen Triangulirung unerläßlich wird, nehmlich die wirkliche Ausmessung einer in-direct bestimmten Dreiecksseite, z. B. I K und die Vergleichung ihrer wahren Länge mit derjenigen, die ihre Verjüngung i k auf dem Meßtischblatt angiebt, kann bei kleinern, besonders schnellen militärischen Aufnahmen, entbehrt werden, verdient aber immer Empfehlung, wo es auf größere Genauigkeit ankommt. Man kann sogar noch mehrere andere Versicherungsbasen im Fortgang der Arbeit directe messen. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, die ganze Operation nach mehreren Seiten hin zu prüfen, zu berichtigen, und das Anwachsen der Fehler in den von der Hauptbasis A B weit entlegenen Dreiecken zu verhindern.

Das Vorwärtseinschneiden aus der gemessenen Basis A B und aus andern indirecte gefundenen Standlinien muß als Hauptact des geometrischen Trianguli-rens betrachtet werden, indem dadurch aus je zwei Standorten sogleich eine große Anzahl anderer Richt-

objecte in Grund gelegt wird, ohne daß man ihre Stellen auf dem Boden zu betreten braucht.

Eine zweite fast gleich wichtige, unter gewissen Umständen ganz unentbehrliche Operation ist die Bestimmung neuer Standorte, wo man sich eben mit dem Meßtisch aufstellt, gegen drei oder mehrere andere bereits in Grund gelegte Richtobjecte vermittelst des Rückwärtseinschneidens, vergl. §. 112 fg.

Diese Methode gewährt unschätzbare Vortheile bei größern und kleinern Meßtischaufnahmen, wird daher heutiges Tages von allen Geometern als vorzüglich brauchbar anerkannt und ausgeübt. Ein neuer dermaßen zu bestimmender Standort, z. B. P, konnte entweder von einer Standlinie A B, B C ꝛc. aus nicht anvisirt und durch Vorwärtseinschneiden bestimmt werden, wegen eines Zwischenhindernisses, wegen Ermangelung eines Signals ꝛc., oder er gab mit der Standlinie ein schlechtes Dreieck, oder man lernt die Vortheile seiner Lage zur Aufnahme und Bestimmung neuer Richtpunkte erst dann kennen, wenn man ihn im Fortgang der Aufnahme betritt. In allen solchen Fällen erhält er seine richtige Position gegen drei andere bereits in Grund gelegte Punkte, z. B. gegen A O C durch Rückwärtseinschneiden. Legt man durch diesen Punkt P ein schickliches Seitenalignement P W, und findet man in diesem die Lage eines andern willkührlich angenommenen, durch kein Signal ausgezeichneten Standortes Z wiederum durch Rückwärtseinschneiden, so erhält man somit eine neue Standlinie P Z zum Vorwärtseinschneiden auf weiter liegende Richtobjecte. Hat man z. B. von P gegen ein deutlich signalisirtes Object Q hin eine Visirlinie auf dem Meßtisch gezogen, so wird eine zweite Visirlinie aus Z gegen dasselbe Object die erste schneiden, und die Stelle von Q auf der Situationscharte bezeichnen.

Durch eine richtige Anwendung des Rückwärtseinschneidens und der Alignements kommt also, wie man sieht, nicht allein Sicherheit und Schnelligkeit in eine geometrische Triangulirung, sondern es läßt sich auch in eine abgebrochene Aufnahme eine neue bequem wieder anknüpfen. Sehr nützlich beweist sich diese Methode besonders bei kleinern Seitenmessungen, wo es an Signalen zu einer anderweitigen Bestimmung mangelt, oder eine wirkliche Längenmessung zu mühsam, weitläufig, auch wohl ganz unausführbar wird. So kann man die Lage und den krummlinigten Lauf eines Flusses, einer Waldbegrenzung eines Weges oder desgleichen finden, indem man die Lage mehrerer Grenzpunkte gegen andere schon festgesetzte Richtobjecte durch Rückwärtseinschneiden fixirt. Man hat hierbei künstliche oder natürliche Signale nicht nöthig, auch kann man die Standorte in willkührlicher Anzahl und immer so wählen, daß sie den Lauf und die Lage der krummlinigten Begrenzung, des Flusses ꝛc. dem Zweck der Situationscharte gemäß annähernd genug geben. Nach unsrer Fig. 111 werden am Uferrand eines Flusses der Standort O gegen ABC, die Oerter S, T gegen BCH durch Rückwärtseinschneiden bestimmt; ein vierter Ort R konnte früher aus der Standlinie AB oder AC durch Vorwärtseinschneiden, er kann aber auch auf die zweite Art vermittelst der Richtobjecte ABD u. s. w. gefunden werden. Bei kleinern Seitenmessungen könnte man zwar die Lage eines Ortes gegen zwei andere, z. B. G gegen FM, auch dadurch festsetzen, daß man den Meßtisch über M gehörig orientirte, die Weite MG mit Kette oder nach Schritten mäße, und auf der von M gegen G gezogenen Visirlinie nach dem Maßstab der Charte verjüngt auftrüge; allein dies Verfahren ist wegen der unmittelbaren Distanzenmessung nicht allein ohne Vergleich beschwerlicher, sondern auch größern Ir-

rungen unterworfen, als die Grundlegung des Ortes G durch Rückwärtseinschneiden gegen die Oerter A, F, M.

Zur Bestimmung eines Ortes durch dies Verfahren eignen sich nicht alle bereits in Grund gelegte Richtobjecte gleich gut; man wählt dazu drei solche, welche die gesuchte Lage am besten bestimmen, nehmlich unter nicht allzuspitzen noch allzustumpfen Winkeln am Durchschnittspunkt. Zur Prüfung kann man indessen auch noch von drei andern Richtpunkten gegen den Standort hin einschneiden. So wird z. B. die Lage des Standorts P am zuverläßigsten durch die Richtobjecte A O C gefunden, zur Versicherung können noch die Richtobjecte A B D dienen; am untauglichsten zu dieser Absicht zeigen sich aber die Objecte A B C u. s. w.

In der Praxis können alle in der vierten Abtheil. von §. 109 — 115 erwähnten und einzeln erläuterten Fälle eintreten, jedoch der eine häufiger als der andre. So kann gleich im Anfang der Aufnahme aus der gegebenen Distanz A B durch Aufstellung des Meßtisches über B und C die Lage und Größe der Weite B C (nach §. 109. Fig. 79.) indirecte bestimmt, und diese nun statt der eigentlichen Basis A B als erste Standlinie zum Vorwärtseinschneiden auf entfernte Richtobjecte gebraucht werden. Ferner befinden sich in unsrer Figur die Standorte P, Z außerhalb der sie bestimmenden Dreiecke A O C, B C H einer Seite gegenüber, der Standort N außerhalb des Dreiecks A G M einer Winkelspitze gegenüber; L, Y hingegen liegen innerhalb der bestimmenden Dreiecke E I K und A B C. Man muß sich mit den in §. 109 — 115 vorgetragenen Aufgaben und Methoden sehr vertraut machen, um bei ausgedehntern und beschränktern Meßtischaufnahmen überall das rechte Verfahren zu treffen.

Es bedarf übrigens kaum einer Erinnerung, daß

die durch Rückwärtseinschneiden bereits auf der Situationscharte bestimmten Richtpunkte, wenn sie nehmlich als scharfbegrenzte natürliche, seltener künstliche, Signale in die Ferne hin sichtbar sind, fernerhin zur ähnlichen Grundlegung noch anderer weiter entfernten Standorte angewendet werden können. So begreift man den ausgebreiteten Nutzen und — man kann behaupten — die Unentbehrlichkeit des Rückwärtseinschneidens zu topographischen Messungen und darnach zu entwerfenden Situationscharten.

Durch Vorwärtseinschneiden aus Standlinien wird man am besten die Lage solcher Objecte bestimmen, welche auf weite Entfernungen als deutlich und scharf begrenzte Signale gesehen werden, und wohin man mit dem Meßtisch nicht gelangen kann, z. B. Thurmspitzen, Berggipfel, auf welchen man zu genauerer Bestimmung irgend ein Signal, eine Stange oben mit einer Kugel oder desgl. aufrichten kann, Häuserecken, hohe ausgezeichnete Bäume ꝛc. Bäume sind unter allen natürlichen Signalen die unzuverläßigsten, weil man beim Visiren nach ihnen aus verschiedenen Standorten wohl nicht immer auf ein und dasselbe Centrum derselben trifft, also besonders bei nahen Abständen kleine Fehler begeht, auch darum, weil Bäume, von verschiedenen Seiten gesehen, oft andere Gestalten zeigen und leicht verwechselt werden, wenn mehrere zusammenstehen. Man muß daher nur isolirte oder, wenn bei einer Aufnahme zugleich Richtpunkte innerhalb eines Waldes oder in einer waldigen Gegend zu bestimmen sind, nur ausgezeichnet hohe, scharfbegrenzte nicht leicht zu verwechselnde Bäume dazu wählen.

Durch Rückwärtseinschneiden muß man im Gegentheil nur die Lage solcher Oerter in Grund legen, zu denen man wirklich kommen kann, denen es an natürlichen Signalen fehlt, die man von der ersten, zwei-

ten ꝛc. Standlinie nicht sehen oder nicht unter guten Bedingungen aufnehmen konnte, oder aber welche man erst im Verlauf der Aufnahme als vorzüglich brauchbar kennen lernt und erwählt. So greifen beiderlei Methoden in einander, unterstützen einander wechselseitig, und liefern in einer schicklichen Verbindung mit Vorsicht und Gewandheit von Seiten des Geometers ein brauchbares Netz der aufzunehmenden Gegend. Welche und wie viel fixe Objecte der Gegend aber auf die Situationscharte kommen sollen, hängt von der jedesmahligen Bestimmung derselben, auch wohl von gegebenen Vorschriften ab. Im Allgemeinen verlangt man auf einer solchen Charte die Lage aller Städte und Dörfer, Meiereien, einzeln stehende Häuser, die horizontale Projection der Gipfel von Bergen und Anhöhen, die Begrenzungslinien von Wäldern, Flüssen, Seen, Teichen, Hauptstraßen, auch wohl Nebenwegen u. s. w.

Was die noch weitere Ausfüllung der an sich schon kleinen Dreiecke im geometrischen Netz mit den darin befindlichen kleinern Details, nebst der Einzeichnung der Terrainbeschaffenheit anlangt, so soll das Wichtigste hierüber in den folgenden Paragraphen angemerkt werden. Aufnahmen eines kleinen Bezirks, z. B. eines Stadt- oder Dorf-Gebiets, einer Gutsbesitzung, eines Waldes ꝛc. werden in der ökonomischen und militärischen Feldmeßkunst fast immer unabhängig von einer größern geometrischen Aufnahme unternommen. Auch werden zu diesem Behuf statt der in diesem §. angezeigten Methoden oft noch andere Mittel und Wege erwählt.

§. 151.

Geometrische Triangulirung auf mehreren Meßtischblättern. (Fig. 111.)

Eine Triangulirung mit dem Meßtisch kann so große Ausdehnung haben, daß sie nicht auf ein einziges Blatt (Ueberzug) zu bringen ist. Gewöhnlich werden nun die einzelnen Meßtißblätter durch Sectionen eines trigonometrischen Netzes bestimmt, das man zu größerer Genauigkeit im Absetzen und Uebertragen bereits bestimmter Richtpunkte in kleinere Quadrate von etwa 2 bis 3 Meilen abtheilte. Auf jedes Meßtischblatt kommen dergestalt wenigstens drei trigonometrische Punkte. In solchen Fällen pflegen zu gleicher Zeit mehrere topographische Aufnehmer nach verschiedenen Seiten hin zu arbeiten. Am besten werden ihre Arbeiten unter einer geschickten Direction durch das trigonometrische Netz selbst controlirt, was auch Lehmann in seiner Lehre der Situationszeichnung, 2ter Theil, S. 36 dagegen einwenden mag.

Häufig geht jedoch eine zusammengesetzte Meßtischaufnahme unabhängig von einem trigonometrischen Netz ihren eignen Gang von einer festgesetzten und abgemessenen Basis AB aus. Dann erstreckt sich oft, besonders wenn man einen großen etwa 20 bis 24zölligen Verjüngungsmaßstab angenommen, das zu triangulirende Gebiet über die Grenzen eines einzigen Meßtischblattes nach einer oder mehreren Seiten hinaus. Man sieht sich daher genöthigt, die auf jenem begonnene Aufnahme auf einem zweiten Meßtischüberzug fortzusetzen, indem man eine auf dem ersten bereits indirect bestimmte Grenzbasis, z. B. EI (Fig. 111.) auf einen zweiten überträgt. Dies Uebertragen erfordert die größte Behutsamkeit und mathematische

Strenge. Wollte man das erste vollgearbeitete und abgelöste Blatt auf das zweite aufgespannte legen, und nun auf letzterm die Richtpunkte E, I vermittelst des sehr gewöhnlichen Durchstechens absetzen, so würde man Gefahr laufen, auch bei der größten Vorsicht beträchtliche Fehler nach dem Maßstab der Charte zu begehen, hauptsächlich darum, weil sich beim Ablösen des ersten Blattes vom Tisch eine Verschiebung der Punkte und des Maßstabes kaum vermeiden läßt. Dieses schlechte Verfahren, welches man oft zum Kopiren der Charten, Pläne und Zeichnungen anwendet, muß bei guten Meßtischoperationen überall verworfen werden. Weit sicherer geht man, indem man den Abstand EI auf dem ersten noch aufgespannten Meßtischüberzug mittelst eines vollkommenen Stangenzirkels mit feinen Spitzen und Mikrometerschraube abnimmt, und so auf das zweite aufgespannte Blatt überträgt. So verfahre ich selbst bei meinen Aufnahmen, und habe damit noch nie einen bemerkbaren Fehler begangen. Ein andres ebenfalls brauchbares Verfahren, welches zugleich fernerhin dem ganz speciellen Detailliren des geometrischen Netzes zur Grundlage dienen kann, besteht darin:

Man überzieht das erste sowohl als das zweite, dritte ꝛc. Meßtischblatt mit gleichartigen Netzen von kleinen Quadraten (mit feinen leicht wieder zu vertilgenden Bleilinien), deren Seiten etwa 1 oder $\frac{1}{2}$ Dec. Zoll betragen mögen. Man findet so genau wie möglich die senkrechten Abstände der Verbindungspunkte E, I von je zwei oder mehreren Seiten der kleinen Quadrate, und setzt sie dann in derselben Art auf das zweite aufgespannte Blatt über. Statt durch die senkrechten Abstände kann man die Lage eines Punktes I auch durch Intersection zweier Kreisbogen aus zwei Eckpunkten eines Quadrates erlangen.

Nachdem man die Bindungslinie EI verjüngt auf

as zweite Meßtischblatt aufgetragen, so wird an diese eue Basis die weitere Aufnahme wie vorher angeket- t. Zur Versicherung genauer Arbeit und harmoni- ber Zusammenstimmung zweier Situationsblätter dient, enn man auf dem zweiten Blatt noch einen oder meh- re Richtobjecte, die zum Bereich des ersten schon vol- ndeten gehören, durch Einschneiden bestimmt, und mgekehrt. Beim Zusammenstoßen zweier Blätter zu ner ganzen Situationscharte werden dann nicht bloß e Verbindungslinien E I auf dem einen und dieselbe I auf dem andern, sondern auch noch die gegenseiti- n Prüfungspunkte, z. B. D, L, zusammenfallen, wo- rn man richtig gearbeitet. Eben so, wenn mehrere lätter zu einem Ganzen zu vereinigen sind. Man greift jedoch, daß dieses Zusammentreffen nicht als n ganz untrüglicher Beweis der Wahrheit für andere, s den oder die Aufnehmer selbst, gelten kann. Ar- itet einer allein, so kann er beträchtliche Fehler und achläßigkeiten begehen, vieles nach dem Augenmaß f die Charten setzen (kroquiren), phantasiren, ohne ß der Betrug von andern entdeckt wird. Arbeiten ei oder mehrere Aufnehmer nach verschiedenen Seiten, können sie sich über die Mittheilung der Ränder mit nander verstehen und diese zusammenzeichnen. Es nn sogar die Situation gegen die Grenzränder hin chtig aufgenommen, aber in der Mitte jedes Blattes s Nachläßigkeit gefehlt werden. Darum müssen be- utende Arbeiten dieser Art jederzeit der Prüfung ei- s gebildeten Chefs unterliegen. Kleine Irrungen d nie ganz zu vermeiden, große auffallende werden merkt und nachgewiesen, durch Besichtigung der auf- nommenen Landstrecke, Vergleichung derselben mit m Chartengebilde, zum Theil auch durch geometrische er trigonometrische Prüfungsmessungen.

§. 152.

Vom Aufnehmen mit der Boussole im Allgemeinen. (Fig. 112.)

Wie man vermittelst einer Boussole terrestrische Winkel mißt, und daß die Genauigkeit einer solchen Messung sich auch unter den günstigsten Umständen höchstens bis auf $\frac{1}{4}^0 = 15'$ erstreckt, dies setze ich hier als bekannt voraus. Man darf nur ein solches Instrument sehen, um seine Anwendung und seinen beschränkten Nutzen sogleich zu verstehen. Es darf die Boussole zu keiner nur etwas bedeutenden Triangulirung und Aufnahme, wie solche mit Hülfe des Meßtisches nach §. 151. ausführbar, gebraucht werden, sondern nur zur Darstellung der kleinsten Details für ein schon fertiges geometrisches Netz, so wie zur Grundlegung einzelner kleiner Bezirke und Besitzungen, besonders in bedeckten Gegenden, wo es an freien Aussichten zum Einschneiden mit dem Meßtisch mangelt. Auch kann sie in Taschenformat — Schmalkalder's Handboussole, §. 67. — bei flüchtigen militärischen Aufnahmen im Felde oftmahls nützliche und dabei schnelle Dienste leisten. Daß sie aber von Feldmessern häufig auch da angewendet wird, wo genauere Bestimmungen von Abständen, von Lagen der Oerter, von Flächenräumen u. s. w. erforderlich sind, und wo ein andrer Winkelmesser oder der Meßtisch ungleich zuverläßigere Resultate verschaffen könnte; dies erklärt sich zum Theil aus fortgeerbten Vorurtheilen, zum Theil aus dem äußerst leichten, bequemen Gebrauch des Werkzeuges, endlich auch zum Theil aus den Schwierigkeiten, welche sich zuweilen einer Aufnahme mit dem Meßtisch entgegensetzen. Bei übler regniger Witterung, wo man mit jenem nicht wohl arbeiten kann, lassen sich mit der Boussole immer

noch Winkel, wenn auch wenig genau, im Felde meſſen, in ein Manual (Feldbuch) notiren, und dann zu Hauſe mit Papier übertragen. Dafür giebt es hier aber auch weit mehr Weiten zu meſſen, als bei Meßtiſchaufnahmen. Die gemeſſenen Winkel werden mittelſt eines Transporteurs oder auch mittelſt der Bouſſole ſelbſt, die gemeſſenen Weiten aber nach einem verjüngten Maßſtab auf dem Situationsplan niedergelegt. Bei beſchränktern ökonomiſchen und Forſtmeſſungen braucht man die Bouſſole beſonders dazu, die Umgrenzungen kleiner Beſitzungen, Aecker, Wieſen u. ſ. w., den Lauf der Flüſſe oder Krümmungen der Wege, zu beſtimmen, ingleichen zur Grundlegung der Figuren im Felde, z. B. Wälder, aus ihrem Perimeter.

Ein Beiſpiel der Art wird alle ähnlichen Fälle erläutern.

Es ſey (Fig. 112.) ein Wald aus ſeinem Perimeter (Umfangslinien), ingleichen Wege, die durch denſelben führen, in Grund zu legen.

Wenn, wie gewöhnlich, der Wald nicht ganz von geraden Begrenzungslinien, ſondern zum Theil von krummen, eingeſchloſſen iſt, ſo begrenzt man ihn durch gerade Linien, durch natürliche oder künſtliche Signale in ſchicklichen Abſtänden nahe am Waldrand. Die kleinern Krümmungen und Abweichungen von dieſen geraden Grenzlinien findet man durch eine Nebenmeſſung ſenkrechter Abſtände (Perpendikularen) z. B. F G.

Man ſtellt die Bouſſole über M auf, und beobachtet den Polygonwinkel O M P oder noch bequemer bloß die Abweichung der Nadel (magnetiſchen Meridianlinie) von der Viſirlinie M O, nehmlich den Abweichungswinkel N M O. Dieſe Beſtimmung der öſtlichen oder weſtlichen Abweichung wird durch die Conſtruction des Inſtruments möglich, indem die Viſirlinie der Dioptern durch den Anfangspunkt des Gradbogens

läuft. Die östliche oder westliche Abweichung in Gra-den pflegt man im Feldbuch durch die Buchstaben O oder W zu bezeichnen. Hierauf mißt man mit der Kett oder auch bloß nach Schritten die Weite NO. Eben so mißt man ferner den Winkel O oder die Abweichung der Nadel von OR und die Weite OR. So fährt man fort bis zum Schluß der ganzen Figur, nehmlich bis zum Anfangspunkt M. Die gemessenen Win-kel oder Abweichungen und die gemessenen Weiten MO, OR u. s. w. trägt man gleich auf der Stelle in ein Feldbuch (Manual, Brouillon) ein. Es versteht sich von selbst, daß man hierbei eine gewisse Ordnung zur Vermeidung irriger Angaben befolgen müsse. Der Feld-messer bringt sodann zu Hause die gemessenen Längen nach einem gewöhnlich etwas großen Maßstab und die gemessenen Winkel oder Abweichungen vermittelst eines Transporteurs oder der Boussole selbst aufs Papier und erhält damit ein verjüngtes Bild MORQTPM von der großen Figur im Felde nach ihrer Begrenzung und nach ihrem Flächeninhalt annähernd. Die kleinern Krümmungen werden nach flüchtigen Seitenmessungen auch wohl bloß nach dem Augenmaß, eingezeichnet.

Zur Prüfung der Winkel dient der Satz: daß die Summe aller $= 2n - 4R$, wenn die Seitenzahl der Figur n ist. Ob die Seiten und Winkel richtig gemessen worden, erkennt man, wenn die verjüngte Fi-gur sich gut schließt, nehmlich die letzte Linie PM mit der ersten MO im Anfangspunkt M sich genau vereini-nigt. Sind alle Winkel gemessen, so ist die wirkliche Abmessung zweier Polygonseiten, z. B. MP, PT, zur Construction auf dem Papier eigentlich nicht nothwen-dig, und umgekehrt. Allein zur Prüfung ist sie gut. Der richtige Schluß mag wohl selten geschehen; allein die Conducteurs erzwingen denselben durch Nachhülfe auf dem Papier, und da ihnen gewöhnlich Niemand

durch, daß in der Mitte einer, beliebig nahmen wir die Seitenlinie und ihre Mitte AB, ein Punkt C angenommen wird, und dann die Linien AC, BC gezogen werden. Es ist nun $AC = BC$, und $\angle ACB = 90°$.

In der Beantwortung, ob auf solche Weise wirklich ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, kann uns der Satz Euklidens helfen, daß in jedem Dreiecke die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich ist dem Quadrate der dritten, vermehrt um das Doppelte des Rechtecks, welches aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf sie gebildet wird. Wir haben also in unserm Dreiecke $AC^2 + BC^2 = AB^2 + 2AB \cdot MC$. Nun ist $AC = BC$, folglich $AC^2 = BC^2$, und $AB = 2MB$, folglich $2AB \cdot MC = 2MB \cdot MC$. Es ist also $AC^2 = MB^2 + 2MB \cdot MC$. Nun ist $MB = MC$, folglich $MB^2 = MC^2$, und $2MB \cdot MC = MC^2 + MC^2$. Es ist also $AC^2 = MC^2 + MC^2 + MC^2$, oder $AC^2 = 3MC^2$. Es ist also $AC = MC\sqrt{3}$. Da nun $MC = \frac{1}{2}AB$, so ist $AC = \frac{1}{2}AB\sqrt{3}$. Es ist also $AC : AB = \sqrt{3} : 2$. Da nun $AB = 2AC$, so ist $AB = 2AC

Boussole, wenigstens auf 3 Min., und ist daher auch bei kleinen ökonomischen Aufnahmen fast überall jener vorzuziehen. Hat man ein Astrolabium, zugleich mit einer Boussole verbunden, wie solche jetzt oft angefertigt werden, desto besser. Man kann dann die gemessenen Winkel gegenseitig controliren, und zugleich die östlichen und westlichen Abweichungen bemerken. Die mit einem Astrolabium gefundenen Sehewinkel müssen aber mittelst eines Minutentransporteurs auf das Papier abgesetzt werden. Aus vergleichenden Versuchen kann jeder Conducteur bald abnehmen, wie viel vorzüglicher die letztere Methode des Aufnehmens ist. Alle Figuren werden damit genauer und ungezwungener zum Schluß gebracht. Sehr bequem zu ökonomischen Messungen eben sowohl als zu militärischen läßt sich auch der von Douglas erfundene kleine Spiegelhalbkreis (§. 79.) anwenden, da man mit selbigem die gemessenen Winkel sogleich auf das Papier absetzen kann; dem ähnlich in der Anwendung ist ein katoptrischer Zirkel. Ebenfalls genauer als eine Boussole löst ein Meßtisch mit Orientirboussole die im §. 152 erwähnte und alle ähnlichen practischen Aufgaben. Um die Figur im Felde aus ihrem Perimeter aufzunehmen, stellt man den Tisch über M auf, zieht Visirlinien nach O, P, mißt die Weiten MO, MP und verjüngt solche auf den gezogenen Visirlinien. Ferner orientirt man den Tisch über O, so daß o über O und om mit OM zusammenfällt, zieht die Visirlinie von O nach R, mißt die Weite OR und verjüngt solche auf der gezogenen Visirlinie. So fährt man fort bis zum Schluß bei M. Das Orientiren des Meßtisches erleichtert bei flüchtigen Aufnahmen die kleine damit verbundene Boussole ungemein. Ein Einschneiden auf innerhalb liegende Richtobjecte findet nicht Statt, wenn das Terrain ein Wald oder desgl. ist. Wäre aber die Figur eine aus ihrem

Perimeter aufzunehmende Stadt, ein Dorf u. s. w., so könnte man beim Umgehen derselben zugleich innerhalb liegende sichtbare Nichtobjecte, z. B. Thürme, einzelne Häuser, Bäume, Gebüsche, Grenzpfähle u. s. w. durch Vorwärtseinschneiden bestimmen. So ließe sich (nach Fig. 112.) das innerhalb liegende Object B (Thurmspitze) aus der Standlinie MO, das Object C aus OR in Grund legen.

Durch die erwähnte ganz einfache Meßtischoperation (ohne Einschneiden) lassen sich auch gebrochene Richtungslinien, z. B. Waldwege, Stadt- oder Dorf-Straßen, welche unter verschiedenen Winkeln zusammenstoßen und einander durchkruzen, hinlänglich genau bestimmen. Indem man z. B. den Meßtisch nach und nach über A, B, C, D aufstellt und orientirt, sodann die gemessenen Weiten AB, BC, CD, CK, CL auf den gezogenen Visirlinien nach dem Maßstab der Situationszeichnung verjüngt, erhält man auf dieser die Größen und gegenseitigen Lagen der einzelnen Wege und Straßen. Auf einem mit Wald, Gebüsch, Häusern u. s. w. bedeckten Boden, wo es an freien Aussichten zum Einschneiden gebricht, leistet diese höchst einfache Bestimmungsweise außerordentlich wichtige, oft ganz unentbehrliche Dienste. Besonders wird solche zu militärischen sehr speciellen Detailaufnahmen angewendet, und da es hier auf die äußerste Genauigkeit nicht ankommt, so bedient man sich dazu oft nur kleiner leicht transportabler Meßtische (Planchette) mit einem einfüßigen Stativ, und mißt die Weiten bloß nach Schritten. Eben dies kann man sich bei kleinen ökonomischen und Forst-Aufnahmen erlauben.

§. 154.

Andere Methoden, Figuren im Felde aufzunehmen. (Fig. 113.)

In der vorigen Aufgabe, §. 152, 153, haben wir angenommen, daß eine Figur nur aus ihrem Perimeter durch wirkliche Umgehung ihrer Begrenzungslinien in Grund gelegt werden könne, weil ihr Inneres, mit Bäumen oder desgl. bedeckt, keine freie Aussicht gestatte. In der Praxis kommen indessen noch andere Fälle vor, welche eine verschiedene Behandlung erlauben. Ich will hier noch die merkwürdigsten dieser Fälle mit wenig Worten andeuten.

I) Kann man eine Standlinie außerhalb oder noch besser innerhalb der Figur annehmen, von deren Endpunkten eine freie Aussicht nach allen Eckpunkten (Winkelspitzen) A, B, C ꝛc., mit natürlichen oder künstlichen Signalen bezeichnet, Statt findet, so geschieht die Aufnahme, wie in §. 107 gezeigt worden. Dies Verfahren ist brauchbar in der ökonomischen sowohl als militärischen Meßkunst.

II) Wenn man von einem Standort innerhalb nach allen Eckpunkten der Figur hin visiren und messen kann, so geschieht die Grundlegung mühsamer und weniger genau nach §. 105. Eben so, wenn man den Meßtisch über einem Eckpunkt A (Fig. 113.) aufstellt, nach E, D, C, B visirt und mißt u. s. w. Man hat hier eine Weite weniger zu messen, doch wird dadurch wenig oder nichts gewonnen. Die Messung der vielen Weiten verrichtet man insgemein durch Abschreiten.

III) Wofern man den Meßtisch nur über einem Eckpunkt A aufstellen, von da aus nach allen

übrigen Eckpunkten B, C, D, E Visirlinien ziehen, und statt der Diagonalen die Polygonseiten AB, BC u. s. w. messen kann, so verjüngt man AB auf dem Meßtisch als ab, schneidet aus b mit bc, der gemessenen und verjüngten BC die Visirlinie AC in c, so ist △ abc ∼ △ ABC. So fährt man fort, bis die Figur im Anfangspunkt a zum Schluß kommt. Eine Probe der Richtigkeit wird es seyn, wenn nach der erwähnten Construction von de, der verjüngten DE, auch ea der gemessenen Weite EA nach dem Maßstab des geometrischen Grundrisses entspricht. Begreiflich kann dies Verfahren nur wenig Genauigkeit verschaffen, und ist daher nur im dringendsten Fall anzuwenden.

IV) Man kann den Meßtisch nach und nach über allen Eckpunkten der Figur aufstellen, jedoch darf oder will man nur eine Weite (Polygonseite) AB messen. Das Innere der Figur, etwa mit Bäumen, Häusern ꝛc. bedeckt, gestattet kein Visiren durch dasselbe nach Diagonalrichtungen. Jedoch befindet sich innerhalb des bedeckten Terrains ein Richtobject (Leitpunkt) L, z. B. eine scharfbegrenzte Thurmspitze, ein hoher Baum oder desgl., auch wohl mehrere, nach welchem oder nach welchen man von allen Eckpunkten A, B u. s. w. visiren kann. In solchem Falle stellt man den Meßtisch zuerst über A auf, zieht Visirlinien von a nach L und B, mißt AB und verjüngt dieselbe als ab. Hierauf orientirt man den Meßtisch über dem zweiten Standort so, daß b über B und ba in die Vertikalebene BA fällt, und zieht eine Visirlinie von b gegen L hin. Der Durchschnittspunkt l bestimmt die Lage des Richtobjectes gegen die ganze Figur. Nachdem man eine

Visirlinie von b gegen C hin gezogen, richtet man in diesem Alignement den Tisch über dem dritten Standort C gehörig ein, und zieht die Visirlinie L l rückwärts, wodurch man die verhältnißmäßige Länge c b als Verjüngung der Weite C B auf dem geometrischen Grundriß erlangt. Die weitere Erklärung davon ergiebt sich aus §. 109. Fig. 79. Kann man außer dem Richtobject L noch eines oder mehrere innerhalb der Figur zum Rückwärtseinschneiden benutzen, so erhält man damit ein Prüfungsmittel für die richtige Bestimmung von b c. Es müssen nehmlich, wenn man keine Fehler begangen, die von mehreren Richtobjecten rückwärts gezogenen Visirlinien durch einen gemeinschaftlichen Punkt c laufen. Bei geringen Abweichungen der Durchschnitte kann man einen mittlern Punkt als den zuverläßigsten annehmen. Eben so verfährt man in der dritten Station D, um d c die Verjüngung der Weite D C auf dem Meßtisch zu erhalten, und so weiter bis zum Schluß der Figur im Anfangspunkt A. Diese Methode ist in vielen Fällen der practischen Meßkunst brauchbar und äußerst bequem, weil es dabei nicht so viel Weiten zu messen giebt; sie gewährt aus leicht zu erachtenden Gründen wo nicht größere doch wenigstens gleiche Annäherung, als die vorerwähnten. Unter andern kann man dieselbe auch zur Grundlegung von Städten aus ihrem Perimeter gebrauchen.

V) Endlich wollen wir noch der Vollständigkeit halber einer ganz gemeinen, äußerst mühsamen und unzuverläßigen Art, Figuren im Felde, als Wiesen, Teiche u. dergl. nach ihrem Perimeter aufzunehmen, nehmlich bloß mit Kette und Stäben, kürzlich gedenken. Man soll nehmlich nicht allein

alle Begrenzungsseiten AB, BC u. s. w., sondern auch die Diagonalen AC, AD, wodurch die ganze Figur in einzelne Dreiecke zerlegt wird, messen, die gemessenen Weiten nach irgend einem Maßstab verjüngen, und somit nach der bekannten Weise eine kleine Figur abcde auf dem Papier construiren, der großen ABCDE im Felde ähnlich. Kann man aber keine Diagonalweiten messen, so soll man außer den Polygonseiten noch die Winkel A, B u. s. w. ebenfalls durch eine Längenmessung — denn an eine wahre Messung oder auch nur geometrische Construction der Winkel im Felde selbst ist hier nicht zu denken — bestimmen, und darnach auf dem Papier ein kleines ähnliches Bild von ABCDE entwerfen. So soll z. B. der Winkel A, wenn das Innere der Figur unzugängig wäre, dadurch gewonnen werden, daß man in der Verlängerung von BA eine beliebige Weite AM, in AE ein beliebiges Stück AN, drittens den Abstand MN ausmißt, und dann nach einem verjüngten Maß auf dem Papier ein kleines $\triangle$ amn $\sim \triangle$ AMN construirt, woraus sich zugleich der Nebenwinkel $nmb = \angle A$ ergiebt; vergl. §. 98. In mehreren Lehrbüchern der Feldmeßkunst wird weit und breit über das Aufnehmen mit Kette und Stäben gesprochen. Kunststücke der Art kann jeder Anfänger, der die ersten Elemente der Geometrie kennt, ohne schriftliche Anweisung selbst finden. Für beschränkte ökonomische Messungen mögen sie auch, wo alle besseren Hülfsmittel und Kenntnisse abgehen, bisweilen genügen. Noch in unsrer Zeit ist ein ganzes Buch für solcherlei Aufnahmen unter dem Titel: Vollständige Anweisung, ohne Winkelmeßinstrumente nicht nur Aecker,

Gärten-Waldungen ꝛc., sondern auch ganze Feldmarken zu vermessen u. s. w., zum Gebrauch für Oekonomen, Forstbediente, Gärtner und alle, die keine geometrische Kenntnisse besitzen (sic!) erschienen. Für Gärtner ꝛc. sind solche Schriften besser, als gar Nichts, sonst haben sie keinen Werth.

§. 155.

Aufnahme kleiner Figuren und Flächen durch Abscissen und Ordinaten oder Perpendikularen. (Fig. 114.)

Wie man eine krummlinigte Begrenzung im Felde vermittelst abgesteckter, sodann gemessener Abscissen und senkrechter Ordinaten bestimmen und in einem geometrischen Grundriß darstellen kann, erhellt aus §. 93. Fig. 54. Aber nicht bloß einzelne Richtungspunkte einer krummen oder gebrochenen Linie sondern auch ganze Figuren lassen sich durch ein solches Verfahren, Perpendikularmethode genannt, nach ihren Umgrenzungen (Perimeter), nach ihren Flächenräumen und nach den innerhalb derselben vorkommenden einzelnen Richtobjecten, als: Gebäuden, Grenzsteinen, Eckpunkten der Felder u. s. w. aufnehmen. Da diese Methode das Abstecken und Messen vieler geraden und senkrechten Linien verlangt, so ist ihre wirkliche Ausübung nicht allein höchst beschwerlich, sondern auch mancherlei möglichen Fehlern ausgesetzt. Ihr Nutzen wird sich daher nur auf Linien und Flächen von geringer Ausdehnung, z. B. übersehbare Wiesen und Felderstücke, erstrecken. Ferner kann man solche zum speciellern Detailliren ei-

ner Situationscharte, eines mit dem Meßtisch entworfenen Dreiecknetzes, neben andern Methoden mit anwenden. Zur Abmessung der geraden Linien dient die Kette, oder auch wohl nur das Ausschreiten, wo es auf große Genauigkeit nicht ankommt.

Zur Absteckung der Perpendikularen genügt ein Feldmesserkreuz, Diopterkreuz, (§. 59.); eine vollkommenere Construction desselben mit Fernrohr würde für den beschränkten Zweck zu kostbar werden. In manchen Fällen mag sogar ein geübtes Augenmaß zur Bestimmung der Perpendikularen dienen.

Es stelle Fig. 114 eine nach dieser Methode aufzunehmende Flur vor. Sie kann entweder ein einzelnes Felder-Wiesen-Stück (Parcele), oder aber eine aus mehreren zusammengrenzenden Partien bestehende Fläche seyn.

Man wähle am besten innerhalb der Figur, deren Grenzpunkte (Winkelspitzen) entweder durch natürliche Richtobjekte, als Grenzpfähle, Häuser u. s. w., oder durch künstliche Signale, Piquetstangen marquirt werden, eine schicklichliegende Standlinie A B als Abscissenlinie. Zur Berichtigung der Grenzen und Schlichtung etwa eintretender Grenzstreitigkeiten wird es dienen, wenn die Lage und Größe jener Abscissenlinie AB durch zwei natürliche fixe Richtobjecte, z. B. zwei Häuser bei A und B, begrenzt ist.

Man mißt die Abscissenlängen A L, L M u. s. w., so wie die dazu gehörigen Ordinaten, Perpendikularen G L, F M u. s. w. Die gemessenen Weiten werden in ein Feldbuch eingetragen, und um Verwirrungen vorzubeugen, in einer flüchtigen rohen Zeichnung (Croquis) gleich auf der Stelle angedeutet. Ordnungsgeist ist auch bei dieser Arbeit eine Hauptsache. Einige Perpendikularen können wieder zu Standlinien für andere dienen, um Seitenobjecte ihrer Lage nach zu bestim-

men, z. B. OH als Abscissenlinie für die Perpendikulare VU zur Grundlegung des Richtobjectes U ꝛc.

Solchergestalt wird nicht bloß die Umgrenzung (Primeter) der Figur, sondern auch ihr Flächenraum bestimmt. Die ganze Fläche wird durch die gemessenen Abscissen und Ordinaten in Trapezien mit zwei parallelen Seiten, in Rectangel und in rechtwinklichte Dreiecke zerlegt. Die Berechnung der einzelnen Flächenstücke (Parcelen) aus den gegebenen datis ist ganz elementarisch und leicht. Die Fläche des Trapezium EFMN wird $= \frac{(EN + FM) \cdot MN}{2}$.

Wenn also z. B. EN = 231 Fuß, FM = 147 F., MN = 69, so wäre die Fläche EFMN = 189 . 69 = 13041 Quadratfuß u. s. w.

Eine weitere Ausführung dieses Kalkuls, ein Schema hierzu mit Zahlenbeispielen wäre hier eine ganz nutzlose, weitläufige Arbeit. Hat die ganze Fläche (Flur) stellenweise krummlinigte Grenzen, wie in unsrer Figur zwischen A und H, so nimmt man aus geraden Grenzlinien AG, GH als Abscissenlinien durch Perpendikularen, z. B. mn ihre Lage (Krümmung) auf, findet so annähernd die von den krummen und geraden Linien begrenzten Flächenräume, und addirt oder subtrahirt solche nach Beschaffenheit der Krümmung zu oder von dem übrigen aus geraden Linien berechneten Flächeninhalt des Ganzen.

Wie man zufolge der gemessenen, im Feldbuch genau notirten, Längen der Abscissen und Ordinaten einen Grundriß nach einem gewöhnlich etwas großen verjüngten Maßstab auf Papier construiren könnte, bedarf hier keiner besondern Anweisung.

Die Winkel an den Grenzpunkten der Figur werden durch diese Construction unmittelbar erhalten.

ollte man dieſelben in Gradmaß etwas genauer ha-
n, ſo ließe ſich dazu auch trigonometriſche Berechnung
wenden. So beſteht z. B. der einwärtsſpringende
inkel AFE aus zwei Winkeln EFK und AFM.
un iſt FK = der gemeſſenen Abſciſſe MN, EK =
N — FM; ferner FK : EK = sin. tot. : tang. EFK.
o fände man den Winkel EFK, und auf ähnliche
t den Winkel AFM.

Auch über dieſen ganz einfachen Gegenſtand der
actiſchen Geometrie iſt ein ganzes Buch, weit und
eit mit vielen Wiederholungen, geſchrieben worden,
ter dem Titel: Anleitung zur Perpendiku-
rmethode ꝛc., von Phil. v. Reichlin, Leipzig,
tageſche Buchh. ohne Jahrzahl. Der Verfaſſer
llt in ſeiner Schrift S. 45. ein paar Proportionen
f, die nach der Bezeichnung unſrer Figur 114. alſo
uten:

log. FK : log. EK = log. sin. tot. : log. tang. EFK.

ieſes qui pro quo erklärt ſich nur dadurch, daß
eichlin mit jener Bezeichnungsart eine arithmeti-
e, nicht eine geometriſche, Proportion ausdrückt.

§. 156.

ufnahme von Terrainerhöhungen (Ber-
gen) und Darſtellung derſelben in Si-
tuationscharten. (Fig. 115 — 117.)

Berghöhen und Terrainerhöhungen überhaupt wer-
n entweder durch Culteliiren mit Maßſtäben (ſ. §. 91.)
er durch eine trigonometriſche Operation (ſ. §§. 124
s 129.), oder durch Nivelliren oder auch durch Baro-
eterbeobachtungen beſtimmt.

Auf einer speciellern topographischen Charte müssen nicht allein alle merkwürdigen Gegenstände einer aufgenommenen Erdstrecke in horizontaler Projection dargestellt seyn, sondern auch die Ungleichheiten des Terrains, Anhöhen, Hügel, Berge, Thäler, wenigstens die beträchtlichsten derselben. Dies muß nach einer Bezeichnung (Zeichensprache) geschehen, welche auf geometrischen Grundsätzen beruht, einfach leicht lesbar und der Natur der Sache angemessen ist. Keine leichte Aufgabe, denn unstreitig gehören richtige Berg- und Terrainaufnahmen überhaupt, so wie die darnach construirten Zeichnungen zu den schwierigsten Arbeiten der practischen Geometrie. Nicht allein sehr viele directe Messungen, sondern auch ein besonders gutes Augenmaß sind unerläßliche Bedingungen dazu.

Wir wollen hier nur den einfachern Fall der Art, nehmlich die Aufnahme und Bezeichnung eines einzelnen Berges, in Betrachtung ziehen, weil sich daraus die Verhaltungsregeln für zusammengesetztere Fälle, wo eine Verbindung oder Folge von mehreren Bergen, Hügeln, Thälern ꝛc. aufzunehmen und bildlich darzustellen ist, leicht ableiten läßt.

Es bedeute (Fig. 115.) CB die Höhe eines Berges, Hügels ꝛc., AB seine Basis, nehmlich die Entfernung seines einen untersten Grenzpunktes (Fußes) A von der vertikalen Projection der Bergspitze (Kuppe) C. Denkt man sich durch C eine Vertikalebene gelegt, welche die Horizontalebene, Basis des Berges im Centralpunkt B und in zwei entgegengesetzten Umgrenzungspunkten A, a schneidet, so stellt AaC eine Seitenansicht des Berges, ein Bergprofil, vor. Begreiflich kann man durch C unendlich viele Vertikalebenen legen. Ist ein Berg ziemlich regulär gestaltet, z. B kegelförmig, so werden verschiedene Profilansichten davon ziemlich gleich seyn. In solchem Falle bestimmt man die Gestalt, die

Abdachung und die Dimensionen des Berges bloß nach einem einzigen Profil. Wofern er hingegen irregulär gestaltet ist, so bedarf es zur bildlichen Darstellung desselben mehrerer, wenigstens zweier Profile, deren Ebenen sich etwa rechtwinklicht durchschneiden. Man sieht ohne weitere Erläuterung ein, warum die Profilzeichnung der Berge und der Terrainerhöhungen überhaupt nicht anwendbar ist auf Situationscharten, wo alle Gegenstände nur in horizontaler Projection erscheinen. So auch ein Berg, durch dessen Fuß, da wo nehmlich seine Abdachung in eine horizontale Ebene übergeht, oder an den Fuß eines andern Berges stößt, man sich eine horizontale Ebene vorstellt. Dermaßen wird auf der Charte die Umgrenzungslinie (Perimeter) seiner Basis erhalten, wenn vorhergegangene Messungen die Gestalt und Dimensionen derselben richtig ergeben haben. Innerhalb dieser horizontalen, nach irgend einer Curvengestalt abgegrenzten, Basis soll man ferner die höchste Spitze (Kuppe) so wie die Abdachungen des Berges nach allen Seiten jener Basis herab durch eine künstliche Zeichensprache andeuten. Doch muß diese Sprache nicht von der Willkühr und Phantasie eines einzelnen Individuums abhängen, sondern sich vielmehr auf mathematische Regeln gründen, die aus wirklichen Höhenmessungen und aus der Theorie von der Beleuchtung schiefer Flächen hervorgehen, und welche daher von jedem unterrichteten Geometer gleicherweise ausgelegt und verstanden werden. Nur aus dem Mangel bestimmter Regeln für die Terrainzeichnung kann man sich die Unvollkommenheit aller ältern Bergdarstellungen auf Charten erklären. Selbst jetzt noch ist dieser wichtige Zweig der Zeichnenkunst in mehreren Ländern zu dem Grad von Vollkommenheit nicht gediehen, dessen er allerdings fähig ist. Auf mehreren ausländischen Charten sieht man Bergzeichnungen, aus denen sich weder die Höhe

noch die Abdachungen eines Berges nur einigermaßen annähernd beurtheilen lassen. Ein confuses Gemisch von schwarzen Strichen, mit einfacher oder doppelter (gekreuzter) Schrafirung, zeigt nur dunkel an, und kaum dies erträglich, daß hier oder da ein Berg steht, aber auch weiter nichts. Puissant giebt in seinem Werk: Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement etc., als Musterprobe einer mit Geschmack (!) und Nettigkeit auf Charten darzustellenden Terrainbeschaffenheit eine Bergzeichnung, die allenfalls auch einen Ameisenhaufen oder einen Flechtenfleck (Krankheit) bedeuten kann. Man sehe in jenem Werke selbst nach, um sich von der Wahrheit meiner Behauptung zu überzeugen.

Eine richtigere, auf wissenschaftliche Principien gebaute, Bergbezeichnung ist zuerst von meinem Vaterlande Sachsen ausgegangen, und datirt sich vom Jahr 1794, von welcher Zeit an der geistreiche und verdienstvolle Major Lehmann, mit Benutzung des von andern Topographen bereits Geschehenen, seine Lehre der Situationzeichnung durch Wort und That ausführte. Sie heißt mit vollem Rechte die Lehmannsche Methode, da dieser Mann ganz unstreitig der erste war, welcher die Gesetze einer naturgemäßen Bergzeichnung in ein streng wissenschaftliches, consequentes, in sich geschlossenes System ordnete. Für die Profilzeichnung der Terrainungleichheiten war schon in den frühesten Zeiten alles mögliche geschehen; sie beruht auf reingeometrischer Construction, hängt weder von der Theorie der Perspective noch von der Kunst der Feder ab, und bestand daher in allen Ländern und zu allen Zeiten als eine und dieselbe. Die Grundzüge der Lehmannschen Methode mit Tabellen für die Grade der Abdachung und Beleuchtung theilte zuerst im Jahr 1707. der sächs. Hauptmann Backenberg in seinem

:hrbuch der Kriegswissenschaften 2ten Bd.
it. Das frühere Lehmannsche Manuscript
irde erst 1799. abgedruckt. Eine neuere verbesserte
isgabe dieser Schrift: Die Lehre der Situa=
onszeichnung ꝛc. vom Jahr 1816., ist jetzt allge=
:in bekannt, und nicht allein wegen des Textes son=
rn auch wegen der zugehörigen trefflichen Musterzeich=
ingen überall beliebt, wo nicht etwa Unkunde, Vor=
theil oder übler Wille sich dem Bessern widersetzt.

Ich will versuchen, jene neuere, an sich sehr ein=
che, Bergbezeichnungsart nach ihren Grundzügen und
egeln mit wenig Worten deutlich zu machen. Es be=
ute (Fig. 116.) CB die Höhe eines Berges in Be=
ehung auf die durch den Grenzpunkt A gelegte Hori=
ntalebene, AC eine Seitenabdachung, BAC = α
:n Abdachungswinkel (Böschungswinkel), AB die ho=
zontale Projection von AC.

Diese vier Größen hängen nach trigonometrischen
Sätzen (vom rechtwinklichten Dreieck) von einander der=
estalt ab, daß je zwei gegebene die Quantität der
ritten bestimmen. Sind AC und der Winkel α in
ahlen gegeben, so wird:

$$CB = AC \cdot \sin.\ \alpha \text{ und } AB = AC \cdot \cos.\ \alpha.$$

Sind AB und der Winkel α gegeben, so wird:

$$CB = AB \cdot \tan g.\ \alpha \text{ und } AC = \frac{AB}{\cos.\ \alpha} \text{ oder auch}$$

$$= AB \cdot \sec.\ \alpha \text{ ꝛc.}$$

Bei einer bestimmten Höhe CB bezeichnet der Bö=
chungswinkel α die Abdachung eines Berges nach einer
Seite hin am besten; indessen können auch die Ver=
hältnisse der schiefen Abdachungslinie AC oder ihrer
horizontalen Projection AB zur Höhe CB das Maß
der Abdachung bestimmen.

Es leuchtet sogleich ein, daß zwei Berge einerlei Höhe CB, aber verschiedene Abdachung (Steilheit) haben können. Geht der Winkel α in den kleinern β über, so vermindert sich die Abdachung (Steilheit), die Abdachungslinie aC und ihre horizontale Projection aB hingegen sind dadurch größer als AC und AB geworden. Ferner können zwei Berge in Hinsicht der horizontalen Projection AB gleich seyn, dann wird die Höhe CB, vom größern Böschungswinkel ABC abhängig, mehr betragen als die Höhe EB, welche vom kleinern Böschungswinkel BAE abhängt. Ein Berg ist daher im erstern Falle steiler, als im zweiten. Wollte man nun auf einer Planzeichnung die horizontale Projection AB für zwei verschiedene Berge durch gleiche Strichschattirung bezeichnen, so würde sich daraus nicht beurtheilen lassen, ob der eine Berg höher und steiler ist, als der andre.

Es können auch zwei Berge verschiedene Höhen CB, FG, aber dennoch einen und denselben Böschungswinkel α, folglich gleiche Abdachung (Steilheit) haben; dann gehört zur größern Höhe auch eine größere schiefe Abdachungslinie und eine größere Horizontale, als zur kleinern Höhe. Sonach werden Berge von verschiedener Höhe, aber gleicher Abdachung, zwar mit Strichen von ungleicher Länge aber mit gleicher Beleuchtung (gleicher Schattirung) auf der horizontalen Zeichnung anzugeben seyn. Endlich können auch zwei Berge gleiche Abdachungslinien $AC = Ac$ haben; dann ist die Ansteigung, Steilheit, desjenigen die größere, dessen Höhe oder Böschungswinkel größer sind. In diesem Falle bedarf es auf der horizontalen Bergzeichnung ungleich langer und ungleich schattirender Striche.

Denken wir uns durch AD eine horizontale Ebene gelegt, und diese von vertikal und parallel auffallendem Licht (Lichtstrahlen) beleuchtet, so kann dieses maximum

Beleuchtung auf dem Papier durch Weiß ohne richschattirung bezeichnet werden.

Kommt AD in die schiefgeneigte Lage Ac, so liert die Beleuchtung der ganzen Fläche so viel als vertikale Beleuchtung von Db beträgt, oder die leuchtung der Fläche in der Lage AD verhält sich zu jenigen in der schiefgeneigten Lage Ac wie AD : Ab. en so verhält sich die Beleuchtung der Fläche in der ge AC zu derjenigen in Ac wie AB : Ab. Allgein verhalten sich die Intensitäten oder Grade der Beichtung wie die Cosinus der Elevationswinkel. Steht C senkrecht auf AD, so wird Cos. 90° = 0, nehm) die Ebene empfängt von den auf AD senkrecht aufenden Lichtstrahlen gar nichts. Dieser gänzliche Lichtngel könnte auf dem weißen Papier durch vollen hatten (Schwarz) ausgedrückt werden.

So ließe sich eine Gradleiter der Beleuchtung für e Neigungswinkel von 0° bis 90 nach einer trigonotrischen Tafel ansetzen. Eine Schattirung aus Weiß d Schwarz zusammengesetzt in dem Verhältniß des osinus zum Sinus versus eines gegebenen Neigungsnkels, z. B. Ab : bD, würde die Beleuchtung der bene in der schiefen Lage Ac und damit zugleich den rad ihrer Neigung (Abdachung bei Bergflächen) anaulich machen. Daß aber so etwas für alle Neiungswinkel von Minute zu Minute oder auch nur von rad zu Grad genau genommen, in der Praxis aushrbar sey, dies wird in allem Ernste Niemand glaun wollen. Man muß und kann sich hier, wie in vien andern Fällen, wo die Praxis die Vorschriften der n sich richtigen Theorie nur theilweise auszuführen rmag, mit Annäherungen bis zu einer gewissen Grenze gnügen. So verhält es sich auch mit der von Lehann verbesserten Bergzeichnung.

Da in der Natur der Neigungswinkel von 45°

das maximum der Bergabdachungen zu seyn pflegt, und bei weitem die meisten schiefen Bergflächen noch viel weniger gegen den Horizont geneigt sind, so setzt die Lehmannsche Methode mit Recht die Beleuchtung für $45^0 = 0$, und drückt demnach solche Abdachungen durch vollen Schatten oder Schwarz aus, welches, streng genommen, nur dem Neigungswinkel $= 90^0$ zugehört. Dadurch gewinnt die Schattirung kleinerer Bergabdachungen von 0^0 — 15^0, wie solche häufig vorkommen, an Schwärze und stärkerm Contrast gegen die weiße Farbe des Papiers, welche allgemein horizontale oder doch sehr nahe horizontale Ebenen bezeichnet.

Ferner erlaubt sich die Lehmannsche Theorie ohne bedeutenden Fehler für den gewöhnlichen Zweck und Gebrauch der Bergzeichnungen die mittlern Grade der Beleuchtung durch eine Mischung aus Schwarz und Weiß in dem Verhältniß auszudrücken, in welchem der bekannte Neigungswinkel der schiefen Bergfläche zu dem Winkel steht, der jenen zu 45^0 ergänzt. Wäre z. B. der Neigungswinkel (Böschungswinkel) $= 15^0$, so wäre seine Ergänzung zu $45^0 = 30^0$, folglich das Verhältniß des Schwarzen zum Weißen, wie $15 : 30 = 1 : 2$.

Die verhältnißmäßige Mischung aus Schwarz und Weiß wird am leichtesten, zuverläßigsten und zugleich am leserlichsten durch gerade schwarze Striche und dazwischenliegende weiße Zwischenräume vorgestellt. Für den Böschungswinkel $= 15^0$ wird also die Dicke (Breite) der schwarzen Striche zur Dicke der weißen Zwischenräume sich verhalten, wie 1 : 2.

Es wird genügen, wenn ich hier diese Mischungsverhältnisse für verschiedene Böschungswinkel nur von 5 zu 5 Graden beifüge.]

schungs-winkel.	Verhältniß des Schwarzen zum Weißen.	Lehmann's abgekürztes Zahlenverhältniß.
0°	0 : 45	0 : 9 (eigentlich völlig weiß)
5°	5 : 40	1 : 8
10°	10 : 35	2 : 7
15°	15 : 30	3 : 6
20°	20 : 25	4 : 5
25°	25 : 20	5 : 4
30°	30 : 15	6 : 3
35°	35 : 10	7 : 2
40°	40 : 5	8 : 1
45°	40 : 0	9 : 0 (völliger Schatten, Schwarz)

ie Lehmannsche Scale ist wegen der auf- und ab-eigenden natürlichen Zahlenfolge von 0 bis 9 leicht zu halten und auch mit der Feder auszuführen. Das laß der Neigungswinkel wird selten genauer als bis uf 5° beim Aufnehmen und Bezeichnen der Berge er-rderlich. Bis zu dieser Genauigkeit kann man jene Winkel durch ganz einfache Höhenwinkelmesser, z. B. ne simple Bergwage in der Größe eines Transpor-urs, beim flüchtigen Aufnehmen sogar durch ein ge-btes Augenmaß allein finden.

Ist ein Berg nach jener Scale, in die man auch och mittlere Grade zwischen je 5 und 5° interpoliren ann, richtig bezeichnet, so kann man aus der Stärke er Schattirung, die sich nach dem Verhältniß des Schwarzen zum Weißen allerdings am sichersten beur-heilen läßt, die Hauptabdachungen des Berges ablei-en, gleichsam wie eine andere Schrift ablesen. Indes-en gehört sowohl zum Zeichnen als Ablesen ein geübtes Augenmaß.

Um nun in die durch den Meßtisch oder durch andere Mittel gefundene und auf dem Situationsplan construirte horizontale Basis eines Berges die verschiedenen Abdachungen desselben einzuzeichnen, denkt man sich auf verschiedenen Höhen jenen Berg in horizontale Schichten zerlegt, trägt die anderweitig bestimmten Perimeter von der Basis jeder einzelnen Schicht aufs Papier, und drückt die merkwürdigsten Abdachungen zwischen je zwei Schichten durch eine Strichschattirung aus, welche den gemessenen Böschungswinkeln zukommt. Die Absteckung der Horizontalen auf verschiedenen Höhen um den Berg herum läßt sich durch ein einfaches Niveau, Kanalwaage oder auch durch den Meßtisch und durch ein Diopterlineal, wodurch man eine horizontale Visirlinie — mittelst einer leicht gedenkbaren Vorrichtung — erhalten kann, hinlänglich genau bewirken. Die hauptsächlichsten Punkte jeder horizontalen Umgrenzung, wo nehmlich die Abdachungen sich merklich stark ändern, werden am bequemsten mit dem Meßtisch von einer oder mehreren Standlinien aus in Grund gelegt. Die hierdurch auf dem geometrischen Grund erhaltenen Punkte (je mehr, desto besser) werden durch gerade oder nach dem Augenmaß abgeschätzte krumme Linien verbunden. So erhält man innerhalb der Hauptbasis die Perimeter (Umgrenzlinien) verschiedener horizontalen Schichten; die Strichzeichnung giebt zugleich die vorzüglichsten Abdachungen zwischen je zwei solcher Schichten an. Daß eine auch nur annähernd genaue Bergaufnahme — nicht bloß einfache Höhenbestimmung — zum Behuf einer bildlichen horizontal projicirten Bezeichnung ein höchst mühsames, weitläufiges, vielen Irrungen ausgesetztes Geschäft seyn müsse, dies läßt sich aus dem Gesagten deutlich abnehmen. Aus diesem Grunde bin ich vollkommen überzeugt, daß auf den meisten Situationscharten die Berg- und Terrainerhö-

hungen nur unvollkommen dargestellt erscheinen, selbst in den vortrefflichen und schönen Bergzeichnungen von Lehmann mag noch manches stehen, was mit der wahren Beschaffenheit der damit bedeuteten Berge nicht ganz übereinstimmt. Allein so lange man diese nicht nachmißt und anders findet, muß man auch jene als richtig gelten lassen, und zwar darf man die Arbeiten von Lehmann, als erstem Meister in dieser Kunst, bis diese Stunde noch immer als die besten mit den wenigsten Fehlern behaftet, annehmen. Die Aufnahme und demgemäße Bezeichnung eines einzelnen Berges läßt sich stets genauer und zuverläßiger, als diejenige eines weit ausgedehnten Gebirges, erhalten, da es hierzu weit weniger directer Messungen und eines mäßigern Zeitaufwandes bedarf.

Wir wollen uns diesen einfachern Fall durch ein Exempel erläutern:

Es möge Fig. 115. einen Berg nach Profilansicht, Fig. 117. hingegen die horizontale Projection (Basis) desselben vorstellen. Er sey durch eine horizontale Ebene FD in zwei Schichten zerlegt, die Lage der Punkte F und D durch eine Aufnahme, so wie die Böschungswinkel, DAB, CDE, CFE, FaG durch eine directe Messung bestimmt. Dadurch erhält man auf dem Grundriß die horizontale Projection der Abdachungslinie AD nehmlich AH, eben so ED = HB für DC, FE = GB für FC, aG für aF und dergleichen mehr. Die Dicke der schwarzen Striche und der weißen Zwischenräume bei und um AH, aG bestimmt man nach den bei A und a gemessenen Böschungswinkeln in dem oben angezeigten Verhältniß. Eben so verhält es sich mit den Strichen bei BH, BG, so wie bei MN, SR u. s. w. Man begreift wohl, daß das geometrische Bild des Berges um so vollkommener werden müsse, je mehr Horizontalen abgesteckt, je mehr Punkte in den-

ſelben beſtimmt und je mehr Abdachungswinkel gemeſſen worden. In Fig. 117. habe ich verſucht, das bisher Geſagte anſchaulich zu machen. Indeſſen werden zur Bezeichnung ſehr irregulär geſtalteter Berge zwei horizontale Baſen AMaS und HNGR nicht ausreichen.

Eine weitere Ausführung dieſes Gegenſtandes würde die Grenzen dieſes Werkes überſteigen. Ich verweiſe in dieſer Hinſicht auf die Lehmannſche Schrift und die dazu gehörigen Kupfer, wo man für die Kunſt der Bergzeichnung vollſtändigere Belehrung findet.

Die Regeln für Bergaufnahmen und Bergzeichnungen gelten übrigens auch für die Darſtellung aller andern weniger beträchtlichen Terrainerhöhungen auf Situationscharten.

§. 157.

Von den kleinern topographiſchen Aufnahmen im Allgemeinen.

Darunter verſtehen wir hier ſolche, welche ſich nur auf eine ſehr kleine Landſtrecke, z. B. ein Stadt- oder Dorfgebiet, einen einzelnen Wald, einzelne Ackerſtücke ꝛc., beziehen. Dergleichen Aufnahmen geſchehen insgemein ganz unabhängig von einer größern trigonometriſchen oder geometriſchen Triangulirung (Dreiecknetz), und zwar nach einem viel größern Maßſtab, als welchen die Specialcharten von ausgedehntern Erdſtrecken erhalten. Darum laſſen ſich auch auf topographiſchen Grundriſſen (Plänen) viel mehr kleine Details einer Gegend, als: Häuſer, einzelne Bäume ꝛc. anbringen. Gute topographiſche Pläne benutzt man zuweilen, um Specialcharten, die durch eine Meßtiſchoperation erhalten worden, mit bemerkenswerthen klei-

rn Details auszufüllen und somit zu vervollstän=
zen.

Die Methoden, die zu topographischen kleinen
essungen gebraucht werden, sind ganz dieselben, welche
in der vierten und fünften Abtheilung dieses Wer=
vorgetragen habe. Die hier nöthigen Werkzeuge
d weniger vollkommene Winkelmesser, als: das ge=
ine Astrolabium, die Boussole, — vorzüglich brauch=
r der Meßtisch, zu Weitenmessungen eine Meßkette
r eine Meßschnur. Zu ungefähren Bestimmungen
ßt man auch wohl nach Schritten, bei militärischen
d ökonomischen flüchtigen Aufnahmen sogar oft nach
ßem Augenmaß. Ein gutes Augenmaß wird, nach
iner vollen Ueberzeugung, durch kein künstliches Sy=
m von Regeln, wie man solches in mehreren Schrif=
von Mayer, Meinert u. a. m. findet, sondern
zig und allein, am schnellsten und zuverläßigsten,
rch practische Uebung erhalten, nehmlich durch wirk=
he Messungen, welche das Urtheil der Augen und des
rstandes schärfen. Wie weit man es auf diesem
ege in ungefährer Abschätzung der Weiten und Sehe=
nkel bringen könne, habe ich nicht bloß an mir selbst
dern auch an sehr vielen meiner Zuhörer erfahren,
lchen ich Anleitung zu practischen Messungen gab.
er lange im Felde arbeitet, kann auch mit mittel=
ßiger Urtheilskraft eine Weite von 200 Schritte oder
ch mehr bis auf 10 — 20 Schritte und einen Sehe=
nkel bis auf 2 Grad annähernd schätzen. Auf Be=
mmungen nach bloßem Augenmaß gründen sich die
chtigen militärischen Aufnahmen (s. Meinert's mi=
är. Meßkunst p. 214 sqq.) und die darnach entwor=
ien Zeichnungen, welche in der Militärsprache gewöhn=
h Croquis heißen; daher der Ausdruck croqui=
n.

Alle regelmäßigen militärischen Detailaufnahmen

geschehen nach der einen oder andern der in der 4ten und 5ten Abth. behandelten Aufgaben.

Eben so läßt sich daraus das richtige Verhalten für alle ökonomischen, kameralistischen und Forstaufnahmen leicht ableiten. Bei ökonomischen und Forstmessungen werden außer Weiten, Grenzpunkten, Umgrenzungslinien (Perimetern) noch besonders Flächenräume nach irgend einem quadratischen Einheitsmaß, z. B. Quadratruthen, Quadratfußen ꝛc., verlangt. Die Flächenräume von Feldern, Wiesen, Wäldern u. s. w. berechnet man entweder direct aus gemessenen Längen, oder nach dem geometrischen Grundriß und nach dem dafür gebrauchten verjüngten Maßstab, indem man die Figuren auf dem Papier in Dreiecke, Rectangel, Trapezien mit 2 parallelen Seiten zerlegt; vergl. §. 155. Fig. 114. Die Feldertheilung beruht meistens auf Sätzen der Elementargeometrie, zugleich aber auch auf andere Nebenrücksichten, besonders physischen. Das vollständigste wissenschaftlich bearbeitete Werk über die Feldertheilung ist bis jetzt:

Geodäsie, oder Anleitung zur geometr. und ökonomischen Feldertheilung, von Grüson, Berlin 1811.

Nach meinem Ermessen findet aber kaum die Hälfte seines Inhalts in der wirklichen Praxis seine Anwendung. Doch ist das Buch den Feldmessern zum ernstlichern Studium zu empfehlen.

In der ökonomischen und militärischen Feldmeßkunst kommt bisweilen der Fall vor, daß verjüngte Figuren vom Papier auf das Feld überzutragen oder hier nach ihren wahren Längenmaßen abzustecken sind. Wie man hierzu die Boussole, noch sichrer einen Meßtisch ꝛc. gebrauchen kann, bedarf keiner besondern Anweisung. Häufiger kommt das Abstecken gegebener Winkel im

de vor, besonders zu militärischen Zwecken. Hier
in man ebenfalls den Meßtisch oder auch einen bes=
n Winkelmesser, als Astrolabium, Sextant ꝛc., an=
nden; siehe §§. 94. 95.

Die ökonomische Meßkunst findet man sehr aus=
rlich und mit vielen Zahlenbeispielen, Vermeßregi=
n erläutert in Hogrewe's Schrift: Pract. Anw.
m Vermessen der Feldmarken ꝛc., Hannover
97. Diese und ähnliche Schriften enthalten aber
Wesentlichen, nehmlich in Hinsicht der Messungs=
thoden, nichts anders, als was ich, nur viel kürzer,
der 4ten und 5ten Abth. dieses Werkes vorgetragen.
sonders fleißig übt man bei kleinen ökonomischen
fnahmen die Parallel= und Perpendikularmethode
, vergl. §§. 93. 155. Zur leichten Bestimmung
Flächenräume nach den auf dem Papier construirten
metrischen Grundrissen sind Quadratgitter von Glas
r von feinen (seidenen, metallenen) Fäden über einen
hmen ausgespannt, in Vorschlag gebracht worden.
n solches Rechennetz von kleinen Quadraten, deren
iten und Flächen nach irgend einem verjüngten Maß=
e Weiten und Flächenräume der großen Figuren im
de anzeigen, giebt auch Hogrewe in der citirten
rift an. Man kann sich die Einrichtung und den
ctischen Gebrauch eines solchen Rechennetzes — es
d über die kleine Figur auf dem Papier gelegt ꝛc. —
ht gedenken. Hogrewe's Construction finde ich
eckmäßig und brauchbar.

Wälder, Gehölze, Teiche, kleine Inseln ꝛc. nimmt
n gewöhnlich nach ihrem Perimeter auf, wodurch zu=
ich ihre Flächenräume auf dem Grundriß bestimmbar
den; vergl. §§. 152 — 154. Eben so geschehen die
fnahmen von Städten, Dörfern ꝛc. Bei letztern
ssen jedoch auch Seitenmessungen durch ihr Inneres,
mlich der Wege und Straßen, vorgenommen wer=

den. Wie solches am besten mit dem Meßtisch geschehe, lehrt §. 153.

Flüsse, Bäche und gebrochene oder krummlinigte Straßen, werden entweder mit Abscissen und Ordinaten (s. §. 93.) oder, im Fall sie unzugängig sind, durch Bestimmung mehrerer Punkte derselben aus einer entfernten Standlinie mittelst des Meßtisches (s. §. 150. Fig. 111.), oder aber durch Messung kleiner, längs dem Ufer hin genommenen, Distanzen und der von je zwei derselben eingeschlossenen Winkel in Grund gelegt; hierzu bedient man sich der Boussole, mit größerer Zuverläßigkeit des Meßtisches; vergl. §§. 93. 152. 153. Eben so können die Begrenzungslinien der Meeresküsten bestimmt werden.

In allen Elementarbüchern der Feldmeßkunst, deren es mehr als genug giebt, und von welchen eines oder das andre gewiß jeder meiner Leser hat, wird von den beschränktern ökonomischen, militärischen und Forstaufnahmen sehr umständlich gehandelt. Theils aus diesem Grunde, theils auch, um unnütze Wiederholungen der in diesem Werke früher vorgetragenen Sätze und Aufgaben zu vermeiden, schließe ich diesen Paragraph, mit der Bemerkung, daß wirkliche Uebungen und Meßunternehmungen im Felde der Theorie zu Hülfe kommen, und die zweckmäßige Anwendung ihrer Regeln lehren müssen.

§. 158.

Vom einfachen und zusammengesetzten Nivelliren (Wasserwägen). (Fig. 118.)

Nivelliren ist nichts anders als ein Höhenmessen, jedoch auf directerm Wege, als solches durch eine trigonometrische Operation geschieht, mit ganz leichter

Rechnung und nach einer, theoretisch betrachtet, höchst einfachen Methode.

Man gebraucht hier horizontale Visirlinien und senkrecht aufgestellte, in Fuße, Zolle ꝛc. eingetheilte Maßstäbe, um den Höhenunterschied zweier oder mehrerer Punkte auf der Erde, z. B. der Oerter A, B, nehmlich BF, welche Größe auch das Gefälle von einem Ort zum andern heißt, zu bestimmen. In so fern hat das Nivelliren große Aehnlichkeit mit dem Cultelliren der Berge (s. §. 91.), wobei man das allmählige Steigen und Fallen des Terrains gleicherweise durch Vertikalen und Horizontalen erhält, jedoch nicht durch horizontale Visirlinien, sondern durch horizontalgestellte Maßstäbe. Das Cultelliren ist indessen mühsamer, nur auf kleinere Weiten in kleinern zusammenhängenden Stationen ausführbar, und gewährt seiner Natur nach weniger Zuverläßigkeit als ein wohlgeordnetes Nivelliren mit guten Instrumenten.

Sind zwei Punkte A, B auf der Erde beträchtlich weit von einander entfernt, der Höhenunterschied BF gering, oder doch der Elevationswinkel BAF sehr klein wegen der großen Entfernung AB oder AF, so wird durch eine trigonometrische Operation die Höhe oder das Gefälle BF zu wenig genau gefunden, wenn man auch die Weiten AB oder AF durch eine anderweitige Messung bestimmt, und den Winkel BAF bis auf 5 Sek. annähernd observirt hätte. In solchen Fällen, wo man BF durch ein Nivellement sucht, kann man übrigens jene data des trigonometrischen Kalkuls entweder gar nicht oder nur äußerst mühsam oder doch bei weitem nicht zuverläßig genug, erhalten. Zwischen A und B liegen oft Hindernisse des Visirens und einer directen Distanzenmessung u. s. w. Es bleibt dem denkenden Leser die weitere Betrachtung dessen und der Fehler überlassen, welche für gewisse Distanzen aus etwas falsch

bestimmten datis der trigonometrischen Rechnung in den gesuchten Höhenunterschied BF übergehen würden.

Das Nivelliren dient hauptsächlich dazu, das Gefälle der auf einer schiefgeneigten Fläche abwärtslaufenden Gewässer, Flüsse, Bäche, künstlicher Wasserleitungen, Kanäle ꝛc. zu finden; daher der sonderbare Ausdruck Wasserwägen oder Nivelliren. Gewöhnlich sucht man bloß das partielle Gefälle eines fortfließenden Wassers, nehmlich auf eine gewisse Strecke hin. Das Totalgefälle eines langen Flusses, von seinem Ursprung bis zu seinem Uebergang ins Meer, läßt sich durch ein eigentlich sogenanntes Nivellement, auch mit den besten Werkzeugen, nicht zuverläßig bestimmen. Dazu dienen besser Barometerbeobachtungen.

Außerdem kann man auch durch ein Nivellement das Steigen und Fallen eines unebenen Terrains, nehmlich die Höhenunterschiede zweier oder mehrerer Punkte auf demselben, wo solche nicht allzu beträchtlich sind, bequemer und genauer ausmitteln, als durch irgend eine andere geometrische oder trigonometrische Verfahrungsweise.

In Hinsicht der zum Nivelliren erforderlichen Werkzeuge und der dabei vorkommenden Berichtigungen (Verificationen), verweise ich auf die §§. 80—83. in der ersten Abth. dieses Werkes. Für kleine Nivellirweiten kann man, wenn hier nicht die höchste Genauigkeit bis auf Theile eines Zolles verlangt wird, die Kanalwaage, statt deren auch wohl ein eigens dazu eingerichtetes Diopterlineal oder ein Astrolabium mit Dioptern u. dergl. gebrauchen. Die Genauigkeit in Visiren nach einer Horizontale geht hier nur auf einige Minuten, woraus sich die leicht möglichen Fehler in den gesuchten Gefällen beurtheilen lassen. Diese Fehler wachsen mit den Nivellirweiten an sich und auch wegen Undeutlichkeit des Visirens durch gemeine Dioptern.

Bei beträchtlichern Nivellirweiten von etwa 1000 bis 3000 Fuß muß man sich daher überall nur eines vollkommenern Instruments mit achromatischem Fernrohr und Libelle bedienen. Das beste Niveau ist, nach meinem Ermessen, das von mir früher (§. 81. 1ste Abth.) angezeigte; indessen können auch ältere, sonst gut gearbeitete, Niveau's mit gewöhnlichem Stativ und mit einfachem oder mit zwei Fernröhren hinlänglich sichre Resultate gewähren, so wie sich selbst ein Bordascher Kreis oder ein andrer guter Kreis, an welchem man die Seheachse des Fernrohrs horizontal zu stellen im Stande ist, zu gleichem Zweck benutzen läßt.

Man hat zweierlei Methoden des Nivellirens.

1) ein Nivelliren aus den Endpunkten,

2) ein Nivelliren aus der Mitte.

Nach der erstern Art zu nivelliren stellt man das Instrument — Kanalwaage, Niveau ꝛc. — über dem einen höhern Endpunkt B der zu nivellirenden Weite auf, und richtet dasselbe hier so ein, daß man dadurch eine horizontale Visirlinie erhält, welche in die durch A und B gelegte Vertikalebene fällt. Im andern Endpunkt A läßt man durch einen unterrichteten Gehülfen einen Nivellirstab senkrecht aufstellen, und die Zielscheibe daran so weit erhöhen (vergl. §. 83.), bis der Beobachter bei B den Mittelpunkt der Zielscheibe in der horizontalen Visirlinie DC scharf abgegrenzt erblickt. Dann giebt die am Nivellirstab bis auf Zolle und Linien sorgfältig beobachtete Höhe, weniger der Höhe des Niveau's bei B, nehmlich AC — BD = AE = BF den Höhenunterschied oder das Gefälle der beiden Punkte A, B auf dem Boden. Wäre z. B. AC = 7,43′ oder 7 Fuß 4 Zoll 3 Lin., BD = 4, 5′, so müßte das Gefälle BF = 2 F. 9 Z. 3 L. seyn. Hierbei wird aber

vorausgesetzt, daß die Erhöhung des Nivellirinstruments über den Boden, nehmlich BD genau bestimmt, der Nivellirstab über A senkrecht aufgestellt, die Höhenzahl AC an demselben bis auf Linien richtig abgelesen worden, und die Visirlinie DC eine wahre horizontale sey. Wir wollen hier nur den Fehler in Betrachtung ziehen, welcher aus einer geringen Neigung der Visirlinie gegen den Horizont erwachsen kann. Wiche DM von der wahren DC um den Neigungswinkel $MDC = \alpha$ ab, so würde $CM = CD \cdot \text{tang. } \alpha$. Um diese Größe CM fände man das Gefälle BF zu groß. Wie man sieht, muß dieser Fehler (positiv oder negativ) mit dem Neigungswinkel α und der Nivellirweite DC, die man hier ohne merklichen Irrthum $=$ BA setzen darf, zunehmen. Wäre z. B. $DC = 300$ F., $\angle\alpha = 2$ Min., so würde $\log. CM = 0{,}2418775 - 1$, also $CM = 0{,}17'$ beinahe 2 Dec.Zoll. Um so viel würde man das Gefälle der Punkte A, B zu groß finden. Daraus begreift man, warum unvollkommenere Nivellirinstrumente, z. B. die Kanalwaage oder ein Nivellirlineal nur auf kleine Weiten und für beschränkte Zwecke zu gebrauchen sind. Ungleich größere Gewißheit verschafft ein Niveau mit Fernrohr, besonders nach der in §. 81. beschriebenen Construction, sogar auf viel längere Nivellirweiten. Wir wollen absichtlich die Nivellirweite DC beträchtlich groß etwa 3000 F. — größer wird solche wohl nur äußerst selten genommen — und den auch mit einem guten Niveau etwa noch möglichen Fehler der Neigung, nehmlich $\angle\alpha = 5''$ setzen, so wird:

$$CM = \frac{3000 \cdot \text{tang. } 5''}{\text{sin. tot.}} = 0{,}072 \text{ beinahe } 7 \text{ Lin.}$$

Ein so großer Fehler kommt aber bei einem sorgfältigen Nivellement, in kleinern Abständen oder Stationen fortgesetzt, nicht vor, besonders wenn man nicht aus den

Endpunkten A, B sondern aus der Mitte zwischen beiden nivellirt.

Nach dieser zweiten Nivellirmethode, nehmlich aus der Mitte, stellt man das Niveau so nahe wie möglich in der Mitte zwischen den beiden Punkten A, H (Fig. 118.), deren Gefälle man sucht, am besten in der durch A, H gelegten Vertikalebene auf, so daß man in einer und derselben Horizontalebene gegen A und H hin visiren kann. Durch zwei Gehülfen läßt man über A und H Nivellirstangen senkrecht einsetzen, und die Zielbreter an denselben so weit erhöhen, daß die horizontale Visirlinie DC auf den Mittelpunkt des einen und beim Rückwärtsbeobachten gegen H hin die Visirlinie in demselben Horizont von D nehmlich DG auf den Mittelpunkt des zweiten Zielbretes trifft. In jedem Fall giebt die größere sorgfältig beobachtete Höhe an dem einen Nivellirstab, weniger der kleinern am zweiten, nehmlich AC — HG = LH den Höhenunterschied der Oerter A, H in Fußen, Zollen und Linien. Wovon die Genauigkeit dieser Bestimmung abhänge, erhellt aus dem Vorhergesagten. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Visirlinien DC und DG beim Umwenden des Fernrohrs an den bessern Niveau's — bei Kanalwaagen u. dergl. findet diese Umkehrung nicht Statt — in einer und derselben durch D gelegten Ebene bleiben. Steht das Niveau in gleichen Distanzen von A und H, so hat eine geringe Neigung der Seheachse (Visirlinie) an sich keinen nachtheiligen Einfluß auf das gesuchte Resultat. Denn in diesem Falle werden bei Umkehrung des Fernrohrs die Visirlinien gegen A und H hin um gleiche Winkel gegen den Horizont von D geneigt, folglich die wahren Höhen an den Nivellirstäben um gleiche Stücken CM = GN vermehrt oder vermindert u. s. w.

Da es sich indessen nur selten möglich machen

läßt, den Standort B des Nivellirinstruments genau in der Mitte zwischen A und H zu nehmen, — hierzu bedarf es einer oftmahls nicht ausführbaren Messung der Weite A H — so ist die Verification des Niveau's (nach §. 82.) die wichtigste Sache bei Arbeiten der Art. Um indessen den Fehler zu verhüten, welcher aus einer geringen Neigung der Visirlinien bei ungleichen Abständen des Niveau's von A und H entstehen könnte, ist es jedoch immer rathsam, den Standort des Instruments so nahe als möglich in gleichen Entfernungen von A und H zu nehmen. Damit heben sich zugleich gegenseitig die Abweichungen auf, welche die Kugelgestalt der Erde und die terrestrische Strahlenbrechung in die Bestimmung des Gefälles H L bringen können; vergl. §§. 139 — 143. Die Fehler wegen der Erdkrümmung und wegen der Refraction sind übrigens so geringfügig, daß solche gegen andere beim Nivelliren mögliche Irrungen nur selten in Betrachtung kommen.

Beim Nivelliren aus der Mitte muß der Standort des Instruments nicht nothwendig in der durch A, H gelegten Vertikalebene liegen, sondern man darf ihn erforderlichen Falls auch etwas seitwärts wählen, ohne ein andres Resultat für die gesuchte Größe L H zu erhalten, wenn man nur sonst genau verfährt.

Die zweite Methode, nehmlich aus der Mitte zu nivelliren, verdient überall den Vorzug vor der ersten, und wird daher bei allen größern und wichtigern Arbeiten der Art fast ausschließlich angewendet. Zur Controle und Berichtigung der gesuchten Höhe L H kann man beiderlei Methoden in Verbindung setzen, wo es Zeit und Umstände erlauben. Zu demselben Zweck kann man auch aus mehr als einer Mittelstation zwischen A und H nivelliren, und die so erhaltenen Resultate gegen einander vergleichen u. s. w.

Wir haben bis jetzt bloß das einfache Nivel-

ment betrachtet, wobei man den Höhenunterschied
eier Oerter bloß durch eine einzige Aufstellung des
iveau's, in einem Endpunkt oder in der Mitte, er-
lt.

Der Begriff eines zusammengesetzten Ni-
llements ergiebt sich hieraus von selbst. Ein sol-
s besteht nehmlich aus einer zusammenhängenden
ihe einfacher Nivellements nach der einen oder andern
ethode, in mehreren größern oder kleinern Stationen
livellirweiten) von einem Ort A bis zu einem zweiten
fortgesetzt. Hierdurch erlangt man den Höhenunter-
ied oder das Gefälle der beiden Oerter A und B
ig. 119.).

Die Nothwendigkeit eines zusammengesetzten Ni-
llements tritt immer ein, wenn die zu nivellirenden
unkte entweder sehr weit von einander entfernt sind,
er wenn ein Hinderniß des Visirens zwischen beiden
gt, z. B. eine Terrainerhöhung, oder auch wenn der
öhenunterschied zweier Punkte A, C so beträchtlich
, daß die horizontale Visirlinie des Niveau's die
öhe eines Punktes C nicht erreicht ꝛc.

Man muß hier die ganze Nivellirweite AC oder
B in mehrere, nach Beschaffenheit des Terrains grö-
re oder kleinere, Stationen abtheilen, und nach und
ch die partiellen Gefälle von je zwei Zwischenpunkten
rch einfache Nivellements finden, z. B. das Gefälle
r Punkte A und E = EF, dasjenige der Punkte E
d H = HK u. s. w.

Nennt man die Erhöhung EF eines Ortes E über
en andern A positiv, so muß dagegen die senk-
hte Erniedrigung eines Ortes G unter den Horizont
es zweiten Ortes C, nehmlich CL negativ heißen.

Bei einem zusammengesetzten sehr ausgedehnten
ivellement können die Gefälle nach einander folgender
tationspunkte, z. B. H, C, G, wegen Ungleichheit

des Terrains, bald positiv, bald negativ werden. Begreiflich muß man sowohl die positiven als auch die negativen Gefälle einzeln sehr sorgfältig beobachten, in ein Manual mit zwei Columnen und besondern Zeichen (+ und —) notiren, und am Ende die Summe der negativen Gefälle von der Summe der positiven subtrahiren, um das gesuchte Totalgefälle zweier Punkte zu erhalten. So würde man, z. B. bei einem aufwärts und abwärts von A bis B fortgehenden Nivellement, den Höhenunterschied beider Oerter = CD — CL = LD finden.

Zu einer solchen Bestimmung ist es nicht durchaus nothwendig, daß die einzelnen Stationen überall in einer geraden Linie oder Vertikalebene zwischen den Grenzpunkten A und C oder A und B genommen werden. Beim Nivelliren an Flüssen hin oder über Anhöhen hinweg, sieht man sich oft gezwungen, in mannigfaltig abweichenden (gebrochenen) Richtungen fort zu arbeiten. Wo es sich aber thun läßt, und die Zahl und Ausdehnung der einzelnen Stationen dadurch abgekürzt werden, sucht man gern in der durch die Grenzpunkte A, C oder A, B gelegten Vertikalebene zu bleiben. Dazu gehört Kenntniß des Terrains vermittelst einer Situationscharte oder einer in manchen Fällen vorausgegangenen förmlichen Aufnahme.

Daß sich durch ein zusammengesetztes Nivellement, welches aber immer viele Mühe und vielen Zeitaufwand erfordert, nicht allein das Gefälle zweier, sondern auch die Höhenunterschiede mehrerer Oerter auf einem unebenen Terrain bestimmen lassen, folgt aus dem Gesagten ohne weitere Erklärung. So begreift man auch die Möglichkeit der Erdprofile und Stromprofile, welche in einem verjüngten geometrischen Grundriß das allmählige Steigen und Fallen des festen Bodens oder des Wasserspiegels von Flüssen annähernd zeigen

ſollen; denn absolute mit der Natur überall zuſammenſtimmende Genauigkeit iſt bei der Unvollkommenheit auch der beſten Hülfsmittel nicht erreichbar.

Ein einfaches oder zuſammengeſetztes Nivellement dient hauptſächlich dazu, das Gefälle der Flüſſe auf beſtimmte Weiten zu finden, ingleichen das Steigen und Fallen des Terrains da, wo Kanäle, Waſſerleitungen von einem Ort zum andern angelegt werden ſollen.

Das Gefälle eines Fluſſes von einem Punkte C ſeines Waſſerſpiegels bis zu einem zweiten niedriger liegenden Punkt A (Fig. 119.) wird alſo gefunden. Man ſucht nahe bei A und C am Ufer (Rand) des Fluſſes zwei Standpunkte aus, die wir A′ und C′ heißen wollen. Je näher die Horizontalen durch A′ und C′ der Ebene des Waſſerſpiegels liegen, deſto beſſer; indeſſen muß man wegen der Uferhöhe oftmahls A′ und C′ mehrere Fuß hoch über dem Waſſerſpiegel annehmen. Dann findet man zuerſt durch ein einfaches Nivellement auf kleine Weiten oder durch ein zuſammengeſetztes auf weitere, oft meilenlange, Strecken hin das Gefälle der Punkte C′ und A′ auf dem feſten Boden am Ufer. Dies Gefälle auf Fuße, Zolle und Linien beſtimmt, heiße S. Sodann ſucht man durch ein kleines einfaches Seitennivellement das Gefälle von C′ auf dem Boden bis zum gleichnamigen Punkt C auf dem Waſſerſpiegel, ingleichen das Gefälle von A′ bis zu A. Findet man dieſe beiden Gefälle (Uferhöhen) bei C′ und A′ gleich groß, ſo iſt das Gefälle des Waſſerſpiegels von C bis A ſo groß als das der Punkte C′ und A′, nehmlich = S. Beträgt aber die Erhöhung des Punktes A′ über A mehr als die bei C, ſo muß man die Differenz beider zu S addiren u. ſ. w. Man kann ſich dies durch eine einfache Zeichnung deutlich machen. Die Erniedrigung (Tiefe) des Waſſerſpiegels unter C′ und A′ läßt ſich durch ein einfaches Nivellement finden, indem man in

das Flußbette nahe bei C′ und A′ abgetheilte Nivellirstäbe senkrecht einsetzt, nach diesen hin von C′ und A′ aus visirt, und so weiter die Uferhöhen bestimmt, wie beim einfachen Nivelliren aus den Endpunkten.

Einige Nebenbemerkungen über die wirkliche Praxis des Nivellirens, kann ich bei der Beschränktheit des Raums hier um so eher übergehen, da sich solche einem jeden, der ein solches Geschäft nur einmahl wirklich auszuführen Gelegenheit hat, sogleich von selbst darbieten.

Manche Schriftsteller haben viel weitläufiger, als es hier geschehen, über die Kunst des Nivellirens geschrieben; selbst ganze Bücher haben diesem theoretisch ungemein leichten Gegenstand ihre Entstehung zu verdanken. Darunter zeichnen sich folgende aus: Picard's Abh. vom Wasserwägen, mit Zusätzen von Lambert, ferner Hogreve's prakt. Anweis. zum Nivelliren — eine ähnliche Abhandl. über das Nivelliren von Müller, Göttingen 1799 — ingleichen Anweisung zum Nivelliren und Profiliren von Meinert, Halle 1801. In der Hauptsache enthalten alle diese Schriften ein und dasselbe; wenn man daher eine, am besten die neueste derselben, besitzt, so kann man die übrigen füglich entbehren.

§. 159.

Höhenmessung und Nivelliren durch Barometerbeobachtungen.

Allgemeine Betrachtung.

Von der trigonometrischen Messung der Berghöhen, ingleichen von den rein-geometrischen Mit-

teln zu demselben Zweck, namentlich vom Cultelliren (§. 91.) und dem Nivelliren (§. 158.) haben wir das Wichtigste und Brauchbarste bereits kennen gelernt. Es bleibt uns daher nur noch übrig, die Betrachtung eines physikalischen Mittels, Berghöhen und Terrainerhöhungen überhaupt zu finden und gegen einander zu vergleichen, nehmlich durch Barometerbeobachtungen.

Höhenmessungen durch Barometer sind in allen Fällen leichter und bequemer auszuführen, als die trigonometrischen und geometrischen. Selbst da, wo sich der Ausübung der letztern unüberwindliche Hindernisse entgegenstellen, kann man mit dem Barometer und einer Logarithmentafel (oder einer besonders berechneten Barometertafel) in der Hand, noch immer Berghöhen messen und gegen einander vergleichen. Da sich Beobachtungen der Art schnell und leicht vervielfältigen lassen, welches bei andern Methoden nicht der Fall ist, so begreift man den unschätzbaren Werth derselben und ihren Einfluß auf die Erweiterung der allgemeinen Physik unsers Erdkörpers.

Erst in den neuern Zeiten, seitdem die Barometermessungen durch den Fleiß ausgezeichneter Physiker und Mathematiker zu einem so hohen Grad von Vollkommenheit erhoben worden, ist etwas Bedeutendes für die Drographie (Bergkenntniß) und damit zugleich für die Geologie, Naturgeschichte und allgemeine Naturlehre, der Erde geschehen. Die Drographie bestand in frühern Zeiten fast nur aus Namen; an genauern Bestimmungen der Bergsituationen, besonders ihrer relativen Höhen, fehlte es beinahe gänzlich. Selbst jetzt beträgt das, was für diesen äußerst wichtigen Zweig der physikalischen Geographie geleistet worden, nur sehr wenig gegen das, was noch zu thun übrig bleibt.

Ich brauche meine Leser kaum daran zu erinnern,

wie wichtig, ja beinahe unentbehrlich die Kenntniß der absoluten und relativen Höhen eines Landes für den Physiker, Geographen, Militär ꝛc. sey, und wie anziehend überhaupt für jeden gebildeten Menschen. Die Kenntniß der Berg- und Terrainerhöhungen wird für die physische Geographie unsrer Erde eben so nothwendig, als die Bestimmung der Längen und Breiten für die mathematische Geographie. Das Clima, die physische Beschaffenheit, das vegetabilische und animalische Leben eines Landes hängen nur zum Theil von seiner Lage auf der Erdkugel (Breite) ab, großentheils aber auch zugleich von der größern oder mindern Erhöhung des festen Bodens über der Meeresfläche.

In dem Maße also, in welchem nach und nach die Drographie fortschreitet, gewinnt zugleich die Geographie, die Naturgeschichte und die allgemeine Naturlehre unsrer Erde.

Bis jetzt ist für die Drographie der Erde im Ganzen nur noch Wenig geleistet worden, und auch dies Wenige nur durch die in neuern Zeiten ausgeführten Barometermessungen. Von den meisten großen Bergketten (Gebirgen) haben wir mehr Namen als Sachkenntniß, und selbst in den cultivirtesten Ländern Europa's fehlt es zur Zeit noch an richtigen Höhenbestimmungen selbst solcher Berge, die dem Namen nach allgemein bekannt und berühmt sind. So liegt z. B. die Drographie des Schwarzwaldes fast noch ganz im Dunkeln.

Nur von einigen Gebirgen Europa's haben wir barometrische und trigonometrische Höhenbestimmungen, doch erstrecken sich selbst diese insgemein nur auf einzelne ausgezeichnete Berge. In der Schweiz haben besonders Saussure, De Luc, Pictet, Schuckburgh, Tralles ꝛc. viele schätzbare trigonometrische und barometrische Messungen ausgeführt.

Vom Harzgebirge hat während der französischen Usurpation Deutschlands in den Jahren 1804 — 1805 der Mineninspektor Héron de Villefosse ein großes ziemlich vollständiges Höhennivellement mit Hülfe des Barometers bewirkt. Seine Beobachtungen, seine eigenthümliche Modifikation der De Luc'schen Berechnungsformel, nebst einer Profilzeichnung des Harzes, findet man zusammengestellt in einer kleinen brauchbaren Schrift unter dem Titel:

Nivellement des Harzgebirges mit dem Barometer, von Villefosse, aus den Papieren des Verfassers gezogen vom Prof. Gilbert, Halle 1808.

Ein sorgfältiges Höhennivellement des Brenner, von München bis Trient, hat uns v. Buch geliefert. Viele ähnliche barometrisch-trigonometrische Bestimmungen sind in Frankreich geschehen, worunter besonders die von Vidal, Méchain, Reboul und Ramond sich auszeichnen. Desto weniger ist in den benachbarten Königreichen Spanien und Portugal für die Höhenbestimmung der zahlreichen Bergketten geleistet worden. In den meisten andern Ländern Europa's, in Griechenland, Rußland, Schweden, Norwegen ꝛc. weiß man selbst von den Höhen berühmter Gebirge noch jetzt wenig oder gar nichts. Man sieht also, wie viel es auch in dem cultivirtesten Erdtheil noch für die Orographie zu thun giebt.

Noch weniger ist von den Berghöhen anderer Erdtheile bekannt. Von den Gebirgen in Asien und Afrika fehlt es durchaus an einer Kenntniß der Art, einige trigonometrische Messungen ausgenommen, welche la Caille am Vorgebirge der guten Hoffnung machte. Gute Ausbeute für Asiens große weitausgedehnte Bergreihen haben wir von den gelehrten Bemühungen un-

fers genialen Landsmanns Alexander v. Humboldt, welcher eine Reise nach jenem merkwürdigen Erdtheil beabsichtigt, zu gewärtigen.

Eben diesem unermüdlichen und geistreichen Naturforscher verdanken wir die Drographie eines Theiles von Amerika, nehmlich der Cordilleren in Mexiko. Sein vorzüglich genau ausgeführtes Bergnivellement durch Barometer findet man auf seiner Charte von Merika. Der bei weitem größte Theil der Amerikanischen Gebirge, der südliche Strich der Cordilleren, die großen Bergketten im nördlichen Amerika sind jedoch bis jetzt noch nicht untersucht worden, wenige einzelne Berge ausgenommen.

Aus dem Gesagten, womit es seine völlige Richtigkeit hat, ersieht man, wie sehr mangelhaft es noch jetzt mit der Drographie und den Bergcharten von unserer Erde bestellt seyn müsse, und wie viel es in dieser Hinsicht noch zu thun gebe. Die Arbeit ist allerdings sehr groß; allein, was die sehr weitläufigen und kostspieligen trigonometrischen Operationen nicht zu leisten vermögen, wird das viel weniger kostbare, leicht transportable, Barometer — man kann es in Form eines Wanderstabes bei sich führen — ungleich bequemer und schneller möglich machen. So würde jedes Land, welches beträchtliche Berge hat, nach und nach seine eigne Drographie erhalten, wenn in jedem auch nur zwei tüchtige Geometer, mit guten Barometern ausgerüstet, zur Bereisung und Untersuchnng der Berge von der Landesregierung ausgeschickt würden. Auf andre Art ist nichts zu hoffen; denn auch hier heißt es: der Geist ist willig, aber das Fleisch ist schwach! Der unbemittelte Gelehrte bedarf eines Impulses von Außen, um seine Kräfte zu regen und für das allgemeine Beste werkthätig zu zeigen.

§. 160.

Theorie und Formeln der Höhenmessung durch Barometer.

Die Einrichtung und den Gebrauch des Barometers, so wie die Geschichte seiner Erfindung, wird in allen guten Lehrbüchern der Physik, z. B. in Gren's Naturlehre, neu herausg. von Fischer, in Hube's Naturlehre, in Fischers Naturlehre, in den physikalischen Wörterbüchern von Gehler und Fischer u. a. m., ausführlich angezeigt. Indem ich also bei meinen Lesern die physikalische Kenntniß des Barometers als bekannt voraussetze oder in Ermangelung derselben auf jene Lehrbücher verweise, weil dies der Zweck und der beschränkte Raum dieses Werkes vorschreibt, kann ich die Theorie der barometrischen Höhenmessung ins Kurze zusammenziehen.

Den ersten Gedanken zu dieser Messungsart faßte Pasal in Frankreich im J. 1648. Um sich von der wirklichen Schwere der Luft auf directem Wege zu versichern, und zu erfahren, ob das Queckſilber im Barometer auf einer Berghöhe niedriger stehen müsse, als tiefer in einem Thal, wie er vor dem Versuch a priori schloß, ließ er seinen Schwiegersohn Perrier zu Clermont, im Jahr 1648. den 19. Sept. den Barometerstand auf einem nahegelegenen Berge Puy-de-Dome beobachten. Perrier fand die Höhe der Queckſilbersäule auf dem Berge um 3 Zoll 1 Lin. Par. niedriger, als solche unten in Clermont beobachtet wurde. Dieser Versuch wurde auf andern Höhen mehrere Mahle wiederholt, und hieraus der Schluß gezogen, daß das Barometer ein bequemes und hinlänglich genaues Mittel zum Nivelliren selbst weit entfernter Oerter seyn müsse.

Weiterhin fand Boyle in England oder viel-

mehr einer seiner Zuhörer Townley, der seinen Versuchen beiwohnte, das merkwürdige aerostatische Gesetz, daß die Dichtigkeit und Druckkraft (Expansivkraft) einer Luftmasse zu- oder abnimmt in demselben Verhältniß, wie ein darauf wirkender Druck (Gewicht) zu- oder abnimmt, und daß folglich auch die Druckkraft der Luftmasse im umgekehrten Verhältniß des Raumes, den sie einnimmt, wächst und umgekehrt. — Gleichzeitig kam Mariotte in Frankreich durch ganz verschiedene Versuche auf dasselbe Gesetz. Von letzterem hat es den allgemein bekannten, in allen unsern Lehrbüchern angenommenen, Namen des Mariottischen Gesetzes erhalten. Der Streit, ob Boyle oder Mariotte die Ehre der Entdeckung gebühre, ist eitel, und kann wenigstens jetzt zu gar nichts nützen.

Die von Mariotte gegebene Formel zur Berechnung der Höhen aus beobachteten Barometerständen wich beträchtlich von der Wahrheit ab.

Eine wichtigere Formel für die Barometermessungen, welche sich auf richtigere Voraussetzungen gründet, die gesuchten Höhen ungemein nahe giebt, und welche daher bis auf diesen Tag allen andern Barometerformeln zu Grunde gelegt worden, schreibt sich von dem scharfsinnigen Halley in England, um das Jahr 1685, her. Diese auf französisches Maß, nehmlich Toisen, reducirte Formel, nehmlich:

$$\text{die Höhendifferenz zweier Oerter} = 9719 \cdot \log. \frac{h}{H} \text{ Toiſ.}$$

$$= 9719 \cdot (\log. h - H),$$

wobei h die Barometerhöhe am untern, H diejenige am obern Beobachtungsort in Pariser Zollen und Linien anzeigt, leitete Halley von den genau untersuchten spezifischen Gewichten des Queckſilbers und der

ft *) her und zugleich von dem theoretisch wahren
ß, daß sich die Luft im umgekehrten Verhältniß der
rauf drückenden Gewichte ausdehnt und daß dem zu-
ge die Ausdehnung (Dichtigkeit) der Luft auf ver-
iedenen Höhen den Logarithmen der Barometerhöhen
portionirt ist.

Die Berechnung durch Logarithmen ist seit Hal-
y's verbesserter Formel allgemein gebraucht worden.
alley nahm aber auf die kleinere Correction wegen
Wärme noch keine Rücksicht. Dies geschah zuerst
n De Luc.

Es würde zu weit führen, wenn ich alle Modifi-
ionen, welche späterhin die Halleysche Grundfor-
l von andern Physikern und Mathematikern erhalten,
r ausführlich erörtern wollte. Wir müssen uns da-
bloß auf kurze Notizen beschränken.

Lambert, der sich ebenfalls mit diesem Gegen-
nd beschäftigte, fand folgende Formel:

Die gesuchte Höhe in Toisen

$$= 1000 \cdot \log. \frac{h}{H} - \frac{43 \cdot (336 - h)}{43 + (336 - H)}$$

Ausdruck, welcher die Höhen für Wärmegrade von
bis 10° Reaum. genau genug giebt, für höhere Wär-
grade aber etwas zu klein.

Tobias Mayer stellte nach seinen Untersuchun-
n diese Formel auf:

die Höhe in Tois. $= 10000 \cdot (\log. h - \log. H)$.

wird den mit diesem Gegenstand noch nicht vertrauten

*) Halley setzt das Gewicht der Luft bei mittlerer Tempera-
tur, etwa 6° Reaum., $= 1/10890$ vom Gewicht des Queck-
silbers, auf 0° Reaum. reducirt $= 1/10370$ nahe. Neuere
Versuche haben es $= 1/10495$ gegeben, bei 0° Reaum. und
28° Zoll Barom. St.

Leser interessiren, zu erfahren, auf welchem Wege ungefähr man auf eine solche Formel, wobei aber die Correction wegen der Wärme noch außer Acht gelassen worden, kommen konnte. Wir wollen als Beispiel die letzterwähnte Mayersche wählen. Die Entwickelung dieser und aller ähnlichen Formeln stützt sich auf folgende Sätze:

1) Die Gewichte von zwei — senkrecht aufsteigenden — Luftsäulen, welche gleiche Grundfläche (Basis), aber ungleiche Höhen haben, verhalten sich gegen einander, wie die Barometerhöhen; denn letztere sind eine gleichförmige Wirkung der erstern.

2) Denkt man sich (Fig. 120.) eine Luftsäule aufwärts in mehrere gleich hohe Schichten 0 — 1, 1 — 2 u. s. w. getheilt, so müssen wegen des nach und nach abnehmenden Drucks der obern Schichten die Dichtigkeiten und Expansivkräfte der immer höher liegenden Schichten nach einer gewissen Progression abnehmen, folglich auch die Barometerhöhen.

3) Nach dem Mariotteschen Gesetz läßt sich leicht darthun, daß die Dichtigkeiten der Luftschichten aufwärts in einer geometrischen Reihe abnehmen, indem die Höhen in einer einfachen arithmetischen Reihe 0, 1, 2, 3 . . . zunehmen. Da Luftigkeit, Luftdruck und Barometerhöhen zusammengehörige Größen sind, so nehmen auch die Barometerhöhen in einer geometrischen Progression ab, indem die Höhen der Luftschichten (der Beobachtungsorte) in einer arithmetischen Reihe wachsen.

Nun stelle MU eine solche Luftschicht vor, ihre Höhe sey anderweitig bestimmt $= a$. Eine andere Höhe (die gesuchte) MO sey unbekannt $= x$.

Die bekannte Höhe MU sey in der unbekannten MO nmahl enthalten, so wird $n = \frac{x}{a}$.

Ferner soll die bei M beobachtete Barometerhöhe $= b$ (in Zollen und Lin.), die Barometerhöhe bei U $= h$ und die Barometerhöhe bei O (obern Standort) $= H$ seyn.

Indem die Höhen aufwärts in einer arithmetischen Reihe 0, 1, 2 . . . zunehmen, fallen die zugehörigen Barometerhöhen in eine geometrische. Letztere wird nach den geschehenen Beobachtungen offenbar:

$$b \quad h \quad \frac{h^2}{b} \quad \frac{h^3}{b^2} \ldots \quad \frac{h^n}{b^{n-1}}$$

an der Stelle 0 1 2 3 . . . . . n,

weil hier der Exponent der Reihe $\frac{h}{b}$.

Mithin wird in der nten Stelle, nehmlich bei O die Barometerhöhe

$$H = \frac{h^n}{b^{n-1}} = b \cdot \left\{\frac{h}{b}\right\}^n, \text{ oder weil } n = \frac{x}{a},$$

$$H = b \cdot \left\{\frac{h}{b}\right\}^{\frac{x}{a}}.$$

Folglich $\log. H = \log. b + \frac{x}{a} \cdot (\log. h - \log. b)$ und

$$x = a \cdot \left\{\frac{\log. H - \log. b}{\log. h - \log. b}\right\}$$ oder durch Umkehrung der Zeichen

$$x = a \cdot \left\{\frac{\log. b - \log. H}{\log. b - \log. h}\right\}.$$

Nun wollen wir setzen, es sey M die niedrigste Stelle der Atmosphäre, welche die Erde umgiebt, ein

Beobachtungsort sehr nahe über dem Niveau des Meeres; der mittlere Barometerstand betrage hier nach mehreren vergleichenden Observationen 345 Lin.; bei einer Erhöhung von $25\frac{1}{4}$ Klaftern falle die Queckſilberſäule um 2 Linien, oder der Barometerstand betrage dann nur noch 343 Lin. Hier wird $b = 345$, $h = 343$, $a = 25,25$ Kl.

folglich die Erhöhung des Ortes O über dem Meereshorizont

$$x = 25,25 \left\{ \frac{\log. 345 - \log. H}{\log. 345 - \log. 343} \right\}$$

oder weil $\log. 345 - \log. 343 = 0,002525$

$$x = \frac{25,25}{0,002525} (\log. 345 - \log. H)$$

$$= 10000 . (\log. 345 - \log. H)$$

Auf ganz gleiche Weiſe wird nach den erwähnten datis die Erhöhung eines andern Ortes U über den Meereshorizont, bei einem andern Barometerſtand h, alſo beſtimmt:

Die geſuchte Höhe $y = 10000 . (\log. 345 - \log. h)$.

Hieraus ergiebt ſich endlich der Höhenunterſchied der Oerter U und O oder die Höhe UO. Solche iſt $= x - y = 10000 . (\log. h - \log. H)$.

Um demnach die relative Erhöhung eines Ortes über den Horizont eines niedrigern zu finden, muß man zuvörderſt durch correſpondirende Beobachtungen (am beſten geſchieht ſolches durch zwei Beobachter mit ſehr genauen übereinſtimmenden Barometern ſo nahe als möglich zu einerlei Zeit) die Barometerſtände, Höhen der Queckſilberſäulen, bis auf Zolle, Linien, Zehntellinien oder noch genauer beſtimmen. Sodann ſubtrahirt man den Logarithmus von der Zahl des niedrigern Barometerſtandes am obern Standort von dem größern Lo-

thmus des Barom. St. am untern, und multiplicirt
Differenz mit 10000. Diese Rechnung ist ungemein
t, die Multiplication des restirenden Decimalbruchs
10000 geschieht, indem man das Comma des Bru-
bloß um 4 Stellen von der Linken zur Rechten
ückt u. s. w.

Beispiel zu dieser Formel: Wenn h = 336
Lin., H = 325,5 Lin.,

ist log. h = 2,2563393
log. H = 2,5125510

Differenz = 0,0137883, mult. mit 10000 giebt
gesuchte Höhe UO = 137,9 Tois. nahe.

Hätte man die eine, z. B. obere, Barometerhöhe
h beobachtet, nehmlich als 325 Lin., so erhielte
UO = 144,5 Tois., folglich um 6,6 Tois. =
F. zu groß. Hieraus erhellt, wie viel hier auf ge-
e Beobachtung der Barometerstände ankomme. Wie
aber auch zugleich auf die Berechnungsformel selbst
mme, ergiebt sich daraus, daß nach ebendenselben
s die oben bemerkte Formel von Halley die ge-
te Höhe = 133,45.. Tois. hervorbringt.

Der Halleyschen Formel nahe gleich ist die von
uguer aufgestellte: die Höhendifferenz

$$x = 9667 \cdot \log. \frac{h}{H} \text{ tois.}$$

Bouguer leitet dieselbe aus einer richtigen Theo-
und mehreren auf den Cordilleren angestellten Beob-
ungen her, bemerkt jedoch selbst, daß sie nur für sehr
ächtliche Berghöhen beim Aequator, nicht aber der
irge in Europa, hinlängliche Genauigkeit verschaffe.
Er beobachtete den Barometerstand auf dem Gipfel
Pichinga in Peru zu 15 Z. 11 L. = 191 Lin.,
Barom. St. zu Carabourou zu 21 Zoll $2\frac{3}{4}$ Lin. =

254,25 Lin. Die Erhöhung des erstern über den letztern war nach einer genauen geometrischen Messung = 1209 Tois., die barometrische Bestimmung ergab einige Tois. mehr, ein für so beträchtliche Höhen genügendes Resultat.

§. 161.

Modification der ältern Barometerformeln wegen der veränderlichen Temperatur der Wärme.

In den ältern, an sich schon beträchtlich abweichenden, Formeln hatte man den Einfluß der veränderlichen Lufttemperatur auf die barometrischen Messungen, und die davon abhängenden Correctionen des Kalkuls ganz außer Acht gelassen. Erst de Luc unterwarf diesen wichtigen Gegenstand einer sehr sorgfältigen Untersuchung. Die Resultate seiner zahlreichen Beobachtungen und seiner Versuche über die Ausdehnung der Luft und des Queckſilbers, so wie die daraus abgeleiteten Verbesserungen, findet man in einem klassischen Werk dieses geistreichen und unermüdlichen Naturforschers, erschienen im Jahr 1772 unter dem Titel:

Recherches sur les modifications de l'atmosphère etc.

Eine deutsche Uebersetzung davon lieferte Gehler unter dem Titel:

De Luc's Untersuchungen über die Atmosphäre und die zur Abmessung ihrer Veränderungen dienlichen Werkzeuge, 2 Bände, Leipzig 1776.

Jeder Freund der Wissenschaft, besonders derjenige, welcher sich mit barometrischen Messungen zu beschäfti-

von, und die Bestimmung des Preises, die, wie schon in der Natur der Sache liegt, nur von dem Verkäufer abhängt, ist ein Beweis, daß der Verkäufer Eigenthümer ist. Wenn ein Anderer, als der Verkäufer, Eigenthümer wäre, so würde dieser nicht den Preis bestimmen können, sondern der Eigenthümer.

Beispiel 2. Ein Kaufmann kauft Waaren, und bezahlt sie sogleich.

Wenn man nun Beispiel 1. und Beispiel 2. vergleicht, so ist der Unterschied nur der, daß in Beispiel 1. der Kaufmann die Waaren nicht bezahlt, in Beispiel 2. aber bezahlt hat. Da nun aber in Beispiel 2. der Kaufmann Eigenthümer ist, weil er bezahlt hat, so ist auch in Beispiel 1. der Kaufmann Eigenthümer, weil er nicht bezahlt hat.

Beispiel 3. Ein Kaufmann kauft Waaren, und bezahlt sie sogleich, aber er bekommt sie nicht.

Wenn man nun Beispiel 2. und Beispiel 3. vergleicht, so ist der Unterschied nur der, daß in Beispiel 2. der Kaufmann die Waaren bekommt, in Beispiel 3. aber nicht bekommt. Da nun aber in Beispiel 2. der Kaufmann Eigenthümer ist, weil er bezahlt hat, so ist auch in Beispiel 3. der Kaufmann Eigenthümer, weil er bezahlt hat.

Nach diesen Voraussetzungen wird, für $\frac{t + t'}{2} = d$

(mittlere Temp.)

$$x = 10000 \cdot \left\{1 + \frac{d - 16,75}{215}\right\} . \log. (. . . .)$$

$$= 10000 . \left\{\frac{198,25 + d}{215}\right\} . \log. \left\{\frac{h - (T - 10) . \frac{h}{4320}}{H - (T' - 10) . \frac{H}{4320}}\right\}$$

Läßt man die äußerst geringe Correction wegen der veränderlichen Wärme des Queckſilbers im Barometer bei Seite, weil ſie wirklich in der Praxis nichts nützt, und von andern kaum zu vermeidenden Fehlern, beſonders im Beobachten des wahren Barometerſtandes, weit überwogen wird, ſo erhält man nach De Luc.

$$x = 10000 . \left\{\frac{198,25 + d}{215}\right\} . (\log. h - \log. H)$$

Für $\frac{t + t'}{2}$ oder $d = 16,75^0$ wird

$$x = 10000 . (\log. h - \log. H) \text{ u. ſ. w.}$$

Die De Lucſche Formel wird noch bis jetzt von den meiſten Phyſikern und Geometern als die beſte anerkannt, als das Hauptfundament jeder barometriſchen Höhenmeſſung. Durch ſpätere Unterſuchungen hat ſich indeſſen ergeben, daß die Höhen, nach jener Formel berechnet, ein wenig zu klein ausfallen, und daß man De Lucs Normaltemperatur, $Q = 16,75^0$, um einige Grade vermindern müſſe, um der Wahrheit näher zu kommen. Es iſt hier der Ort nicht, die vielen, alle von einander abweichenden, Veränderungen herzuerzählen, welche verſchiedene Phyſiker und Geometer mit der De Lucſchen Fundamentalformel vorgenommen haben. Jeder hat nach ſeiner Meinung Recht gehabt, woraus folgt, daß alle der Wahrheit ſich nur ge-

hert, solche aber nicht ganz erreicht haben können. ist auch gar nicht wahrscheinlich, daß man es in stimmungen der Art je viel weiter, als solches schon chehen, bringen wird.

Historisch verdienen folgende Abänderungen der Lucschen Formel einer Erwähnung:

Schuckburgh setzt nach mehreren sorgfältigen in Gegend von Genf unternommenen Messungen:

$$= 10000 \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{t+t'}{2} - 11{,}7}{195} \right\} \cdot \log. \frac{h}{H} \left\{ 1 - \frac{D}{4384} \right\}$$

bezeichnet hier den Unterschied der Temperaturen des ieckfilber am untern und obern Beobachtungsort.

Der General Roy in England folgerte aus vielen ecten Versuchen und Messungen:

$$= 10000 \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{t+t^2}{2} - 11{,}9}{193} \right\} \cdot \log. \frac{h}{H} \left\{ 1 - \frac{D}{4116} \right\}$$

Trembley setzt, mit Benutzung aller bessern bis seiner Zeit geschehenen barometrischen Beobachtun- und Messungen:

$$= 10000 \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{t+t'}{2} - 11{,}5}{192} \right\} \cdot \log. \frac{h}{H} \left\{ 1 - \frac{D}{4320} \right\}$$

Dieser Formel kann man sich noch jetzt mit Vor- il zu annähernden Höhenbestimmungen bedienen. ie beschwerliche Rechnung erleichtern besondere Baro- tertafeln. Man hat sich durch wiederholte directe essungen und Vergleichungen überzeugt, daß man ch den letzt erwähnten Formeln von Schuckburgh, oy oder Trembley die Berghöhen bis auf unge- hr $\frac{1}{300}$ ihrer wahren Größe, folglich annähernd ge-

nug für topographiſche Zwecke, zu beſtimmen vermag. Was noch weiterhin für die Genauigkeit der barometriſchen Meſſungen geſchehen, bezieht ſich größtentheils auf den Einfluß, welchen die von oben nach unten zunehmende Schwere, ingleichen die unter verſchiedenen Breitegraden der Erde abweichenden Schwerkräfte, ſo wie der Feuchtigkeitszuſtand der Luft auf die Dichtigkeit und Expanſivkraft der atmoſphäriſchen Luft haben.

In Hinſicht der von Laplace reducirten, durch den Namen ihres Verfaſſers berühmten, Barometerformel, welche ſich auf genaue von Ramond in den Pyrenäen ausgeführte Meſſungen gründet, muß ich wißbegierige Leſer auf Schriften verweiſen, in welchen dieſelbe und die Methode ihrer Entwickelung dargeſtellt wird, z. B. in Puissant's Traité de Topographie; nach dieſem auch in der Einleitung zu den Tables barometriques par Bernard de Lindenau, Gotha 1809. u. ſ. w. Der Verfaſſer hat mit der Berechnungsformel einige, jedoch nicht ſehr beträchtliche, Modificationen nach eigner Anſicht vorgenommen.

Die Formel von Laplace, welche mehrere Umſtände und Einflüſſe berückſichtigt, iſt an ſich unbequem zu unmittelbarer Berechnung; ſind aber dafür einmahl einige Zahlentabellen berechnet, wie die eben erwähnten, ſo hat der Kalkul mit ſolcher Beihülfe weiter keine Schwierigkeiten. Den Gebrauch von dieſen und andern Barometertafeln lernt man aus den ihnen vorausgeſchickten Anweiſungen kennen.

Man hat außer den citirten noch mehrere andere Barometertafeln zu Erleichterung practiſcher Höhenmeſſungen, als:

Tables hypsometriques (auxiliaires) pour le calcul des hauteurs etc. d'après la formule de Mr Laplace, par Oltmanns, Paris chez Schöll, 1809. (nach dem Dek. Mètreſyſtem.)

Recht brauchbar iſt ein kurzer Auszug aus den
ables Hypsometriques portatives, par Oltmanns,
ris, chez Schoell, 1811; auf zwei Quartſeiten.
ie geben nicht minder genaue Reſultate, als die Fun-
mentalformel.

Tables barometriques portatives von Biot, Pa-
ris 1811.

hnliche Tafeln (Schichttafeln) hat Benzenberg im
hr 1811 herausgegeben.

Faſt alle Rechnung erſparen die Tabellen für
rom. Meſſ. nach der Schichtmethode von
enzenberg, herausgegeben von Garthe ꝛc. Gie-
n 1817, in Sedezformat, à 12 Ggr., brauchbar und
quem.

Als ein Beiſpiel wirklicher Höhenmeſſung durch
arometer ſtehe hier die von Sauſſure beſtimmte
öhe des Mont-blanc über dem Genferſee. Die data
eſer Meſſung (im Jahr 1787, den 3. Auguſt) giebt
auſſure in ſeiner Schrift: Voyage dans les Alpes
c.

Die Barometerhöhe b (zu Genf beobachtet) war =
7 Zoll 3,583 Lin.

Die Barometerhöhe H (gleichzeitig auf dem Gipfel
es Mont-blanc beobachtet) war = 16 Z. $\frac{1}{2}$ Lin.,

Die mittlere Temper. der Luft $\frac{t+t'}{2}$ = 10,15° R.

Die Wärme des Queckſilbers unten T = 19,2°
" " " " oben T′ = 1,2°

So fand ſich nach der De Lucſchen Formel die Höhe
es Mont-blanc über dem Genferſee ungefähr = 2224,5
Tois. Eine trigonometriſche Meſſung von Pictet
iebt dieſelbe Höhe = 2238 Tois., eine andere von
Schuckburgh aber = 2257 Tois. Nach einer ſpä-
ern trigonometriſchen Beſtimmung von Tralles iſt
ene Höhe = 13659 Fuß. Der Leſer möge noch zur

Uebung die Berechnung vermittelst der verschiedenen oben angezeigten Formeln berechnen, um eine Vergleichung der verschiedenen Resultate anstellen zu können. In den Lindenau'schen Tafeln ist die Höhe des Mont-blanc also angeführt:

Nach barom. Best. = 2261,1 Tois.
Nach trigon. Mess. = 2263,0 —
Differenz 1,9 Tois.

Aus diesen mannigfaltigen Angaben einer und derselben Berghöhe erhellt, wie weit man sich auch bei aller Sorgfalt der Wahrheit in dergleichen Bestimmungen anzunähern vermöge. Bei alle dem werden jedoch immer die barometrischen Berghöhenmessungen im Ganzen die brauchbarsten bleiben.

§. 162.

Einige Regeln zum Höhenmessen und Nivelliren mit Hülfe der Barometer.

Man muß hierzu nur gute, von geschickten Künstlern angefertigte, Barometer gebrauchen, am besten Heberbarometer mit etwas weiten Röhren, von überall gleichem Durchmesser, mit doppelten Skalen und Nonien, wodurch das Ablesen der Queckſilberhöhen bis auf $\frac{1}{10}$ einer Linie oder genauer möglich wird. Vorzüglich brauchbar ist eine neuere Art Reisebarometer (Stockbarometer nach Englefield), in Messing und Holz gefaßt, welches man aus einander nehmen, und so umgestalten kann, daß das in Messing gefaßte Barometer an einem dreifüßigen hölzernen Stativ senkrecht herabhängt, und somit die wahre Barometerhöhe gewisser ablesen läßt. Vortreffliche Barometer der Art liefert unter andern Pistor's Werkstätte in Berlin.

Die schwarzbraune Rückenseite hat eine Länge von 1,5 cm, die Bauchseite eine solche von 1,4 cm, die Breite 1,2 cm, die Höhe 0,9 cm. Die Rückenseite ist mit 3 Längsreihen von Knöpfen besetzt, die Bauchseite mit 2 Reihen. Die Knöpfe sind 0,2 cm hoch, 0,3 cm breit und 0,3 cm lang. Auf der Rückenseite sind 3 Knöpfe, auf der Bauchseite 2 Knöpfe. Die Knöpfe sind 0,3 cm voneinander entfernt. Die Knöpfe sind 0,3 cm von der Kante entfernt. Die Kante ist 0,1 cm breit. Die Kante ist 0,1 cm hoch. Die Kante ist 0,1 cm lang. Die Kante ist 0,1 cm breit. Die Kante ist 0,1 cm hoch. Die Kante ist 0,1 cm lang.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

heitrer beständiger Witterung vorgenommen. Stürmische unbeständige Witterung kann die Höhe der Quecksilbersäule in kurzen Zeiträumen nach einander beträchtlich verändern. Auch treten diese Veränderungen an zwei verschiedenen Oertern nicht immer gleichzeitig ein, besonders wenn diese etwas weit entfernt von einander liegen. Das Steigen oder Fallen erfolgt oft an einem Ort mehrere Stunden später, als am andern. Hierdurch können die Dichtigkeitszustände der Luftschichten an zwei Beobachtungsörtern so modificirt werden, daß das Mariottesche Gesetz und die darauf gegründeten Rechnungsformeln damit nicht zusammenstimmen.

Kein Physiker hat mit so großer anhaltender Sorgfalt, als es von Ramond geschehen, den mannichfaltigen Einfluß untersucht, welchen Lokalverhältnisse und der Zustand der Atmosphäre auf das Barometer haben. Nach seinen Erfahrungen hängt die Richtigkeit der Resultate unter andern auch von der Tageszeit der Beobachtung ab. Geschah diese in den Morgen- oder Abendstunden, so erhielt er immer die Höhen etwas zu klein, viel richtiger dagegen, wenn er seine Beobachtungen gegen die Mittagszeit anstellte. Der physikalische Grund davon läßt sich leicht begreifen. Die Resultate seiner Untersuchung gab Ramond in den Pariser Mémoires de l'Institut 1806, im Wesentlichen also:

1) Die berechneten Höhen werden im Allgemeinen zu klein gefunden, wenn die Beobachtung des Morgens oder Abends geschieht, wenn das untere Barometer in einer Ebene, das obere in einem engen tiefen Thal steht; ferner bei starkem Südwind und stürmischer Luft.
2) Sie werden im Gegentheil zu groß gefunden, wenn man zwischen Mittag und 2 oder 3 Uhr beobachtet, besonders im Sommer, und wenn die Sonne nicht von Wolken bedeckt wird, wenn das

obere Barometer auf einem isolirten Berggipfel, das untere in einem engen Paß steht, auch bei starken Nordwinden, besonders wenn solche an die steilsten Bergabhänge treffen.

Was die Beobachtung durch Thermometer anlangt, so muß man deren zwei, eines am Barometer zur Bemerkung der Temperatur des Queckſilbers, eines an der freien Luft zur Bemerkung ihrer Temperatur, oder doch wenigstens das letztere anwenden, weil von den Bestimmungen damit in der That sehr viel abhängt. Wollte man die Lufttemperatur nicht berücksichtigen, so würde man die berechneten Höhen wohl um 30 Tois. oder noch mehr falsch erhalten. Entbehrlicher ist das Thermometer am Barometer selbst, weil hier die Wärme des Queckſilbers gewöhnlich sehr nahe mit der Wärme der Luft übereinstimmt, und darnach die Reduction der Barometerhöhen auf 0^0 (Eispunkt) ohne beträchtlichen Fehler bewirkt wird. Das Thermometer muß man überall im Schatten beobachten, und den Einfluß andrer als der wirklichen Luftwärme sorgfältig vermeiden. Ehe man den Wärmegrad am Thermometer abliest, soll man es, besonders auf Berghöhen, wenigstens $\frac{1}{4}$ Stunde im Freien ruhig hängen lassen; man begreift wohl, warum? Auch muß man die Beobachtung wiederholen. Die Bestimmung der wahren Lufttemperatur, welche durch Veränderungen der Atmosphäre bisweilen in kurzen Zwischenräumen bedeutende Veränderungen erleidet, hat überhaupt mehr Schwierigkeiten, als diejenige der Barometerstände.

Es giebt zwei verschiedene Arten von barometrischen Messungen: correspondirende und einzelne oder isolirte.

Die correspondirenden, wodurch man relative Höhen (Berghöhen) bestimmt, indem man so gleichzeitig wie möglich an zwei Stationen, einer obern und

untern, die Barometerstände observirt, sind überall vorzüglicher und geben genauere Resultate, als die isolirten, bei denen man bloß an einem oder an einzelnen Oertern Beobachtungen macht, und den mittlern Barometerstand eines andern Ortes, besonders am Meer, als bekannt annimmt. Bei correspondirenden Beobachtungen sind zwei harmonirende Barometer und zwei aufmerksame Beobachter nöthig. Wo man große Genauigkeit in Bestimmung einzelner Berghöhen beabsichtigt, pflegt man die Barometerhöhen mehrere Mahle zu verschiedenen Zeiten zu beobachten, mit Bemerkung der Zeit u. s. w. Hat man nur ein Barometer zur Höhenmessung eines Berges, so muß man es erst am Fuße, sodann auf der Spitze desselben beobachten, jedoch in sehr kurzer Zwischenzeit, damit sich während dem der Zustand der Atmosphäre nicht bedeutend ändere.

Correspondirende Beobachtungen können auch an zwei, mehrere Meilen von einander entfernten, Oertern Statt finden. Doch bedarf es dann öfterer Wiederholung mit sichern Angaben der Zeiten, zweier geschickter Beobachter und zweier völlig harmonirender Barometer.

Beim Nivellement einer größern Landstrecke, Gebirgskette, nimmt man insgemein einen bestimmten Ort, z. B. den Wasserspiegel eines Flusses, als Normalhorizont an, und findet nun durch correspondirende Barometerstände die Höhendifferenzen zwischen diesem Horizont und mehreren andern erhöhten Punkten des Terrains. Villefosse nahm zu seinem Nivellement des Harzgebirges den Marktplatz von Clausthal zum Normalhorizont. Durch correspondirende Barometerbeobachtungen zu Clausthal und Göttingen wurde vorläufig die Erhöhung des erstern Ortes über dem zweiten zu ungefähr 223 Tois. (eigentlich über dem Spiegel der Leine) bestimmt; eine andere Beobachtung,

welche jedoch weniger Vertrauen verdient, gab dafür nur 215 Tois.; über welche Abweichung man sich bei Bestimmungen der Art nicht wundern darf.

Die Erhöhung des Normalhorizontes über das Niveau des Meeres muß schon anderweitig gegeben eyn, um hieraus sodann die absoluten Höhen der Berge über das Meer ableiten zu können. So wurde beim Nivellement von Villefosse die Erhöhung von Göttingen über der Meeresfläche (Ostsee) = 70 Tois. als ein hinlänglich berichtigtes datum vorausgesetzt, woraus sich ferner die absolute Höhe von Clausthal und nach diesem Normalpunkt auch die absoluten Höhen (in Beziehung auf das Meeresniveau) aller andern merkwürdigen Berge des Harzes ergaben, z. B. die des Brocken = 581 Tois. = 3486 Par. F. In einer andern Schrift: Ueber den allgemeinen Zusammenhang der Höhen, von Friedr. Schultz, Weimar 1803. wird die Höhe des Brocken über der Meeresfläche = 3480 angenommen.

Um die absolute Höhe eines Ortes oder auch mehrerer (Bergspitzen) über dem Niveau des Meeres zu erhalten, sind barometrische Beobachtungen nicht allein bequemer und leichter, sondern auch, wie mich dünkt, eben so genau wo nicht genauer, als ein eigentlich sogenanntes geometrisches Nivellement von einem Ort bis an eine nächstgelegene Meeresküste fortgesetzt.

Nach vielfältigen, von mehreren Physikern genau ausgeführten, Beobachtungen darf man den mittlern Barometerstand — zwischen dem höchsten und niedrigsten — sehr nahe = 28 Zoll 1 Linie bis 2 Par. Lin. bei einer Temperatur von 10° Reaum. setzen, und daraus, so wie aus isolirten Barometerbeobachtungen auf Bergen u. s. w., die absoluten Höhen dieser letztern annähernd ableiten. Nach Bouguer, Condamine und Alexander v. Humboldt ist die mittlere Ba-

rometerhöhe am Meer etwas geringer beim Aequator, als in den andern Zonen. Humboldt findet sie beim Aequator = 28 Z. 1 Lin.; anderwärts wird sie insgemein = 28 Z. 2 Lin. gefunden. Die Reduction der so berechneten Höhen über das Meer, nach dem gleichzeitig am Meere herrschenden Wärmegrad, ist nicht sehr zuverläßig. Man nimmt wohl an, daß die Temperatur der Atmosphäre von unten nach oben nach einer gewissen Progression abnehme; allein die harmonische Progression in Zahlen, z. B. für jede 100 Tois. höher 1° Reaum. weniger, nach guten Observationen von Sauffure, Ramond und Humboldt, unterliegt wohl mancherlei Abweichungen, deren Ursachen wir nicht zu ergründen vermögen. Nach dem Gesetz von 1° Reaum. für 100 Tois. ließe sich, wenn es ganz richtig wäre, aus der Temperatur der Luft an einem erhöhten Beobachtungsort die gleichzeitige Temperatur der Luft am Meere ableiten, nachdem man die Erhöhung jenes Ortes bis auf einige hundert Fuß annähernd gefunden hätte. Insgemein bestimmt man die Erhöhung eines Ortes (Berges) über die Meeresfläche durch vieljährig beobachtete mittlere Barometerhöhen an beiden Stellen. Die mittlere Barometerhöhe am Meere ist, wie oben gezeigt wurde, genau genug ausgemittelt, diejenige an irgend einem erhöhten Ort des festen Landes muß durch vervielfältigte Beobachtung der höchsten und niedrigsten Barometerstände herausgebracht werden. Heißt nun der mittlere Barometerstand am Meere h, diejenige an einem andern Ort (Stadt, Berg ꝛc.) H, so pflegt man sich gemeiniglich zur Berechnung der absoluten Höhen dieser Formel zu bedienen:

$$x = 10000 . (\log. h - \log. H.)$$

Wäre z. B. H = 22 Zoll = 264 Lin. Par.
h = 28 Z. 2 L. = 338 Lin.,

erhielte man log. 338 = 2,5289167
log. 264 = 2,4216039

x = 10000 . 0,1073128 = 1073 tois.
= 6438 Par. F.

olche Bestimmungen, ihrer Natur nach immer unvollmmener als correspondirende Beobachtungen, werden ich und nach für einen gewissen Ort auf dem festen nde durch fortgesetzte Observationen des mittlern Barometerstandes immer mehr berichtigt. Hierzu können ich fortgesetzte correspondirende Observationen am eer und an jenem Ort viel beitragen.

Man begreift wohl, daß sich durch isolirte Beachtungen auf mehreren Bergspitzen und Berücksichtiung des mittlern Barometerstandes am Meer die relaen Erhöhungen jener genau genug für allgemeine pographische Zwecke finden lassen u. s. w.

§. 163.

Höhenmessung mit einem Thermometer.

Schon Fahrenheit (in den Transact. philos. ol. 33. p. 179.) und Cavallo (ibidem Vol. 71. 524.) hatten die Möglichkeit gezeigt, und auch eige Versuche gemacht, das Thermometer zu Höhenessungen anzuwenden.

Das Wasser siedet bei höhern oder niedrigern raden der Wärme nach Verschiedenheit des größern er geringern Drucks, welchen die atmosphärische Luft if das frei (unbedeckt) kochende Wasser ausübt. De uc *) hat viele Beobachtungen und Versuche ange-

*) Deutsche Uebers. Untersuchungen über die Atmosphäre, 2ter Bd. p. 502 sqq.

ſtellt, um ein regelmäßiges Geſetz zu entdecken, nach welchem die Wärmegrade des ſiedenden Waſſers mit dem Luftdruck, folglich auch mit den Barometerhöhen, wachſen oder abnehmen. Er fand die Wärmegrade des Siedens (Kochens) in einer harmoniſchen Progreſſion, indem die Barometerhöhen in einer arithmetiſchen Reihe fortgingen. Die Verſuche machten eine gewiſſe Vorſicht ſowohl in Hinſicht des Kochens, als auch des dazu gebrauchten Waſſers nothwendig. Unreines, beſonders mit Salzen geſchwängertes, Waſſer ſiedet bei andern Wärmegraden, als reines, z. B. wenn es mit Seeſalz geſättigt iſt, ſo wird dadurch der Siedpunkt wohl um 7^0 Reaum. höher geſteigert. Auch beim Kochen eines und deſſelben reinen Waſſers bei gleichem Luftdruck kann das Schwanken und die Abweichung des Siedepunktes $\frac{1}{10}{}^0$ Reaum. wo nicht mehr betragen. Die im Waſſer enthaltene Luft äußert ebenfalls einen bemerkbaren Einfluß der Art; ſie befördert das Kochen, und je geringer der Druck der Atmoſphäre auf das Waſſer, deſto mehr beſchleunigt die darin enthaltene Luft das Kochen deſſelben. Ganz von Luft gereinigtes Waſſer erhält ſich bis auf 89 — 90^0 Reaum., ehe es ſiedet, dahingegen gewöhnliches lufthaltiges Waſſer bei 80^0 Reaum. und bei einem Barometerſtand von ungefähr 27 Par. Zoll zum Sieden kommt. In luftleerem Raume (ſogenanntem Vacuum) ſiedet luftleeres Waſſer bei ungefähr 78^0, lufthaltiges bei 70^0.

Bei vermindertem Druck der Atmoſphäre vermindern ſich auch die Grade der Wärme, wodurch reines Waſſer zum Kochen gebracht wird; eine Erfahrung, die ſich durch Kochverſuche mit Thermometerbeobachtung auf hohen Bergen leicht beſtätigen läßt. De Luc giebt in ſeinem Werk über die Reſultate ſeiner mit Theorie begleiteten Verſuche mehrere Tabellen, ungefähr in dieſer Art:

Beobachtungsörter.	Wärme der Luft.	Barometerhöhe.	Siedpunkte nach Reaum.
.	$14\frac{1}{4}$	28, 5 3.	81, 09
.	19	28, 1	80, 82
.	$12\frac{1}{2}$	27, 09	80, 04
.	5	26, 41	79, 60
.	$2\frac{1}{2}$	25, 11	79, 9
.	15	24, 11	77, 45
.	10	22, 11	76, 54
.	11	21, 1	75, 47
.	10	20, 4	73, 93
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
letscher Buet	$6\frac{1}{2}$	19, 71	73, 21 u. s. w.

ofern die Unterschiede der Höhen nicht sehr beträchtlich, so darf man, Kochversuchen auf Bergen zufolge, nehmen, daß ungefähr $1\frac{1}{4}$ Par. Lin. Unterschied im arometerstand den Siedpunkt um $\frac{1}{1000}$ seines Fundamentalabstandes (von 0^0 bis 80^0 Reaum.) verändert. lan könnte also, wenn die Voraussetzung überall richtig wäre, welches wir bezweifeln, die zusammengehörigen Veränderungen am Barometer und Thermometer ach der Regel de Tri also berechnen: $1\frac{1}{4}$ Par. Lin. : $\frac{1}{1000}$: a Par. Lin. : $\frac{b}{1000}$ u. s. w. Aus den Differenzen der Siedpunkte, bei welchen das Wasser an einem niedrigern und an einem höhern Ort kocht, würde sich sodann auf ähnlicher Art wie aus den Differenzen der Barometerstände der Höhenunterschied beider Oerter annähernd berechnen lassen.

In der neuern Zeit hat sich mit diesem Gegen-

stand Wollaston in England, Professor der Universität zu Cambridge, ernstlich beschäftigt. Durch seine Versuche über den Zusammenhang des Wassersiedepunktes mit dem Druck der Atmosphäre, wurde er auf einen thermometrischen Apparat geleitet, der nach seinem Dafürhalten genauer und bequemer zu Höhenbestimmungen ist, als das Barometer. Wollaston's Memoire über seine Versuche und über seinen, von Cary angefertigten Apparat, findet sich in den Transact. Philos. 1817. Part. I. mit Figuren; im Auszug auch in dem zu Genf erscheinenden Journal: Bibliotheque Universelle des Sciences, belles lettres et arts, Janvier 1818. p. 6 sqq. so wie in Deutschen Journalen der Naturwissenschaft.

Das Wesentliche von Wollaston's Apparat besteht in einer kleinen Vorrichtung zum Kochen des Wassers und in einem Queckſilber-Thermometer mit einer gröſsen Kugel und einem feinen Haarröhrchen. Die Fahrenheitschen Grade, von denen nur einige wenige unter dem Siedepunkt bis zu diesem auf die äuſserst enge Thermometerröhre gehen, sind hier so groſs, daſs jeder Grad Fahrenh. eine Ausdehnung von 3,98 Engl. Z. hat. Jeder Grad ist an der Scale in 100 Theile getheilt, und ein Nonius mit Loupe giebt Zehntel derselben, folglich ein Tausendtheilchen von 1^0 Fahr. $= \frac{1}{2250}{}^0$ Reaum. — Die genaue Anfertigung und Theilung eines so empfindlichen Thermometers wird immer schwierig seyn.

Wollaston fand, daſs eine Veränderung von 0,589 Engl. Z. im Barometerstand genau 1^0 Fahr. Unterschied in der Temperatur des siedenden Wassers bewirkte. Diese war 213,567 F. beim Barometerstand von 30,603 Engl. Z. (nahe = 28 Z. 1 Lin. Par.), hingegen 209,263 F. beim Barometerstand von 28,191 Z. (etwas über 26 Z. Par.). Sollte man Hö-

n bis zu 5000 Fuß auf solche Weise finden, so würde e Scale des Thermometers bis auf 200° Fahr. vom iedpunkt 212° abwärts gehen müssen; für Höhen bis 0000 F. auf 190° Fahr. Ist nach Wollaston die ieale so beschaffen, daß auf 1 Zoll derselben ein Grad ahrenh. kommt, so stehen die Barometerveränderungen 1 denen des Thermometers in dem Verhältniß = 5 : 3. Die Art, Höhen mit einem solchen Apparat zu messen, ersteht sich fast von selbst, die Berechnung geht wie bei Barometermessungen. Wollaston hat einige Probe- iessungen in jener Art vorgenommen, und nach seinem Bericht sehr annähernde Resultate erhalten. Er fand ie Höhe der Galerie der Paulskirche in London zu 75, 1 Engl. F. nur um 2 F. verschieden von der durch en General Roy gemachten Bestimmung. Eine andre Thermometermessung gab die Höhe eines Hügels bei Greenwich über Woolwich zu 447,9 F.; nach der Messung des Gen. Roy betrug dieselbe 444 F. u. s. w. Ich selbst habe noch keine Gelegenheit gehabt, Versuche über diese Messungsart anzustellen; glaube jedoch, daß solche mehr wissenschaftliches als practisches Interesse habe, und in Hinsicht der Schnelligkeit und Bequem- lichkeit jeder guten Barometermessung nachstehen müsse, wenn sie auch sogar gleiche Genauigkeit verschaffte.

Sechste Abtheilung.

Höhere Land- und Erdmessung.

---

§. 164.

Allgemeine Betrachtung.

Die Messung oder Aufnahme einer weit ausgedehnten Erdstrecke, eines ganzen Landes, geschieht in zwei Hauptacten:

1) Die Lagen einiger Hauptörter des Landes, Hauptstädte, besonders Sternwarten, müssen in Beziehung auf die ganze Kugeloberfläche der Erde, nehmlich in Hinsicht ihrer Längen und Breiten bestimmt werden. Man pflegt diese Operation insgemein die geographische Ortsbestimmung zu nennen; solche erlangt man fast allein durch astronomische Beobachtungen. Durch die genau gefundenen Längen und Breiten einiger Hauptrichtpunkte, an welche sich ferner das trigonometrische Netz des Landes anschließt, werden die Seiten des letztern gegen die Himmelsgegenden, gegen den Meridian irgend eines Hauptortes, gehörig orientirt, so wie dadurch die Stellung des Landes auf der Erdoberfläche gegen angrenzende Länder bestimmt wird. Mittelst der

aſtronomiſch-geographiſchen Ortsbeſtimmung wird übrigens das trigonometriſche Netz in gewiſſe Grenzen eingeſchloſſen und dahin beſchränkt, daß in Beziehung auf das ganze aufzunehmende und in einer Charte darzuſtellende Land keine ſehr beträchtlichen Verſchiebungen und Fehler der Dreiecke erſter Ordnung mehr entſtehen können. Hieraus erhellt die Nothwendigkeit, zum Behuf großer Länderaufnahmen, wenn ſolche genau und vollſtändig werden ſollen, auch aſtronomiſche Hülfsmittel, Kenntniſſe und Beobachtungen anzuwenden.

2) Die gegenſeitigen Lagen und Entfernungen aller Hauptörter (Richtpunkte) eines Landes müſſen durch eine trigonometriſche Operation mit den vollkommenſten Werkzeugen und Hülfsmitteln in einer zuſammenhängenden Reihe großer Dreiecke (trigonometriſchem Netz) feſtgeſetzt werden. Ein ſolches trigonometriſches Netz (Canevas), zu deſſen Winkelſpitzen man weit von einander entfernte natürliche oder künſtliche Richtpunkte wählt, hat in Hinſicht ſeiner Geſtalt und fortlaufenden Zuſammenkettung große Aehnlichkeit mit einem kleinern geometriſchen Netz, wovon früher in den §§. 150, 151. Fig. 111. gehandelt worden. Die trigonometriſche Triangulirung unterſcheidet ſich aber von einer geometriſchen mit dem Meßtiſch dadurch, daß bei jener die Sehewinkel nicht directe conſtruirt, ſondern nach Graden, Minuten ꝛc. gemeſſen, und ſodann aus dieſen Winkeln und einer oder einigen Grundlinien (Baſen) die übrigen Seiten des Dreiecknetzes vermittelſt des trigonometriſchen Kalkuls abgeleitet werden. Beim geometriſchen Trianguliren erhält man das Netz einer aufzu-

nehmenden Landstrecke unmittelbar auf dem Papier, beim trigonometrischen dagegen nur die data der Berechnung dafür, um dieser gemäß fernerhin eine Charte des Landes nach irgend einem verjüngten Maßstab entwerfen zu können. Werden die Winkel sehr genau bis auf einzelne Sekunden observirt, die Basen zuverläßig abgemessen, und wo möglich gute (nahe gleichseitige) Dreiecke erwählt, so muß ein trigonometrisches Netz ohne allen Vergleich größere Genauigkeit geben, als ein geometrisches. Daher auch ersteres bei jeder größern Landesmessung nothwendig vorausgeht und dem letztern sodann zur Stütze oder Grundlage dient.

Zur höhern Erdmessung gehört außer der Längen- und Breitenbestimmung — geographischen Ortsbestimmung — und der Triangulirung ganzer Länder in Dreiecknetzen erster und zweiter Ordnung, noch die Ausmessung von Bogen größter Kreise auf der Erde — Gradmessung — zur Bestimmung der Größe und Gestalt der Erdoberfläche.

Zu jeder dieser drei großen geodätischen Operationen, die einander wechselseitig unterstützen, ist eine höchst genaue Winkelmessung die erste Bedingung und das hauptsächlichste Hülfsmittel. Der richtigste Kalkul und alle andre Vorsicht können die Fehler nicht gut machen, welche aus falsch gemessenen Winkeln entspringen. Man darf daher zur Praxis der höhern Geodäsie nur die vollkommensten Winkelmesser, nehmlich repetirende Kreise, in einigen unvermeidlichen Fällen auch wohl gute Spiegelsextanten von 7 bis 10 Zoll Radius anwenden. Bei dem Dreiecknetz erster Größe (Ordnung), welches über ein ganzes Land gelegt wird, und in welchem die Seiten der Dreiecke mehrere Meilen lang sind, muß der Trianguleur, so weit es in seiner

ewalt ſteht, die Stationspunkte der Winkelmeſſung ſo
iswählen, daß ſich daſelbſt repetirende Kreiſe, ein
heodolit oder ein Borda'ſcher Multiplicationskreis,
if feſten Unterlagen aufſtellen laſſen. Auf großen
hürmen mit Galerien und Durchſichten, noch mehr auf
hen Bergen, wo man zu dieſer Abſicht eigne kleine
bſervatorien und Signale erbaut, wird man jener
rderung mehrentheils Genüge leiſten können. Bei
m jetzigen Zuſtand mathematiſcher Kunſt (Mechanik)
urfte es daher nicht zu billigen ſeyn, wenn man noch
imer aus Bequemlichkeit bloß einen Sextanten zur
riangulirung eines ganzen Landes anwenden wollte,
ie dies bei mehreren frühern Arbeiten der Art geſche-
n iſt, z. B. bei der Meſſung von Oſt- und
Weſtpreußen, durch den Hauptmann Tertor.
ieſer wendete, nach Beiſeitſetzung eines anfänglich ge-
auchten Aſtrolabiums — Theodoliten ohne Repeti-
on, — einen vorzüglich guten Sextanten von Rams-
en zu allen ſeinen terreſtriſchen und aſtronomiſchen
Winkelmeſſungen an, und berichtet ſelbſt, daß die Ge-
auigkeit in den Winkeln, bei allen Rectificationen und
orrectionen, nicht weiter als bis auf etwa 5″ (ich
ermuthe noch mehr) getrieben werden konnte, und daß
aher Fehler von 1 — 2 Fuß auf berechnete Diſtanzen
on 6000° nicht zu vermeiden ſtanden. Noch mehr
uchſen die Fehler an bei Zuſammenſetzung mehrerer
Dreiecke, beſonders wenn in denſelben ſehr ſpitze und
umpfe Winkel vorkamen, ſo daß dieſelben ſich biswei-
en auf mehrere Ruthen oder bis $\frac{1}{200}$ des Ganzen ver-
iegen. Eine ſolche Genauigkeit iſt offenbar zu gering
ür eine große Triangulirung. Mit repetirenden Krei-
en erlangt man die Winkel der großen Hauptdreiecke
iberall bis auf 1″ oder noch genauer.

Zur Gründung des trigonometriſchen Netzes zwei-
er Ordnung (triangles secondaires), welches von be-

reits festgesetzten Punkten und Seiten der Dreiecke erster Ordnung ausgeht, bedarf die Winkelmessung eines geringern Grades von Genauigkeit, folglich kann man sich dann lieber eines Sextanten oder auch eines Astrolabiums mit Fernrohr ohne Gefahr beträchtlicher Verirrungen bedienen, weil hier die Beobachtungen mit repetirenden Kreisen zu viel Mühe und Zeit erfordern würden.

Zu astronomischen Winkelmessungen für geographische Ortsbestimmungen dient am besten der Bordasche Kreis, auch wohl ein guter Sextant.

§. 165.

Recognoscirung eines zu triangulirenden Landes, Wahl der Richtpunkte.

Bevor man über eine große Erdstrecke, ein aufzunehmendes Land, ein Netz von Dreiecken der ersten Ordnung legt, muß man, wie bei einer geometrischen Triangulirung (§. 149.), das Land bereisen, um vorerst eine allgemeine Uebersicht desselben zu erlangen, die Namen der Oerter, die gegenseitigen Lagen der natürlichen Richtobjecte so wie ihre Gestalten, um endlich auch die schicklichsten Standörter (Stationen) der Winkelmessung, die zweckmäßigsten Verbindungslinien der großen Hauptdreiecke kennen zu lernen. Schon bei der Bereisung des Landes kann ein geschickter Trigonometer sein schwieriges Werk planmäßig vorbereiten, die Lage, Zusammenreihung der Hauptdreiecke in einem Brouillon bezeichnen, die Standpunkte bemerken, von wo aus die besten Aussichten auf viele entfernte Richtobjecte Statt finden, wozu insgemein Thürme und Bergspitzen sich am besten eignen. So kann er auch eine richtige Auswahl der Stationen, besonders auf hohen Bergen,

treffen, wo Signale errichtet, Winkel observirt und von wo aus die Dreiecke in ununterbrochener Ordnung fortgeführt werden können. — Ohne eine solche Besichtigung des aufzunehmenden Landes, ohne eine planmäßige Vorbereitung würde eine große Triangulirung durch Lokalumstände überall erschwert, und der wichtigen Forderung, ein Triangelnetz von guten Verhältnissen anzulegen, wegen oft unvorhergesehener Hindernisse nicht genügt werden können.

Was sich weiter hierüber sagen läßt, lernt man am besten im Felde durch wirkliche Praxis kennen.

§. 166.

Natürliche Richtobjecte und künstliche Signale für ein Dreiecknetz erster Ordnung.

Zu Richtpunkten (Winkelspitzen der großen Dreiecke) und Standörtern der Winkelmessung dienen hohe Kirch- oder Schloßthürme, besonders solche, die mit Durchsichten, Plateformen oder Galerien versehen sind. Von hohen einzeln stehenden Bäumen läßt sich nur selten ein an sich mißlicher Gebrauch machen. Oft reichen indessen die natürlichen Richtobjecte nicht aus, oder sie geben keine Dreiecke von guter (nahe gleichseitiger) Gestalt. Diesen Mangel ersetzt man dann durch künstliche Signale, welche man am besten auf Hügeln oder Bergen errichtet, weil sie hier eine weitere Aussicht gestatten, und auf meilenweite Entfernungen sichtbar sind. Durch künstliche Signale auf Anhöhen hat es übrigens der Trianguleur in seiner Gewalt, über ein ganzes Land hinweg eine Reihe von sehr großen, viel Terrain einschließenden, und gut gestalteten Dreiecken zu führen. Ist erst das große Dreiecknetz vollendet, so lassen

sich ferner durch kleinere Dreiecknetze (Dreiecke der zweiten Ordnung), die zwischen die einzelnen großen Dreiecke gelegt werden, die Lagen aller andern natürlichen Richtobjecte zuverläßig genug bestimmen.

Zu Signalen braucht man mehr oder weniger hohe Gerüste von verschiedner Gestalt. Die französischen Akademiker Maupertuis, Clairaut rc. errichteten auf den Bergspitzen, welche ihr Dreiecknetz bildeten, hohe Kegel aus vielen großen Baumstämmen erbaut, welche durch das Abschälen der Rinde so weiß wurden, daß man mehrere Meilen weit durch das Fernrohr recht deutlich sehen und pointiren konnte. Der Mittelpunkt von der Basis dieser kegelförmigen Signale wurde bemerkt durch Zeichen, in Felsen eingehauen, und Stöcke in den Boden eingetrieben. Sie waren so dauerhaft gebaut und so bequem zu beobachten, wie die meisten Gebäude im Lande.

Man kann die Signale in Form einer dreiseitigen oder vierseitigen Pyramide anlegen, indem man drei Baumstämme, 30 — 40 Fuß hoch, zu einer dreiseitigen Pyramide verbindet, die Seitenflächen von der Spitze herab bis etwa 12 Fuß von der Basis mit Latten, wie bei einem andern Dach, beschlägt, und darüber Stroh oder Strauchwerk legt. Die Pyramide wird sodann aufgerichtet, und mit ihren Stammenden in drei hierzu in die Erde gegrabene Löcher fest eingesetzt. An den Spitzen mehrerer solcher Signalpyramiden bringt man noch besondere Zeichen an, um sie in der Ferne besser von einander unterscheiden zu können. Die Messung der Sehewinkel unternimmt man aus der Mitte der unten nach allen Richtungen offnen Pyramide, erforderlichen Falls auch an der Spitze, besonders wenn man mit einem Sextant mißt. Das Aufsteigen bis zur Spitze wird durch die Latten möglich, oben dient ein angenageltes Bretchen zum Sitzen u. s. w. Den Mit-

punkt der Signalbasis bemerkt man durch ein Loch der Erde und durch einen Stein, um den wahren tationspunkt jederzeit wieder richtig zu treffen.

Bisweilen erbaut man auch kostbarere Signale s Steinen in Form vierseitiger Pyramiden, und sucht lche so zu stellen, daß ihre Seitenflächen nahe senkrecht gen die Seiten der Dreiecke liegen, deren Winkelspitzen die Achse dieser Pyramiden fallen. Besser thut man och in jedem Fall, wenn man nicht nach den Seitenchen der Pyramiden, sondern nach ihrer mit einem ichen, z. B. einer kleinen Baumkrone, einer Stange it Strohwisch oder desgl. versehenen Spitze visirt, weil an so das wahre Centrum des Signals gewisser trifft. enn man auf einem ebenen Terrain dem Signal eine öhe $= \frac{1}{6000}$ bis $\frac{1}{7000}$ von der Länge der großen Dreiseiten giebt, und die Breite der Basis $= \frac{1}{3}$ der Höhe acht, so kann man ein solches Signal auf mehr als Meilen weite Entfernungen noch deutlich sehen. Die öhe kann auf ebenem Terrain 60 — 70 F. betragen.

Wollte man, wie es bei der großen französischen radmessung zuweilen geschehen, zu Signalen die Form n Parallelipeden mit quadratischen Grundflächen erählen, so würde man beim Visiren nicht immer die chse (Mittelpunkt) derselben treffen, und eine Reduction r Winkel wegen der Lichtphasen, schiefen Beleuchtung d schiefen Ansicht nöthig haben.

In gewissen Fällen, wo nehmlich die gewöhnlichen ignale bei Tage zu schwer zu sehen sind, entweder egen ihrer großen Entfernung oder wegen Verdunkeng der Atmosphäre durch Nebel, Heerrauch ꝛc., gebraucht man auch leuchtende Nachtsignale. Dazu dien entweder große Feuer auf Anhöhen, noch besser ampen mit paraboliſchen Spiegeln, Réverbères, wie sie i Messungen in England und in Frankreich schon über angewendet worden. Diese Nachtsignale wären

in so fern die besten, weil sie sehr weit und deutlich gesehen werden, und das Pointiren auf ihren Mittelpunkt von verschiedenen Standörtern leichter geschieht; indessen führen sie auch manche Hindernisse und Unbequemlichkeiten mit sich. Ein einziger paraboliſcher Spiegel wirft das in seinem Brennpunkt angezündete Licht bloß in einem schmalen Streifen nach einer einzigen Richtung, und ihn nach einer solchen Richtung zu stellen, daß sein Licht von einem mehrere Meilen entfernten Standpunkt zu sehen sey, wird begreiflich immer schwer halten. Man müßte also das Nachtsignal aus mehreren réverbères zusammensetzen. Ferner müssen bei einer nächtlichen Winkelmessung zugleich an mehreren entfernten Oertern (Berghöhen ꝛc.) zu verabredeten Zeiten die Feuer angezündet werden, wozu mehrere wohlunterrichtete Personen gehören, die die réverbères gehörig zu unterhalten und zu richten verstehen. Bisweilen zeigt sich das Licht der réverbères dem entfernten Beobachter in einer oscillirenden Bewegung, wie Delambre in der Base du Système mètrique Vol. I. p. 29. bemerkt, und macht den wahren Ort desselben etwas ungewiß, welcher Uebelstand auch bei den gewöhnlichen Tagsignalen Statt finden kann. Es treten außerdem noch oft andere Lokalverhältnisse bei Landesmessungen ein, welche die Anwendung von Nachtsignalen verhindern. Méchain sah sich bei seiner ersten Reise in Spanien genöthigt, darauf zu verzichten; bei seiner zweiten Reise gebrauchte er sie für die Stationen zwischen Barcelona und Tortosa, und bei den letzten Beobachtungen bei Cullera und Dropesa. Bei mehreren Vergleichungen der durch Nachtsignale und auch durch Tagsignale gemessenen Winkel hat sich ergeben, daß die Genauigkeit durch erstere nicht weiter geht, oder auch wohl um ein wenig geringer ist, als die durch Tagsignale erhaltene.

Was die Deutlichkeit anlangt, mit welcher natürliche Richtobjecte, z. B. Thürme oder künstliche Signale, von weit entlegenen Standorten gesehen werden, so ist noch zu bemerken, daß sie im Allgemeinen am leichtesten aufgefunden und erkannt werden, wenn sie den Himmel (Atmosphäre) zum Hintergrund haben; am undeutlichsten hingegen, wenn im Hintergrunde die Erde, Wald oder andere dunkle, besonders gleichfarbige, Gegenstände liegen. Ein grauer Thurm, eine Windmühle, eine Signalpyramide mit Strauch bedeckt, werden in diesem Fall entweder gar oder nur mit der größten Anstrengung der Augen in der Ferne gesehen. Bei der Errichtung eines Signals hat man daher, wo es irgend möglich ist, dafür zu sorgen, daß es nicht die Erde, Wald, einen Baum, ein Haus oder desgl. zum Hintergrund erhält, weil es sonst in der Ferne schwer zu unterscheiden wird. Kennt man in Voraus den Hintergrund, vor welchem ein Signal gesehen wird, so giebt man ihm eine Farbe ganz verschieden von derjenigen des Hintergrundes, weil durch den Contrast der Farben jedes Object wahrnehmbarer wird. Wenn daher eine Signalpyramide im Hintergrunde den Himmel hat, so wird man sie des Contrastes wegen schwärzen oder mit dunklerm Strauchwerk bedecken; wenn man sie aber vor dunklen Objecten, einem Wald oder der Erde, im Hintergrunde aus der Ferne sehen soll, so wird man wohl thun, wenn man ihr eine weiße Farbe ertheilt. Man kann hierzu weißes Segeltuch oder auch eine Strohbedeckung anwenden, welche vor einem dunkeln Hintergrund im Fernrohr deutlich und scharfbegrenzt erscheinen, besonders wenn sie von der Sonne beschienen werden.

Hieraus erhellt, daß die Signale auf Bergspitzen im Allgemeinen zum Visiren die besten sind, weil solche meistens den Himmel im Hintergrund haben, und daß hingegen das Visiren nach entfernten Objecten in ebe-

nen und tief liegenden Gegenden am schwierigsten seyn muß.

Hier bringt man zuweilen die künstlichen Signale über Thürme und andere Gebäude an, um sie durch größere Höhe auf weite Entfernungen über bedeckende Vordergründe, z. B. Waldungen hinweg, erkennbar zu machen. Indessen widersetzen sich der Construction der Signale auf Gebäuden oftmahls Lokalhindernisse. Delambre berichtet, daß er hierbei durch die Widerspenstigkeit der Stadt- und Landbewohner oft aufgehalten und ins Gedränge gekommen sey. Solche Leute sehen entweder die Meßoperationen als eine Art Zauberei an, oder wollen für einen ihres Erachtens so unnützen Zweck ihre Kirchthürme nicht angreifen lassen.

Ein Thurm ist allerdings das natürlichste und wohlfeilste Signal, aber nicht jederzeit das bequemste. Theils kann man nicht immer aus dem Centrum desselben observiren, und hat folglich eine besondere Reduction der gemessenen Winkel auf das Centrum der Station (§. 102.) nöthig, theils haben die Thürme oft keine bequeme Gestalt zum Beobachten, keine Durchsichten ꝛc., dann muß man in den engen mit Holzwerk versperrten Dächern einen unbequemen Stand annehmen, und Oeffnungen in das Dach machen. Man sieht sich bisweilen sogar genöthigt, das Messen der Winkel an der Thurmspitze zu verrichten, wohin man mit dem Sextant, dem hier allein anwendbaren Instrumente, auf Leitern oft nicht ohne Gefahr gelangt.

So brauchbar daher Thürme mit freien Durchsichten oder mit Plateformen sind, weil solche zugleich Schutz gegen Wind und Regen gewähren, so sind den Thürmen von andrer unbequemer Gestalt künstliche Signale überall vorzuziehen. Da solche aber gewöhnlich viel kosten, so wendet man sie nur zum Behuf großer wichtiger Landesmessungen an. Für eine kleinere Trian-

rung, Dreiecknetze der zweiten Ordnung, reichen ichere Signale mit weniger Körper aus, z. B. ein= e Baumstämme gegen 30 Fuß hoch, in die Erde recht festgestellt, und oben mit einem Busch oder ei= andern auf kleinere Enfernungen sichtbaren Zeichen ehen. Aehnliche einfache Signale hat man auch n zu einer großen Triangulirung angewendet. Mé= in brauchte zu Mont=Serrat eine Art rechtwink= ter Tafel an einem vertikal aufgerichteten, und an Kapelle angeklammerten, Balken, welcher über das ch hervorragte.

§. 168.

Abmessung der Basen für ein großes Dreiecknetz.

Hierzu lassen sich nur etalonnirte Maßstäbe (s. 52.) gebrauchen. Erlaubt es die Zeit, so kann man noch zur Vergleichung und Prüfung der Resultate ne= nbei noch mit einer guten berichtigten Kette aus Stahl chmessen.

Vom Abstecken gerader Linien im Felde ist früher n §. 84 — 87, von der Messung horizontaler oder hiefer Distanzen im §. 88 — 91 das Nöthige erinnert orden.

Da die Dreiecke erster Ordnung sehr lange, 1 bis Meilen große Seiten haben, so muß man die Basis der die Basen, aus welchen jene durch trigonometri= chen Kalkul abgeleitet werden, möglichst lang, wenig= tens 1 Meile, annehmen, weil die bei der Ausmessung einer kleinen Basis begangenen Fehler bei ihrem Ueber= gang auf die größern Seiten des Dreiecknetzes sich ver= hältnißmäßig vergrößern, vergl. §. 146.

Die Mühseligkeit und das Zeitraubende einer gro=

ßen Basismessung, ingleichen oftmahls eintretende Terrainhindernisse, setzen der Ausdehnung solcher Grundlinien gewisse Grenzen, und man kann im Allgemeinen zufrieden seyn, wenn man dieselben 1 bis $1\frac{1}{2}$ Meilen lang genommen und bis auf einige Zoll genau gemessen hat.

Bei der franz. Gradmessung von Delambre und Méchain war die ausgemessene und auf das Niveau des Meeres reducirte Basis von Perpignan = 6006,1983 Tois., die am nördlichen Ende des Dreiecknetzes, ungefähr 160 Lieues (gegen 80 Meilen) von jener, gemessene Basis von Melun = 6075,9 Tois. beinahe 2 Meilen lang. Diese beiden Abmessungen müssen für alle Zeiten als Muster einer genauen, fast scrupulösen Vorsicht in Arbeiten der Art gelten. Eine nähere Beschreibung davon findet der wißbegierige Leser in der Base du Système métrique etc. Vol. II. p. 31 sqq.

Bei Triangulirung eines Landes verschaffen hölzerne Maßstäbe (Meßruthen von 10 Rheinl. Dec. Fuß Länge) mit messingenen Fassungen an beiden Enden hinlängliche Gewißheit; bei einer Gradmessung hingegen leisten metallene Maßstäbe mehr für den verlangten Grad der Annäherung. Delambre berichtet, daß ein Abstand von 6000 Tois. nach allen dazu erforderlichen Correctionen bis auf einen Fehler von nur 1 Zoll richtig bestimmt worden sey. Eine so außerordentliche Genauigkeit möchte sich aber wohl schwerlich verbürgen lassen, wenn man anders nicht aus Ambition vor möglichen Fehlern die Augen verschließt. — Fast gleich große Genauigkeit, versichert Benzenberg (Handb. d. angew. Geom., S. 440 fg.) bei Abmessung zweier Basen in der Rheinebene, zum Behuf der Bergischen Landesmessung erhalten zu haben, und zwar mit hölzernen Meßruthen.

Die viermahl wiederholte Messung der Bergheimer Basis gab im Mittel 26962 F. 5 Z. 3 Lin., die Extreme der Abweichungen waren 2 Z. und 6 Z., folglich bei der Annahme von 5 Z. der mögliche Fehler nur 1 Zoll. Indessen setzt Benzenberg selbst diesen Fehler auf einige Zoll und die Genauigkeit auf $\frac{1}{25000}$ des Ganzen. Er bemerkt hierbei ganz wahr, daß ein solcher Grad der Annäherung selbst bei Aufnahmen großer Länder völlig hinreiche.

Zu Grenzpunkten einer abzusteckenden und abzumessenden Basis erwählt man gern zwei fixe Richtobjecte, z. B. Thürme, Häuser oder dergl., oder bestimmt jene Punkte durch besondere in den Boden fest eingesetzte Grenzzeichen aus Stein, Metall u. s. w.

Das Abstecken (Alignement) der Basis zwischen ihren beiden durch natürliche oder künstliche Signale abgegrenzten Endpunkten erfordert die größte Vorsicht, und ein aufmerksames Visiren durch achromatische Fernröhre, wozu man gute Winkelmesser gebrauchen kann. Daß eine solche Opreation viel Zeit kostet, kann man sich leicht gedenken. Bei der Absteckung der Basis von Perpignan dauerte die Absteckung allein 7 Tage.

Noch mühsamer, zeit- und kostspieliger aber ist die möglichst genaue Ausmessung. Delambre erzählt in der Base du Syst. mètr., daß die Absteckung und Messung der Basis von Perpignan in Allem 51 Tage, die bei Melun aber 45 Tage dauerte. Vielerlei Nebengeschäfte, das Bezeichnen der Stellen, wo jeden Tag die Messung endet, das Einpacken und Auspacken der Maßstäbe u. s. w. verursachen zum Theil den großen Zeitaufwand. Die Cooperation mehrerer Personen, von denen immer einige Geometer seyn müssen, ist bei einer genauen Basismessung unentbehrlich. Zu der im Bergischen wurden nicht weniger als zwei Trigonometer und zwanzig Landmesser zugezogen, und so in

einem Tage bei günstiger Witterung gegen 6000 Fuß abgemessen. Mit weniger Personal, obwohl mit etwas mehr Zeitaufwand, kann man seinen Zweck auch erreichen.

Jede Basis für ein großes Dreiecknetz muß zur Versicherung zweimahl, vorwärts und rückwärts, gemessen werden. Statt dessen maß Tertor die Basen einmahl mit Meßruthen, ein zweites Mahl mit der Meßkette, und fand z. B. eine Basis 2052,60° mit der Kette, und 2052,37° mit den Meßruthen. Die Messung von 1000° erforderte mit Vorbereitungen gegen 8 Tage. Differiren beide Resultate nur um sehr wenig, einige Zoll, so nimmt man das arithmetische Mittel davon. Gröbere Abweichungen erwecken Verdacht, und machen eine neue sorgfältigere Messung nöthig. Bei der Gradmessung am Polarkreis wurde die Basis auf einem zugefrornen Fluß von zwei besondern Gesellschaften (Haufen) gemessen, und der Unterschied der beiden abgesonderten Messungen nur 4 Zoll auf eine Distanz von 7406 Tois. 5 Fuß befunden, welches hier um so mehr zu verwundern ist, da die Maßstäbe durch keine Setzwaage nivellirt, sondern bloß auf das Eis nach dem Augenmaß horizontal gelegt wurden.

Ich erinnere nochmahls, daß das Nivelliren der Maßstäbe, besonders auf etwas unebenem Terrain, nicht versäumt werden darf, vergl. §. 90. Wo man die Maßstäbe etwas schief zu legen genöthigt wird, bestimmt man ihre Inclination mittelst einer Setzwaage mit Gradbogen (§. 70.), und reducirt darnach die schiefgemeßne Länge auf die horizontale nach §. 135.

Nur selten kann man lange Basen durchaus in einer geraden Linie annehmen; muß man sie aus zwei geraden Linien a und b (Fig. 121.), die sich in C unter einem genau zu messenden Winkel α, vereinigen, zusammensetzen, so berechnet man die geradlinigte Distanz

der Formel: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos. \alpha}$.
wurde die Basis von Melun gefunden, wo a =
45 Tois., b = 2134 Tois., und der ∠ α =
3° 10′ 40″ war.

Ein anderer Fehler kann daher entstehen, daß man
m Legen der Maßstäbe nicht immer genau im abge-
kten Alignement bleibt, wodurch die gemeßne Basis
das zu lang wird. Diese Abweichung läßt sich nie
ig vermeiden, ist jedoch bei gehöriger Aufmerksamkeit
erzeit gering. Delambre nimmt an, daß dem-
näß von seinen Basen nur 0,005 Tois. abzuzie-
n sey.

Bei jeder größern Triangulirung müssen wenig-
ns zwei Basen auf entgegengesetzten Seiten (Gren-
n) des Dreiecknetzes mit gleicher Sorgfalt abgemessen
erden. Die zweite dient der ersten so wie der ganzen
lessung zur Prüfung. Sind die erste Basis und alle
Winkel des fortlaufenden Dreiecknetzes richtig gemessen
worden, so erhält man durch trigonometrischen Kalkul
uletzt auch die Länge der zweiten Basis. Stimmt nun
ie berechnete Basislänge mit der wirklich gemessenen
ganz oder bis auf eine Kleinigkeit zusammen, so giebt
dies einen für den Trigonometer höchst erfreulichen Be-
weis von der Richtigkeit der ganzen Operation. Hierbei
nehmen wir aber an, daß ehrlich verfahren und nicht
nachgeholfen werde, wie es wohl zuweilen geschehen
mag. — Bei der französischen Gradmessung wurde aus
der Basis von Melun durch Berechnung die von Per-
pignan abgeleitet und also = 6006,1983 Tois. ge-
funden, die wirkliche Messung gab dafür 6006,25
Tois., eine merkwürdige Uebereinstimmung, welche sich
nur aus der außerordentlichen geometrischen Schärfe er-
klären läßt, womit Delambre und Méchain hiebei
zu Werke gingen. Zu Mißtrauen in dieser Angabe ha-

ben wir kein Recht. Nach Benzenberg's Bericht (Handb. d. angew. Geom. p. 444) stimmten beide Basen, die Bergheimer und Mündelheimer, durch ein Netz von 20 Dreiecken mit einander verbunden, bis auf $1\frac{1}{2}$ Fuß überein.

Soll über ein großes weit ausgestrecktes Land ein Netz gelegt werden, und sind hierzu sehr viele Dreiecke erforderlich, so können auch wohl mehr als zwei directe gemessene Basen, in Hinsicht ihrer geographischen Lage gehörig orientirt, nöthig werden, damit die Fehler in den von einer Basis weit entfernten Dreiecken sich nicht allzusehr anhäufen, sondern die Aufnahme sich nach und nach an immer neue berichtigte Standpunkte und Standlinien anknüpft. So gebrauchte man bei der Triangulirung von Ost- und Westpreußen (Beschreibung der Verm. von Ost- und Westpreußen ꝛc., von Textor, Berlin 1810.) acht Hauptgrundlinien und außer diesen noch zwei kleinere Prüfungslinien von 479,54 und 749,89 Rheinl. Ruthen zu 11 zusammenhängenden Dreieckreihen; in jeder einzelnen Verbindung kamen 15 bis 111 Haupt- und Neben-Dreiecke vor. Die Harmonie zwischen den berechneten und gemessenen Distanzen fand sich aber hier nicht so groß, wie die oben angeführte. Textor setzt sie von $\frac{1}{130}$ bis $\frac{1}{1560}$ und im Durchschnitt für alle Entfernungen auf $\frac{1}{1000}$ des Ganzen. Vielleicht rührt dies von der etwas unvollkommenen Winkelmessung mit dem Astrolabium, später mit dem Sextanten her, zum Theil auch wohl von übler Gestaltung der Dreiecke und von Terrainhindernissen, besonders großen Waldungen, welche oftmahls die Absicht besserer Dreieckverbindungen vereitelten.

Historisch will ich noch erwähnen, daß auch eine indirecte Bestimmung sehr langer Basen aus astronomischen Beobachtungen und demnach aus der Größe des terrestrischen Bogens zwischen zwei fixen Punkten auf

der Erde in Vorschlag gebracht worden ist, nehmlich von Freih. v. Zach. S. dessen Schrift: Nachrichten von der Aufnahme von Thüringen und dem Eichsfelde, Gotha 1806. Wer sieht aber nicht auf den ersten Anblick, wie unsicher und beinahe chimärisch eine solche Basismessung seyn muß, wenn man auch die Breiten und Längen zweier Oerter bis auf 1" genau gefunden hätte. Es würden hierbei die Größen der Bogenlängen von Breiten- und Längen-Graden nach irgend einem Maßstab (Toisen etc.) als zuverläßig bekannt anzunehmen seyn. Dies sind sie nicht in dem Maße, wie es eine Basismessung erheischt, und werden vielmehr selbst erst durch letztere und eine Triangulirung annähernd bekannt. Indessen glaubt v. Zach selbst nicht an die Untrüglichkeit der von ihm vorgeschlagenen theoretischen Methode.

§. 168.

Winkelmessung.

Man muß dieselbe nur bei heller günstiger Witterung anstellen. Trübe dicke Luft, Nebel, Heerrauch machen die Bilder entfernter Richtobjecte und Signale undeutlich oder wohl ganz unsichtbar. Man setzt lieber die Messung aus, ehe man unter so ungünstigen Umständen unsicher visirt und fehlerhafte Winkel bekommt.

Das Aufsuchen der natürlichen oder künstlichen Signale hat bisweilen große Schwierigkeit, wenn dieselben matt erscheinen, oder nur wenig über andere Objecte, z. B. Thurmspitzen über Waldungen, hervorragen, oder wenn sie dunklen Hintergrund haben. Das Aufsuchen ihrer Stellen erleichtert vorläufig ein achromatisches Taschenfernrohr mit großem Sehefeld, wor-

auf man das Fernrohr des Winkelmessers schneller gegen das weitentfernte Signal einrichtet.

Zur Versicherung muß man in den großen Dreiecken des Hauptnetzes durchgängig alle drei Winkel messen, aber sich nie erlauben, aus zwei gemessenen den dritten durch Abzug von 180° abzuleiten. Nur bei den kleinern Dreiecken — Triangelnetzen der zweiten Ordnung — darf man sich diese Bequemlichkeit und Müheersparung gestatten, weil kleine Fehler, die hierbei etwa vorfallen, auf das Ganze keinen bedeutenden Einfluß mehr haben.

Findet man bei der Summirung der drei wirklich observirten Winkel eines großen Dreiecks eine geringe Abweichung von 180°, einige Sekunden darüber oder darunter, so corrigirt man jeden der Winkel mit dem dritten Theil der bemerkten Differenz. Ist einer der Winkel unter ungünstigen Umständen, z. B. Undeutlichkeit im Visiren auf das Centrum des entfernten Signals, beobachtet worden, so theilt man diesem, als dem wahrscheinlich fehlerhaftesten den größten Theil der Correction zu.

Eine zweite sehr brauchbare Prüfung der Winkel geschieht so, daß man von einem Standort aus alle Winkel rund herum im Horizont mißt, und ihre Summe gegen 360° vergleicht. Beträgt die Differenz gegen 1 Minute, so liegt die Schuld davon, wenn sonst der Winkelmesser gut ist, an fehlerhafter Beobachtung, in manchen Fällen am falschen Centriren der Winkel, oder an unrichtiger Reduction derselben auf den Horizont, wenn man mit einem Sextant oder mit einem Bordaschen Kreis mißt, und hier die Elemente der Correction, nehmlich die Vertikalwinkel, gewöhnlich Depressionswinkel, nicht genau genug bestimmt. Die Messung muß in solchen Fällen wiederholt werden.

Die Differenz der drei Winkel eines großen Drei-

ecks von 180°, nehmlich der Ueberschuß in Sekunden, kann zum Theil auch von der Kugelgestalt (Krümmung) der Erde herrühren. Hat nehmlich das terrestrische Dreieck sehr lange Seiten, so müssen die drei gemessenen Horizontalwinkel als solche eines kleinen sphärischen Dreiecks zusammen ein wenig größer seyn, als die Summe der drei correspondirenden Sehnenwinkel = 180°; s. §. 26. Man müßte daher ein solches Dreieck eigentlich als ein sphärisches berechnen. Allein auch sehr große Dreiecke auf der Erde weichen von ebenen Dreiecken so wenig ab, ihre Seiten als Bogen sind so nahe gleich den zugehörigen Sehnen, daß man solche auch bei Dreiecknetzen der ersten Ordnung überall als ebene Dreiecke behandeln und berechnen darf. Die Fehler, welche man damit begeht, werden von andern nicht ganz zu vermeidenden Fehlern der Messung weit überwogen, und können durch diese bald positiv bald negativ ganz oder theilweise aufgehoben werden. Wenn auch ein terrestrisches Dreieck einen Flächenraum von 4 bis 8 Quadratmeilen enthält, so beträgt der sphärische Ueberschuß seiner drei Winkel wegen der Erdkrümmung nur gegen 1 bis 2 Sekunden, bei 10 Quadratmeilen gegen 3″. Wie man diesen sphärischen Ueberschuß aus dem auch nur annähernd bekannten Flächenraum des terrestrischen Dreiecks berechnen könne, lehrt die früher im §. 44. 2te Abth. aufgestellte Formel:

$$F = (A + B + C - 180^0) \cdot R, \text{ folglich}$$

$$A + B + C - 180^0 = \frac{F}{R} \text{ u. s. w.}$$

Die subtractive Correction vertheilt man unter die drei gemessenen Winkel in gleichen Theilen, um so ein ebnes geschloßnes Dreieck zu erhalten. Nur selten, nehmlich bei Gradmessungen, möchte es Noth thun, aus den drei gemessenen Horizontalwinkeln, welche als Tan-

gentenwinkel der Bogen zu einem sphärischen Dreieck gehören, oder aus andern datis die correspondirenden Sehnenwinkel zu berechnen; vergl. §. 48 — §. 51. 2te Abtheil.

Man versäume nie, jeden Winkel in den Hauptdreiecken wiederholentlich wenigstens zweimahl zu messen, selbst wenn man repetirende Kreise hierzu anwendet, die an sich schon große Genauigkeit gewähren. Mit unvollkommenen Winkelmessern, z. B. dem Sextanten, wird diese Wiederholung noch weit nothwendiger. Am besten ist es, wenn zwei Beobachter einen und denselben Winkel besonders messen, und ihre Resultate gegen einander vergleichen. Ergeben sich aus mehreren Beobachtungen geringe Differenzen von einigen Sekunden (bei repetirenden Kreisen, Theodoliten ꝛc. immer weniger), so nimmt man bekanntlich das arithmetische Mittel aus den abweichenden Angaben.

Sehr stumpfe und spitze Winkel (unter 30°) müssen, wenn man solche wie gewöhnlich nicht ganz vermeiden kann, besonders sorgfältig observirt werden, weil kleine Fehler in solchen einen weit nachtheiligern Einfluß auf die daraus berechneten Seiten der großen Dreiecke haben, als gleich große Fehler in Winkeln von nahe 60°.

Außer den Hauptwinkeln mißt man an jedem Standort gern noch mehrere andere, um bei dem trigonometrischen Kalkul des Netzes die Lage eines Punktes oder einer Seite zur Versicherung aus verschiedenen datis, aus mehreren Standpunkten und Dreiecken bestimmen zu können. Daher werden heut zu Tage bei jeder großen und wichtigen Triangulirung eines Landes immer viel mehr Winkel gemessen, und Dreiecke berechnet, als scheinbar zum Triangelnetz nöthig sind. Diese Prüfungsmittel der Richtigkeit wurden bei den ältern Länderaufnahmen gewöhnlich versäumt.

Wo es sich möglich machen läßt, wie bei künstli-
Signalpyramiden ꝛc., beobachtet man die Sehe-
kel aus ihrem wahren Centrum, auf welches die
irlinien von andern Standorten aus gerichtet wer-
. In dringenden Fällen, z. B. wenn man auf ei-
n Thurm beobachtet oder seinen Stand seitwärts des
urmes nimmt, mißt man so genau als möglich die
Centrirung der Winkel erforderlichen data, und
ucirt damit den gemessenen excentrischen Winkel auf
wahren gesuchten; siehe §. 102. Fig. 64. — 68.

Man thut wohl, bei dieser Operation sich so nahe
möglich an den Mittelpunkt, Achse, des Standor-
zu halten, weil hierdurch die Correction erleichtert
d geringer wird. In der Ausübung, bei Winkel-
ssungen auf Thürmen, hält es oft schwer, die Ele-
nte zu dieser Correction hinlänglich genau abzumes-
n; man muß sich dann mit Annäherungen begnügen.
ie ganze Correction beträgt übrigens immer nur we-
g, wenn die Richtobjecte, nach welchen man visirt,
hr weit, einige Meilen, entfernt vom Standort lie-
n. Ein Weiteres über das Centriren der Winkel er-
rnt man am besten durch eigne Praxis.

Werden die terrestrischen Winkel mit einem Bor-
aschen Kreis, wie bei der französischen Gradmessung,
der mit einem Sextant gemessen, so ist auch die Be-
bachtung von Vertikalwinkeln, besonders wenn solche
twas beträchtlich sind, unumgänglich nöthig, um die
chiefgemeßnen Winkel auf den Horizont zu reduciren.
Ein guter Theodolit mit Repetition erspart diese eben
nicht kleine Mühe, und gewährt dieselbe Genauigkeit
u. s. w.

§. 169.

Einfluß der ſchiefen Anſicht und Beleuchtung (Phaſen) der Signale auf die gemeſſenen Winkel. (Fig. 122.)

Ein andrer, jedoch meiſtens ganz geringer, zu verhütender Fehler in den gemeſſenen Winkeln daraus entſtehen, daß man von einem Standort C nicht genau auf das Centrum A eines entfernten Signals hinviſirt, ſondern nach einem andern ſcheinbaren Mittelpunkt deſſelben M oder N, nehmlich nach einer Richtung CM oder CN, welche nicht durch die Axe des Signals läuft. Dann wird, wenn B ein zweiter Richtpunkt, der wahre Sehewinkel A C B entweder um den Abweichungswinkel A C M zu klein oder aber um den linksliegenden A C N zu groß gefunden.

Dieſer Fehler findet entweder gar nicht oder nur in höchſt unbedeutendem Maße Statt, wenn man auf die Spitzen von Thürmen oder pyramidenförmigen Signalen hinviſirt, und dieſe Spitzen nicht ſchief, ſondern ganz oder ſehr nahe in der Achſe der Signale ſtehen.

Haben hingegen die Signale oder Thürme keine Spitzen, ſo muß man auf die Mitte breiter Flächen, ſo weit ſie dem Auge des entfernten Beobachters beleuchtet erſcheinen, hinviſiren. Aber eben hier kann wegen eines ſchiefen Standes oder wegen einer nur partiellen Beleuchtung des Richtobjectes ein Fehler im Pointiren auf ſeine wahre Achſe (Mittelpunkt) Statt finden.

Wir wollen uns dieſen Fall an einem einfachen Beiſpiele deutlich machen. Geſetzt, der Thurm oder das Signal hätten eine parallelipediſche Form (Fig. 122.), die Seitenflächen D E, E F ſtänden ſchief gegen den Standort C, eine dieſer Seiten D E wäre beleuch-

die zweite EF im Schatten, also ganz oder bei-
: unsichtbar, so würde man beim Visiren auf die
te der sichtbaren Fläche DE, nehmlich auf N den
)ren Winkel ACB um den Abweichungswinkel
: N zu groß erhalten. Um uun den falsch gemesse-
Winkel NCB zu corrigiren, müßte man im Stan-
seyn, jenen Abweichungswinkel ACN aus direct
ıessenen oder anderweitig bekannten datis abzuleiten.
.r wollen daher setzen, die Senkrechte AN und der
chtungswinkel ANC = α wären durch eine directe
:ssung, die Weite AC aber durch die Aufnahme
riangulirung) annähernd bekannt, so hätte man:

$$AC : AN = \sin.\ \alpha : \sin.\ ACN, \text{ also}$$

$$\text{Sin. } ACN = \frac{AN \,.\, \sin.\ \alpha}{AC} \text{ (oder für kleine Bogen und Winkel)}$$

$$\text{W. } ACN \text{ in Sek.} = \frac{AN \,.\, \sin.\ \alpha}{AC \,.\, \sin.\ 1''}$$

Begreiflich muß dieser Winkel um so kleiner wer-
en, je größer AC gegen AN ist. Bei einer großen
Triangulirung, wo AC eine oder einige Meilen lang
st und AN nur einige Fuß, wird jene Correction so
gering, daß sie außer Acht gelassen werden darf.

Beispiel in Zahlen: Es sey $\angle \alpha = 169,0581$,
$AC = 36000$ F., $AN = 5$ F., so wird:

$$\angle ACN \text{ in Sek.} = \frac{5 \,.\, \sin.\ 10^0\ 2'}{36000 \,.\, \sin.\ 1''}, \text{ daher}$$

$$= 4,99''.$$

Wäre im Gegentheil die Fläche EF beleuchtet und
für den Beobachter in C sichtbar, die zweite DE nicht,
so würde beim Visiren nach der Mitte N der Abwei-

chungswinkel ACM und die Correction des falschen Winkels pósitiv. ACM müßte wie ACN bestimmt werden.

Es ist aber mit solcherlei Bestimmungen, so wahr sie in der Theorie, in der Praxis immer eine sehr mißliche unsichere Sache, da die data zur Berechnung der Correction gewöhnlich nicht genau genug gefunden werden können, wie in unserm Falle die Senkrechte AN und der ∠ ANC oder statt dessen auch der ∠ NAC. Die Schwierigkeit wächst, wenn die Form des Signals weniger einfach, z. B. die eines Octogons oder gar irregulär ist, und von N gegen A hin nicht gemessen werden kann. Geringer wird der Fehler, doch nie ganz zu vermeiden, wenn CN nahe senkrecht auf die Seite DE eines regulären Polygons trifft. Beim Visiren kann man selbst den Mittelpunkt N einer Seitenfläche DE um ein wenig verfehlen.

Kann man beide Flächen DE und EF bei verschiedener oder gleicher Beleuchtung in C sehen, so visire man entweder nach der Mitte der Durchschnittsfläche DF, oder man messe einmahl den ∠ NCB, sodann den ∠ MCB, und nehme von beiden das arithmetische Mittel. Hierdurch wird man in allen Fällen der Wahrheit nahe genug kommen.

Es ließe sich hierüber theoretisch noch viel sagen, es hat aber für die wirkliche Praxis keinen Werth. Denn was man auch thun, wie genau man auch beim Reduciren der Winkel auf das Centrum der entfernten Signale vorgehen mag, Fehler von einigen Sekunden wird man nie vermeiden. Dafür sprechen vielfältige Erfahrungen der größten practischen Geometer. Wenn man nehmlich einen Winkel mehrere Mahle mißt, so finden sich immer kleine Abweichungen. Selbst bei Anwendung der réverbères (Nachtsignale), womit man den Irrthum wegen der Phasen der Signale zu ver-

mindern trachtete, fand der große Geometer Méchain bei wiederholten Messungen eines und desselben Winkels Differenzen von 4, 5, ja sogar bisweilen von 8 Sekunden. Es scheint daher kein Mittel vorhanden, den Fehlern, wovon hier die Rede ist, bei einer Triangulirung ganz auszuweichen. Der beste Rath in dieser Sache bleibt, daß man, wo es möglich wird, nach den Spitzen der Thürme und künstlichen Signale visirt, in den übrigen Fällen aber die Beobachtung eines Winkels vervielfältigt, und von mehreren etwas abweichenden Resultaten das arithmetische Mittel nimmt.

Selbst das Visiren auf Spitzen läßt die gemessenen Winkel noch um mehrere Sekunden bei einer einzigen Beobachtung ungewiß. Erstlich visirt man nicht immer ganz scharf auf eine weit entfernte oder schwach beleuchtete Spitze; ferner kann das Bild derselben wegen der eignen Bewegung der atmosphärischen Dünste eine oscillirende Bewegung machen, wodurch ihr wahrer Ort ein wenig unsicher wird. Endlich giebt es auch vielleicht bei gewissen Modifikationen der Atmosphäre außer der vertikalen eine laterale oder horizontale Refraction, Lichtbrechung zur Seite, wodurch die entfernten Richtpunkte für den Beobachter etwas von ihrer wahren Stelle seitwärts gerückt würden. Doch haben diesen letztern Umstand directe Beobachtungen noch nicht hinlänglich erwiesen. Aber so viel ist gewiß, daß oftmahls die Gestalten entfernter Signale auffallend entstellt, Thurmspitzen gekrümmt oder schiefstehend erscheinen, besonders bei neblichter Witterung, bei welcher man daher eine genaue Winkelmessung aussetzen sollte. Auch hier führt ein wiederholtes Winkelmessen und ein mittleres Resultat aus allen am nächsten zur Wahrheit.

§. 170.

Beispiel einer großen Triangulirung (Fig. 123.)

Es mag Fig. 123. ein Stück von einem ganzen über ein ganzes Land gelegten Dreiecknetz vorstellen. AB eine directe abgemessene Basis desselben, DE eine zweite Basis, welche der von AB ausgehenden Rechnung zur Versicherung und Berichtigung dient, insonders aber auch dazu, um an dieselbe bei einer weiter ausgedehnten Triangulirung die entferntern Dreiecksreihen von neuem anzuknüpfen. Fehler sind bei einer solchen Operation auch mit der größten Vorsicht und mit den vorzüglichsten Winkelmessern nie ganz zu vermeiden. So begreift man die Nothwendigkeit, wenigstens zwei bisweilen auch noch mehr gemessene Basen in einem jeden sich weit erstreckenden Dreiecknetz nach verschiedenen Seiten hin zu Grunde zu legen. Innerhalb des großen Dreiecks CDK habe ich ein kleineres Dreiecknetz der zweiten Ordnung angedeutet durch die Punkte U, V, T.

Es ist nicht durchaus erforderlich, die Basis AB so wie die übrigen später folgenden gleich im Anfange der Triangulirung auszumessen. Man kann solche auch, nachdem an den Winkelspitzen F, D, C ꝛc. der grossen durch natürliche oder künstliche Signale gebildeten Dreiecke vorläufig alle Winkel gemessen und in ein Journal eingetragen worden, in einer schicklichen Lage gegen nahe Dreieckpunkte auswählen, messen, und die Winkel observiren, unter welchen jene Basen gegen einen oder den andern Richtpunkt stehen.

Dadurch werden die gemessenen Basen mit dem ganzen Netz in eine solche Verbindung gesetzt, daß sich aus ihren Längen und aus den an allen Eckpunkten beobachteten Winkeln die Lagen und Entfernungen al-

chtobjecte nach Sätzen der ebenen Trigonometrie
ssive berechnen lassen.

In jedem Standort werden die Sehewinkel nach
liegenden deutlich wahrnehmbaren Richtobjecten
alen) mehrere Mahle gemessen. Was bei einer
Messung zu beobachten sey in Hinsicht der Re=
n der Winkel auf den Horizont, auf das Centrum
tation, auf die Achse der entfernten Signale, so
Hinsicht der übrigen Correctionen, dies habe ich
orhergehenden angezeigt. Man kann bei dieser
ition, da sie so oft wiederholt werden muß, da
ie hierbei begangenen Fehler in einer langen Reihe
Dreiecken allmählig bedeutend anhäufen und das
cknetz verschieben können, nicht leicht zu große Vor=
Aufmerksamkeit und Geduld anwenden. Bei einer
ühsamen, oft einige Jahre lang fortgesetzten, Opera=
ist, außer Geschicklichkeit im Beobachten, Geduld
unermüdliche Ausdauer gewiß eine Hauptforderung
inen dirigirenden und selbst arbeitenden Triangu=

An manchen Standorten, z. B. bei A, B, D ꝛc.,
achtet man gleich nach einander mehrere Sehewinkel
im Horizont herum, vergleicht ihre Summe mit
°, und corrigirt darnach, im Fall eine geringe Ab=
hung Statt findet, jeden der einzelnen Winkel.

Eine andre Prüfung der richtigen Winkelmessung
de darin bestehen, daß man die Summe der Win=
eines von Dreiecken gebildeten Polygons, z. B. des
beneckes A B F E D K C, dessen Winkel zusammen
. 7 — 4) R. = 900° betragen müssen, mit der
mme der wirklich gemessenen Winkel C A B + A B C
D B F ꝛc., aus welchen die Polygonwinkel zusam=
ngesetzt sind, vergliche. Ein geringer Ueberschuß über
0° muß sich hier immer ergeben, wenn sonst richtig
nessen worden, weil jedes einzelne Dreieck eigentlich
sphärisches, und demnach die Summe seiner drei

Winkel etwas größer als 180° ist. Doch wird jener Ueberschuß über 900°, wenn auch die Seiten der Dreiecke einige Meilen lang, immer nur sehr wenig betragen. Der Fehler, welchen man beim Observiren der Winkel selbst begehen kann, ist viel beträchtlicher als jene Abweichung wegen des sphärischen Ueberschusses.

Bei Eintragung der Winkel in ein Tagebuch (Manual, Journal) muß man streng eine gewisse Ordnung befolgen, für jeden Winkel die Namen des Standortes und der Richtobjecte, ingleichen die Umstände bemerken, unter welchen er beobachtet worden, so wie die Elemente zur Correction wegen der Excentricität u. s. w. Befolgt man diese Ordnung nicht, so sind späterhin bei Berechnung des Dreiecknetzes Verwirrungen und Fehler nicht zu vermeiden.

Ein solches Tagebuch zur Eintragung der observirten Winkel an Ort und Stelle läßt sich verschiedentlich einrichten. Am besten wird es seyn, wenn man nach einander für jeden Standort mit Benennung der Stationen alle Winkel in der Folge aufzeichnet, wie sie rund herum im Horizont gemessen worden. Aus diesem ersten Tagebuch läßt sich sodann ein zweites reineres und revidirtes Manual ausziehen, in welchem für jedes große Dreieck die drei dazu gehörigen Winkel mit den nöthigen Bemerkungen notirt werden. Nach diesem reinen Manual, welches aus Vorsicht noch ein zweitesmahl abgeschrieben werden kann, wird sodann, oft erst längere Zeit nach der schon ganz oder theilweise beendigten Triangulirung (Winkel- und Basismessung) der trigonometrische Kalkul vorgenommen. Ein kleines Schema mag dem noch nicht davon unterrichteten Leser einen Begriff davon geben, wie man im Manual die Winkel der Hauptdreiecke ungefähr anmerken kann. Doch gilt in dieser Angelegenheit keine bestimmte Vorschrift. Die Höhen- und Tiefenwinkel braucht man nicht, wenn man mit einem Theodolit mißt.

Für das Dreieck ABC mit Benennung [illegible]

Beobachtete Winkel.	Höhen- oder Tiefenwinkel.	Gemessene data zum Centriren.	Günstige oder ungünstige Umstände beim Visiren.	Corrigirte Winkel zur Berechnung.
ABC = 32° 14′ 59″ BAC = 108° 42′ 43″ ACB = 39° 2′ 23″ Summe = 180° 0′ 5″			Wegen Undeutlichkeit beim Visiren von B gegen C ist ABC unzuverläßiger als die beiden andern Winkel ꝛc.	ABC = 32° 14′ 56″ BAC = 108° 42′ 42″ ACB = 39° 2′ 22″ Summe = 180°.
Für das Dreieck BCD eben so:				
CBD = 50° 37′ 12″ BCD = 61° 19′ 22″ BDC = 68° 3′ 16″ Summe = 179° 59′ 50″			CBD unter ungünstigen Umständen, BCD zuverläßiger, BDC wegen schiefer Beleuchtung des Signals bei B weniger zuverläßig gewesen.	CBD = 50° 37′ 17″ BCD = 61° 19′ 23″ BDC = 68° 3′ 20″ Summe = 180°.

NB So werden ferner alle übrigen Winkel der Hauptdreiecke, in einer besondern Rubrik auch diejenigen, welche zu Nebendreiecken gehören, oder welche zur Bestimmung eines Punktes aus mehreren Standlinien dienen, ingleichen solche, welche zur Bestimmung eines vierten Standortes aus drei der Lage nach gegebenen gemessen worden, in das Manual notirt.

§. 171.

Trigonometrische Berechnung des Dreiecknetzes. (Fig. 123.)

Nachdem die Messung der terrestrischen Winkel und der Basen mit der erforderlichen Schärfe vollbracht worden, so folgt die Berechnung der Seiten des triangulirten Netzes nach Maßgabe der Manuale oder Meßregister.

Die Dreiecke werden als ebene (Sehnendreiecke), reducirt auf den Horizont der Basis AB oder DE, berechnet. Der sphärische Ueberschuß der terrestrischen Bogen über die Sehnen, horizontale Distanzen je zweier Richtobjecte, ist ganz unbedeutend, und wird von andern Fehlern der Messung weit überwogen. Es wäre daher meistens eine unnütze und dabei höchst mühsame weitläufige Arbeit, wenn man die großen Dreiecke als sphärische berechnen wollte.

Zum trigonometrischen Kalkul jedes Dreiecks werden größtentheils eine Seite und zwei Winkel gebraucht. Seltener berechnet man eine Seite aus zwei andern Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, z. B. CI aus AC, AI und ∠CAI. Noch seltener, nur in dringenden Fällen oder zur Vergleichung der auf verschiedene Weise erhaltenen Resultate bestimmt man die Lage eines oder zweier neuen Standörter gegen drei andere, nach §§. 120, 121, 122. So könnte man z. B. die Lage des Punktes E auf dem Netz einmahl dadurch erhalten, daß man das Dreieck DFE aus DF und den 3 Winkeln berechnete, ein zweites Mahl zur Vergleichung dadurch, daß man aus den bei E beobachteten Winkeln DEB und FEB ꝛc. die Seiten ED, EF, EB nach §. 120. ableitete. Bisweilen kann diese letztere Methode sogar nothwendig

werden; z. B. K kann ein neuer gegen das △BCD in Grund zu legender Standort seyn, den man von frühern Standörtern C, D nicht beobachten konnte.

Man bedient sich zur Berechnung der bessern Logarithmentafeln, z. B. von Vega, Callet ꝛc., mit 7 Decimalstellen, womit man überall ausreicht. Die Rechnung nach Tafeln mit 10 Decimalstellen, z. B. nach dem Thesaurus log. von Vega, wäre eine unnütze und dabei höchst langweilige verdrießliche Arbeit; die Aufmerksamkeit und Geduld wird bei dem Gebrauch der Proportionaltheile, zweiten und dritten Differenzen, ermüdet und zerstreut; man ist also in Gefahr, noch größere Fehler zu begehen, als wenn man mit 7 Decimalstellen rechnet.

Der trigonometrische Kalkul geht von einer gemessenen Basis AB aus, von dieser auf eine zweite Seite BC, als Grundlinie eines folgenden Dreiecks BCD u. s. w., bis er auf eine zweite directe gemessene Basis DE kommt. Stimmt die berechnete Länge DE mit der wirklich gemessenen ganz oder doch bis auf eine unbedeutende Kleinigkeit nahe zusammen, so erhält man hiermit einen erfreulichen Beweis von der Richtigkeit der Triangulirung und der Berechnung. Im Gegentheil kann der Fehler von jener oder von dieser herrühren. Der Fehler vom Kalkul kann immer vermieden und vertilgt werden, wenn er von geschickten Rechnern mehrere Mahle wiederholt wird. Bei sehr wichtigen Arbeiten der Art, welche man neuen Landcharten zu Grunde legt, ist es unumgänglich nöthig, daß jene Berechnung mehrere Mahle wiederholt, und wenigstens von zwei verschiedenen Rechnern geführt wird, die sich nicht mit einander verständigen, und ihre Resultate einander wechselseitig nicht mittheilen können. Sind zwei Basen AB, DE, die aber in der Wirklichkeit weiter von einander abstehen, oder durch eine größere Triangelreihe

(von 20 — 40 Dreiecken) von einander getrennt sind, als in unsrer Figur 123. angedeutet werden konnte, mit gleicher Genauigkeit abgemessen worden, so thut man wohl, wenn man den trigonometrischen Kalkul einmahl von AB aus bis gegen DE als Prüfungsbasis, ein zweites Mahl aber umgekehrt von DE gegen AB als Prüfungsbasis fortführt. Beiderlei Resultate müssen eigentlich harmoniren; wofern sich aber für die Maße der Dreiecksseiten sehr geringe Abweichungen ergeben, so kann man auch hier die arithmetischen Mittel gebrauchen. Mit der Correction des ganzen Netzes durch Abänderung der Winkel — um Sekunden oder Theile einer Sekunde — sieht es mißlicher aus, wenn man jene Winkel selbst unmittelbar nicht von neuem messen kann. Was sonst noch hierbei bemerkt werden könnte, versteht sich fast von selbst.

Gewöhnlich geht man bei einem Dreiecknetz der ersten Ordnung von einer kleinern Basis AB oder DE auf größere Dreiecksseiten fort, weil mehrere meilenlange Basen mit der erforderlichen Schärfe auszumessen an sich sehr schwierig und der Terrainhindernisse wegen insgemein ganz unmöglich ist. Eine solche Basis AB sey nun durch eine sorgfältige Messung mit etalonnirten Maßstäben = 26000 Rheinl. Dec. Fuß gefunden; daraus, und aus den drei gemessenen Winkeln des Dreiecks ABC, wird die größere Grundlinie BC des Dreiecks BCD ganz einfach nach §. 14. I. Abth. berechnet.

Nach dem Messungsregister ist:

$$AB = 26000 \text{ F.}, \quad \angle BAC = 108^\circ\, 42'\, 42''$$
$$\angle ACB = 39^\circ\, 2'\, 22''.$$

Daher $BC : 26000 = \sin. 108^\circ 42' 42'' : \sin. 39^\circ 2' 22''$.

So findet man logarithmisch berechnet $BC = 39097{,}5$ F.

Hätte man den Winkel ACB um 5″ falsch observirt, nehmlich $= 39^\circ\, 2'\, 17''$ gefunden, so würde man $BC = 39098{,}7$ F. erhalten.

ser Fehler von 1,1 F. kann aber dadurch vermindert r auch ganz getilgt werden, daß auch der Winkel A C um einige Sekunden zu groß gefunden. Ueber= ıpt werden sich in einem Dreiecknetz die Fehler in ı Winkeln bald auf die eine bald auf die andre Art jenseitig vermindern oder ganz aufheben.

Da nach der Berechnung $BC = 39097,5$ F.

nach der Messung $\angle BDC = 68^\circ\ 3'\ 20''$.

= = = $\angle BCD = 61^\circ\ 19'\ 23''$,

so findet man ferner $BD = 36981,2$ F.

an kann bei dieser Berechnung, wo es der Zweck der ıfnahme verlangt, die Seitenzahlen noch genauer, in ıserm Beispiel bis auf Hunderttheilchen eines Fußes, langen. Größere Zahlen als 7stellige, höchstens 8stel= ge, lassen sich aber durch Logarithmen mit 7stelligen dantissen nicht berechnen.

Größtentheils in der bemerkten Weise geht der igonometrische Kalkul des Netzes nach verschiedenen eiten der Basis A B weiter, bis man auf neue Ba= n kommt, die wirklich gemessen worden. Die bekann= n Längen derselben legt man sodann der Berechnung eiter hin folgender Dreieckreihen zu Grunde.

Daß ein solcher Kalkul, wenn sich keine Fehler inschleichen sollen, ungemein viel Zeit, Aufmerksamkeit nd Geduld erfordere, folgt aus der Natur der Sache. Die Arbeit kann unter mehrere geübte Rechner vertheilt verden, wovon jeder eine der Triangelreihen erhält, die ıach verschiedenen Seiten der Basen A B, D E fortlau= en. Nachdem jeder seine Section berechnet hat, kann ine wiederholte Berechnung mit Verwechselung (Um= tauschung) der Sectionen beginnen. Es lassen sich hier mannigfaltige Anordnungen von Seiten des dirigiren= den Chefs gedenken; aber immer müssen sich diese dazu eignen, daß die verschiedenen Kalkuls einer und dersel=

ben Section des Netzes einander zur strengsten Prüfung und Controle dienen.

§. 172.

Orientirung eines großen Dreiecknetzes und Auftragung desselben auf eine Charte. (Fig. 123.)

Um das trigonometrische Netz nach den Maßen der berechneten Seiten auf Papier zu entwerfen, oder wie man auch zu sagen pflegt, einen Aufriß davon zu machen, welcher in kleinere Sectionen getheilt weiterhin den Dreiecknetzen der zweiten Ordnung und den speciellern Aufnahmen zum Fundament, zur Leitung und Prüfung dient, ist es nicht rathsam, dies in der bekannten Art durch Construction kleiner Dreiecke, nach den Maßen der berechneten Seiten verjüngt, auszuführen Die Fehler, welche bei der Auftragung eines Dreiecks oder mehrerer begangen werden, und nicht ganz zu vermeiden sind, theilen sich allen übrigen Dreiecken mit, und bringen daher alle Punkte des Netzes in eine mehr oder weniger falsche Lage, oder mit andern Worten, sie verschieben das ganze Netz.

Sichrer bestimmt man die gegenseitigen Lagen aller Dreieckpunkte durch Abscissen und senkrechte Ordinaten in Beziehung auf den Meridian irgend eines Hauptpunktes, dessen geographische Breite und Länge anderweitig bekannt ist. Die Sache verhält sich also:

Es sey (Fig. 123.) SN die durch einen Hauptort des Netzes, z. B. durch eine Sternwarte laufende und durch besondere Merkmahle bestimmte Mittagslinie (Meridian); Bb, Ff, Ii, Gg, Cc u. s. w. Perpendikularen auf dieselbe. Kann man diese Perpendikula-

'n und die zugehörigen Abscissen A b, A f, A i u. s. w. us den bekannten Winkeln und Seiten des Netzes zu- erläßig berechnen, so erhält man damit die Lage jedes)unktes B, F ic. gegen den Meridian S N, als den ersten auf der Charte betrachtet, nehmlich die östlichen der westlichen Längenunterschiede, so wie die nördlichen der südlichen Breitenunterschiede in Beziehung auf den eographisch bestimmten Hauptort A, nach irgend einem ängenmaße, als: Ruthen, Fußen, Toisen oder dergl.

Macht man ferner auf dem Papier, nachdem durch A der Meridian S N gezogen worden, A b = dem be- echneten Breitenunterschied, b B = dem berechneten ängenunterschied, so wird dadurch die Lage des Punk- es B gegen A fixirt; eben so die Lage des Punktes F urch die Abscisse (Breite) A f und durch die Perpendi- ulare (Länge) f F u. s. w.

Auf solche Weise trägt man jeden Punkt für sich, nach dem angenommenen Maßstab, auf das Papier. Da keiner vom andern abhängt, keiner zur Auftragung ei- nes andern dient, wie bei der Construction durch ver- jüngte Dreiecke, so kann ein Fehler, der irgendwo viel- leicht begangen worden, keinen nachtheiligen Einfluß auf die Lage anderer Punkte haben, sondern er besteht für sich allein.

Indessen verlangt auch diese Methode, die Punkte aufzutragen, die größte Sorgfalt und einige mechanische Kunstgriffe, so wie vorzüglich genaue Werkzeuge, als: fein eingetheilte Maßstäbe, gute Stangenzirkel mit Mi- krometerschraube, rechte Winkel von Metall, lange und richtige Lineale aus Stahl u. s. w. Es ist hier um so größere Behutsamkeit im Abstecken der Punkte nöthig, als eben damit die richtige Orientirung des Dreieck- netzes und die geographische Graduation der Längen und Breiten auf einer Landcharte bewirkt werden soll.

Für diese Bestimmung durch Perpendikularen giebt

es eine sehr sichre und leichte Controle. Nachdem man nehmlich alle Punkte B, F, C ꝛc. also abgesteckt, so untersucht man, ob auch ihre gegenseitigen Entfernungen A B, F B, A C u. s. w. mit den Maßen der trigonometrisch berechneten Dreiecksseiten harmoniren. Findet sich irgendwo eine Abweichung, so kann man der Ursache des Fehlers sogleich an ihrer wahren Stelle nachforschen, und demselben mehrentheils genüglich abhelfen.

Nachdem der erste Kalkul des Dreiecknetzes mit aller Schärfe durchgeführt worden, so läßt sich darauf der zweite, allerdings auch weitläufige und mühvolle, Kalkul der Abscissen und senkrechten Ordinaten folgendermaßen bauen.

Zuerst findet man die Richtung (Lage) der durch den Hauptort A gehenden Mittagslinie (Meridian) S N. Wie dies geschehe, will ich im folgenden Paragraph erklären. Hierauf mißt man, so genau als es mit einem repetirenden Kreise möglich wird, den Winkel B A N, unter welchem B gegen A und dessen Meridian liegt. Der Winkel B A N heißt insgemein der Azimuthalwinkel oder das Azimuth des Ortes B in Beziehung auf A und A N. Als Horizontal- oder Tangentenwinkel ist B A N eigentlich ein sphärischer von zwei Bogen größter Kreise gebildet, welche man sich durch A N und A B um die Erdkugel herum gelegt denken kann. Er ist daher etwas größer als der correspondirende Sehnenwinkel b A B; jedoch ist der Unterschied beider ganz unbedeutend, wenn die Distanz A B nur eine oder einige Meilen beträgt. Eben so darf man die Sehnenweiten A B, A b, b B ihren Bogenlängen ohne merklichen Irrthum gleich setzen, und das rechtwinklichte Dreieck A B b, so wie die weiterhin folgenden Dreiecke derselben Art als ebene behandeln. Wo es indessen nöthig ist, kann man auch ein solches Dreieck, z. B. A B b, als ein rechtliches sphärisches (nach §. 36.

I. Abth.) berechnen, nachdem man das bekannte Längenmaß A B in Bogengradmaß verwandelt hat.

Ist einmahl der Azimuthalwinkel B A N richtig bestimmt, so geht die Berechnung der Abscissen und Ordinaten bloß vermittelst rechtwinklichter Dreiecke also weiter:

1) Im △ A B b ist die Hypotenuse A B und der anliegende spitze Winkel bekannt. Demnach wird

   A B : b B = sin. tot. : sin. B A b und

   A B : A b = sin. tot. : cos. B A b.

   So findet man A b und b B. Wäre z. B. der Winkel B A b = 74° 58′ 43″, A B = 26000 Fuß, so erhielte man

   b B = 25111,55 F., A b = 6738,67 F.

2) Der Azimuthalwinkel C A c ist = ∠ B A C — B A b; demnach läßt sich, wie vorher das rechtwinklichte Dreieck A C c, dessen Hypotenuse A C man aus der Berechnung des Netzes kennt, berechnen, folglich auch die Abscisse A c und die Perpendikulare C c, welche nun unabhängig von A b und b B auf den Meridian S N abgesetzt werden. Hierdurch ist die Lage des Punktes C gegen A bestimmt.

3) Der Winkel G A g ist = 180° — (B A b + B A G); daraus und aus der Seite A G berechnet man A g und g G. Eben so findet man A i, i I, A h, h H.

4) Durch B denke man sich einen zweiten Meridian B R, welcher bei mäßiger Entfernung B b als parallel zu S N betrachtet werden darf. Dann ist ∠ A B R = 180° — ∠ B A b, also ∠ D B R = ∠ A B R — (∠ A B C + ∠ C B D). Aus dem Azimuthalwinkel D B R und der berechneten

Dreiecksseite BD leitet man wie oben die Catheten BR und DR ab. Dann wird, wie man sogleich begreift, Ad = Ab + BR und dD = bB — DR.

5) Aus ∠QBF = ∠DBF — ∠DBR und aus BF berechnet man ferner das rechtwinklichte Dreieck BQF, nehmlich BQ und QF. So erlangt man Af = Ab + BQ, fF = bB + QF und somit die geographische Lage des Punktes F gegen A.

6) Es sey ferner FX # BR # SN, so ist ∠BFX = 180° — ∠QBF und ∠EFX = ∠BFX — (∠BFD + ∠DFE). Daraus und aus der Hypotenuse FE findet man FX und EX, woraus sich Ae = Af + FX und eE = fF — EX ergiebt.

So geht der Kalkul für alle andern Abscissen und Ordinaten weiter. Es versteht sich übrigens von selbst, daß man die berechneten Abstände sehr genau in ein eigenes Manual eintragen muß, um darnach den Entwurf auszuführen. Man wird die Lagen der Punkte gegen A am besten durch die Ausdrücke Nördliche Breite (N. B.), südl. Breite (S. B.), östl. Länge (O. L.), westl. Länge (W. L.) bezeichnen. Erstreckt sich ein Dreiecknetz in vielen Triangelreihen sehr weit nach allen Richtungen vom geographisch bestimmten Punkt A, von Süd nach Nord und von Ost nach West, so reicht ein Meridian AN und ein Azimuthalwinkel BAN zum richtigen Entwurf des Netzes nicht aus. Denn bei großen Längen- und Breitenunterschieden weichen die Meridiane vom Parallelismus beträchtlich ab, auch können sich wegen der nicht ganz zu vermeidenden Unvollkommenheit der Winkelmessung und des Kalkuls selbst die kleinen Fehler allmählig dermaßen anhäufen, daß die Lagen sehr weit entfernter Punkte durch die erwähnte Rectangularmethode merklich ver-

schoben werden könnten, wenn man bloß von einem Punkt A und von einer durch denselben gelegten Mittagslinie SN ausgehen wollte.

Für ein weitausgedehntes Dreiecknetz müssen daher außer A noch einige andere Hauptpunkte geographisch d. h. in Hinsicht ihrer Breiten und Längen durch astronomische Beobachtungen bestimmt werden. Durch diese Punkte muß man wie bei A Meridiane legen, und Azimuthalwinkel messen. So erhält man ein astronomisches Netz, welches das trigonometrische controlirt, und in gehörigen Schranken hält. Wenn die trigonometrisch festgesetzten Längen und Breiten der Netzpunkte mit den dafür zur Prüfung unternommenen astronomischen Bestimmungen zusammenstimmen, so kann man das Netz und die darnach entworfene Landcharte als richtig betrachten. Eine weitere Betrachtung über diesen höchst wichtigen Gegenstand kann keinem denkenden Leser schwer fallen.

Schließlich bemerke ich noch, daß zum Entwurf des Dreiecknetzes durch Abscissen und Ordinaten es eben nicht durchaus nothwendig ist, daß man zur Abscissenlinie SN den durch A laufenden Meridian annehme. Dieselbe kann auch in einer andern Lage gegen eine Dreiecksseite AB stehen, und N oder S können selbst bestimmte Punkte des Netzes seyn. Durch Messung des Winkels BAN und Berechnung auf die oben angezeigte Weise wird man gleichfalls den Zweck der Netzgründung auf dem Papier erreichen. Allein eine wesentliche Eigenschaft, nehmlich die richtige Orientirung des Netzes gegen die vier Himmelsgegenden Süd, Nord, Ost, West geht hiermit verloren. Man sieht sich in diesem Falle zuletzt doch genöthigt, an einem Ort, z. B. A, die Richtung der Mittagslinie gegen eine Dreiecksseite AB zu bestimmen oder den Azimuthalwinkel BAN zu messen. Bei großen Länderaufnahmen wählt man

daher immer die Abscissenlinie SN in der Richtung der durch A laufenden Mittagslinie, weil man damit zwei gleichwichtigen Forderungen Genüge leistet.

§. 173.

Bestimmung des durch einen Ort laufenden Meridians. (Fig. 123. 124.)

Was man unter dem Meridian (Mittagslinie, Mittagsebene) eines Ortes auf der Erde zu verstehen habe, weiß jetzt jeder Schulknabe; daher ich mich bei der Definition dieses allgemein bekannten Wortes hier nicht aufhalten will.

Bekanntlich steht ein Himmelskörper, die Sonne oder irgend ein andrer Stern, in der Mittagsfläche (Meridianebene) eines Ortes A (Fig. 123.), wenn er bei seiner Bewegung (Aufsteigung) von Ost gegen West seine größte Höhe über dem Horizont von A erreicht. Man pflegt diesen Durchgang der Sterne durch die Mittagsfläche (Meridian) eines bestimmten Ortes auf der Erde ihre Kulmination (Kulminiren) zu nennen. Sterne, welche für einen Ort nicht untergehen oder immer über dessen Horizont sichtbar bleiben, Circumpolarsterne, werden zweimahl in seinem Meridian — oder vielmehr in seiner bis an den Himmel erweiterten Mittagsebene — gesehen, einmahl unter dem größten, das zweite Mahl in einer Bogenentfernung von 180^0 unter dem kleinsten Höhenwinkel. Insgemein versteht man aber unter Kulminiren der Sterne bloß ihre größte Höhe in der Mittagsebene eines Orts.

Das Kulminiren der Sterne, besonders der Sonne, ist von den ältesten Zeiten her das natürlichste und einfachste Mittel gewesen, die durch irgend einen Ort auf der Erde laufende Mittagslinie (Meridian) zu finden

und durch besondere Merkmahle (gerade Linien ꝛc.) zu bezeichnen.

Wenn man an einem Ort A (Fig. 124.) eine ebene Platte von Metall, Stein oder desgl. horizontal aufstellt, über dieser einen geraden Stift (Stab) senkrecht befestigt, so wird bei Beleuchtung der Sonne der vom Stift auf die horizontale Ebene geworfene Schatten am kürzesten, wenn die Sonne kulminirt, oder ihr Mittelpunkt in die Mittagsebene des Ortes tritt, eine allgemein bekannte Sache.

So läßt sich für den gemeinen Gebrauch, auch für topographische Aufnahmen mit dem Meßtisch, die Richtung der Mittagslinie an irgend einem Ort erträglich genau finden. Die Feldmesser brauchen aber statt dessen lieber die Boussole, nehmlich die Richtung der Magnetnadel, deren bei uns westliche Deklination bis auf $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ Grad annähernd bekannt seyn muß.

In der bemerkten Art haben wahrscheinlich die Alten ihre Gnomon's (Mittags- und Stunden-Zeiger) eingerichtet. Sie bestanden aus einem Obelisken, Spitzsäule, und einer hinter diesem gezogenen geraden Linie, Mittagslinie, in welche der Schatten der Spitze traf, wenn die Sonne kulminirte. Etwas anders führte Cassini im vorigen Jahrhundert eine Mittagslinie zu Bologna aus. Auf dem horizontalen Boden einer hohen Kirche zog er eine astronomisch bestimmte Mittagslinie, und brachte gegen Süden 100 Fuß über dem Boden eine kleine Oeffnung an, durch welche das Licht der Sonne bei ihrer Kulmination — im Mittag — auf jene Linie fiel. Auf ganz ähnliche Weise hat man auch späterhin Mittagslinien, besonders auf Sternwarten, gezogen. Auf guten Sternwarten ist die Lage der Mittagsebene ein für allemahl schon bestimmt, durch Mauerquadranten, noch besser durch Passagen· instrumente, deren Fernröhre sich genau in der Mit·

tagsebene ihres Standortes auf und niederbewegen lassen.

Etwas zuverläßiger als durch den kürzesten Schatten erlangt man die Richtung der Mittagslinie, wenn man um den Mittelpunkt des Stiftes A (Fig. 124) auf der horizontalgestellten Platte mehrere concentrische Kreisbogen auf der Nordseite beschreibt, und um einige Stunden vor und nach 12 Uhr (Mittag), den Eintritt gleichlanger Schatten in den verschiedenen Kreisen beobachtet, womit gleiche Stundenwinkel in der Bewegung der Sonne nach dem Meridian aufwärts und von demselben niederwärts oder mit andern Worten: gleiche (correspondirende) Sonnenhöhen zusammenhängen. Die Grenzen der Schatten bezeichnet man in den Kreisen durch die zusammengehörigen Punkte a und b, c und d, e und f u. s. w. Hierauf halbirt man die Bogen in m, n ꝛc., ziehet die Gerade A m, welche auch durch die übrigen Halbirungspunkte gehen muß, wenn der Apparat richtig gestellt worden, und die Beobachtung genau geschehen ist. Im Fall die Richtungslinien A m, A n ꝛc. ein wenig von einander abweichen, so nimmt man eine mittlere zwischen denselben. Durch öftere Wiederholung derselben Operation an verschiedenen Tagen kann man, wie ich aus mehreren Versuchen der Art schließe, die Mittagslinie eines Ortes A sehr annähernd erlangen. Die Gerade A m in der Mittagsfläche von A läßt sich nach N und S (Nord und West) hin beliebig verlängern, und auch ihre Bezeichnung im Felde durch eigne Signale leicht bewirken.

Noch sichrer erreicht man diesen Zweck, wenn man bloß die Lage der Schattenlinien bei correspondirenden Sonnenhöhen bemerkt. Wie man zur Beobachtung dieser Höhen Vertikalkreise, auch einen Spiegelsextant mit künstlichem Horizont, gebrauchen müsse, bedarf kei-

ner weitläufigen Erklärung. Der Sextant und der Horizont leisten hier wirklich bequeme Dienste. Man stellt den Index des Sextanten auf einen Winkel, doppelt so groß, als die Höhe der Sonne ein paar Stunden vor ihrer Kulmination in Gradmaß beträgt; ungefähr kann man diesen Höhenwinkel immer wissen. Man beobachtet in der zugehörigen Zeit die Sonne, bis beide Sonnenbilder sich berühren. In diesem Moment läßt man durch einen Gehülfen in der Schattenlinie einen Punkt a (Fig. 124) bezeichnen. Eben dies thut man in gleicher Zeit nach der Kulmination, wenn die Sonne im Nachmittag wieder dieselbe Höhe erreicht, indem man jetzt wieder in der Schattenlinie einen Punkt g bezeichnen läßt. Da die Stundenwinkel aAN und gAN einander gleich sind, so darf man nur noch den Winkel aAg halbiren, um die Richtung der Mittagslinie AN zu erhalten. Zu noch größerer Gewißheit nimmt man gern mehrere gleiche (correspondirende) Sonnenhöhen, und wofern die dadurch bestimmten Meridiane ein wenig von einander abweichen, eine Mittellinie zwischen denselben. — Statt eines senkrecht aufgesetzten Stiftes braucht man lieber einen aufgehängten Faden, mit einem konisch zulaufenden Gewicht von Metall beschwert, dessen Spitze senkrecht nahe über dem Mittelpunkt A der concentrischen Kreise steht. — Es lassen sich überhaupt zu diesem Behuf mehrere Vorrichtungen gar leicht gedenken. So kann man in den Fensterladen eines verfinsterten Zimmers eine Metallplatte mit einem kleinen runden Loch, etwa 1 Lin. im Durchmesser, einsetzen, durch welches das Sonnenlicht einfällt, einen Faden über dem Loch befestigen u. s. w. Ich bemerke noch, daß man correspondirende Sonnenhöhen am besten zur Zeit des längsten Tages (Solstitium) nimmt, weil dann die Veränderungen in der Abweichung der Sonne

am unmerklichſten, und alſo keine Correctionen der Höhen nöthig ſind.

§. 174.

Andere Methode zur vorerwähnten Beſtimmung. (Fig. 125.)

Zuverläßiger erlangt man eine Mittagslinie, indem man mehrere correſpondirende Höhen der Sonne oder eines Sternes nimmt, an einer guten Sekundenuhr, welche einen gleichförmigen Gang hat und auf Sternzeit oder mittlere Sonnenzeit geſtellt iſt, die Zeiten der Beobachtung bemerkt, und hieraus die mittlere Zeit bis auf 1 Sekunde oder noch genauer ableitet, zu welcher der obſervirte Himmelskörper am folgenden Tage kulminiren muß. Beobachtet man ihn nun den folgenden Tag in dem berechneten Augenblick, ſo ſieht man ihn in der Mittagsebene des Standorts A. Die Richtung der Mittagslinie AS erreicht man durch folgende Vorrichtung.

Man hängt an D (Fig. 125) ein Bleiloth, dünnen Faden oder feine Drahtſaite mit einem ſchweren Gewicht E belaſtet, auf. Damit ſeine vertikale Lage DE durch keine äußere Bewegung der Luft ꝛc. geſtört wird, läßt man ſeinen untern Theil in einem Gefäß mit Waſſer ſtehen. Bei A in einiger Entfernung von DE gegen die Nordſeite hin iſt entweder ein zweiter vertikaler Faden oder ein kleines Diopter mit Fadenkreuz ſo angebracht, daß ſich dieſelben von Oſten gegen Weſten fein verſchieben laſſen. Der Faden kann ſich über einer cylinderförmigen Walze, das Diopter auf einem eignen Geſtell durch eine Mikrometerſchraube in die gehörige Lage verrücken laſſen. Zur Zeit der Kulmination der Sonne oder noch beſſer eines ſüdlichen

ſternes — man kann auch einen nördlichen dazu brau-
en — verſchiebt man den Faden oder das Diopter all-
ählig ſo, daß man im Augenblick der Kulmination
en Stern H durch A obſervirt vom Faden DE in F
edeckt ſieht. Wenn alles richtig geſchehen, ſo beſtimmt
ne durch A, D, E gelegte Ebene die Mittagsebene des
rtes A. Das rechte Verfahren hierbei erlernt man
m beſten durch eigne Uebung. Es iſt klar, daß man
ur Verſicherung und Berichtigung der alſo beſtimmten
Mittagsebene die Kulminationen mehrerer Sterne an-
enden kann, wozu aber immer eine äußerſt genaue
Beobachtung correſpondirender Höhen, der zugehörigen
eiten u. ſ. w. gehört. Fixſterne ſind wegen ihres ſehr
leichförmigen Laufs hierzu brauchbarer als die Sonne,
ie ihre Abweichung gegen den Aequator in ſehr kurzen
eiträumen beträchtlich verändert. Beobachtet man das
Kulminiren der Sterne, alſo des Nachts, ſo muß man
en Faden DE durch Seitenbeleuchtung für das Auge
n A ſichtbar machen. Kurzſichtige bedürfen dabei ei-
es Augenglaſes. Um das Zeitmoment der Sternkul-
nination genau zu wiſſen, muß die Uhr einen äußerſt
leichförmigen Gang haben, eine aſtronomiſche
Pendeluhr wenigſtens ein wohlgeprüftes Taſchen-
hronometer ſeyn. Auch muß man ihr tägliches
Voreilen oder Zurückbleiben wenigſtens bis auf eine
Sekunde genau kennen; ſiehe §. 176.

Hat man einmahl die Mittagsebene ADE ſicher
gefunden, ſo kann man bei unverändertem Stand des
Apparates — Filargnomons — ſehr leicht im Ho-
rizont von A gegen Süden hin eine gerade AS als
künſtlichen Meridian durch beſondere Signale (Meri-
dianmarken), z. B. vertikale Stangen, eine zugeſpitzte
ſteinerne Säule, irgend ein Zeichen an einem feſtſtehen-
den Gebäude oder desgl. abſtecken und zu anderweiti-
gem Gebrauch fixiren.

Am allerbrauchbarsten und zugleich am zuverläßigsten ist jedoch ein Höhenkreis mit einem Azimuthalkreis verbunden, zu der in Rede stehenden Bestimmung. Besonders gut eignet sich hierzu ein Bordascher Kreis nach der neuern verbesserten Construction, s. §. 73. Man stellt denselben über dem Standort A auf, berichtigt seine Lage durch ein Bleiloth und durch die Stellschrauben dahin, daß die Ebene des untern Azimuthalkreises horizontal, die Ebene des obern größern Kreises vertikal und zu dieser das obere Fernrohr bei jeder Bewegung parallel steht, und auch der einmahl vertikal gestellte Kreis bei jeder Azimuthalbewegung diesen vertikalen Stand richtig beibehält. Nachdem man nun durch mehrere correspondirende Sternhöhen die Zeit der Kulmination eines Sterns gefunden, so dreht man in dem berechneten Moment (Sekunde), wo er seine größte Höhe erreichen muß, den vertikalen Kreis so, daß der Stern in der Achse des parallelen Fernrohrs, nehmlich im Durchschnittspunkt seines Fadenkreuzes oder in der Mitte zwischen den zwei parallelen und horizontal gestellten Fäden, erscheint. Dann steht die Achse des Fernrohrs in der Mittagsebene des Ortes A. Durch Erniedrigung des Fernrohrs bei sonst unverrücktem Stand des Kreises und Visiren in der Ferne kann man dann, wie vorher gezeigt worden, eine gerade A S in der bestimmten Mittagsebene abstecken, auch zugleich einen Azimuthalwinkel S A G oder N A B messen, indem man bei unverrücktem Stand des untern Azimuthalkreises das Fernrohr des obern Vertikalkreises auf die Richtobjecte G oder A hin dreht, und den vom Inder des untern Kreises durchlaufenen Bogen in Graden, Minuten und Sekunden abliest. — Auch hier muß man die Richtung der Mittagslinie und das Maß des gesuchten Azimuthalwinkels durch das Kulminiren meh-

rerer Sterne und wiederholte Observationen prüfen und berichtigen.

Mit einem Bordaschen Kreis kann man selbst, ohne das Kulminiren der Sterne zu beobachten, seinen Zweck dadurch erreichen, daß man ein oder mehrere Paare correspondirender Sternhöhen (oder auch Sonnenhöhen) observirt. Die am Azimuthalkreis durchlaufenen Bogen (in Gradmaß) halbirt geben ebenfalls die Lage des Fernrohrs in der Mittagsebene an, wie ohne weitere Erklärung erhellt. Bei dieser letztern Methode ist die Zeitmessung nicht durchaus nothwendig, zur Wahrnehmung des Zeitpunktes aber, wo Vormittag und Nachmittag ein Stern gleiche Höhen erreicht, sehr nützlich. Braucht man correspondirende Sonnenhöhen, so macht die veränderliche Abweichung der Sonne kleine Correctionen nöthig; will man sich solche ersparen, so muß man die Beobachtung um die Zeit des längsten Tages (Solstitium) anstellen.

Wie sich das Azimuth zweier Oerter auf der Erde auch ohne directe Bestimmung einer Mittagslinie nach den bisher gezeigten Methoden, durch das sogenannte Azimuth der Sonne astronomisch observiren und berechnen lasse, will ich der Vollständigkeit halber dem wißbegierigen Leser noch kürzlich mittheilen.

§. 175.

Vom Azimuth der Sonne oder eines andern Himmelskörpers in Beziehung auf einen bestimmten Ort auf der Erde. (Fig. 126.)

Es bezeichne in Fig. 126 *) Z den Scheitelpunkt

*) Ich habe hierzu absichtlich eine ganz einfache Construction er-

(Zenith) irgend eines Ortes A (Fig. 123.) auf der Erde.

Ein größter Kreisbogen am Himmel, welcher durch Z und P, den Nordpol der verlängerten Erdachse, hindurchgeht, und den Aequatorkreis in E schneidet, muß nothwendig in der Meridianebene des Ortes A liegen, dessen Zenith Z vorstellt. Der Bogen EP muß 90° seyn, da P der Pol des durch E laufenden Aequators ist; vergl. §. 25. IIte Abth.

EZ in Gradmaß von E an gezählt, drückt bekanntlich die Polhöhe oder auch die Breite des Ortes A aus; denn der correspondirende terrestrische Bogen von A bis zum wirklichen Nordpol, oder vielmehr der ihm zugehörige Winkel am Mittelpunkt der Erde, muß eben so viel in Gradmaß betragen, als der eingebildete himmlische Bogen.

ZP = 90 — EZ heißt das Complement der Polhöhe oder Breite von A. Offenbar läßt sich also aus der Polhöhe ihr Complement und umgekehrt leicht finden.

In S stehe über dem Horizont des Ortes A, außerhalb seiner Mittagsebene, südlich oder nördlich, östlich oder westlich, ein Himmelskörper, z. B. die Sonne. Ein größter Kreis durch S und Z (Scheitelkreis, Vertikalkreis) trifft den Horizont von A, dessen Ebene man

---

wählt, weil ich dadurch den Lesern verständlicher zu werden glaube, als durch eine sehr complicirte unanschauliche Zeichnung, wie solche in allen mir bekannten astronomischen Büchern und Abhandlungen vorkommen. Damit und mit meiner wörtlichen Darstellung habe ich hoffentlich dem Gegenstand selbst das Schwierige und Dunkle entzogen, welches Anfänger im Studium der sphärischen Astronomie gewöhnlich finden, und wodurch sich so viele im irrigsten Wahn von dieser edlen und erhabenen Wissenschaft abschrecken lassen.

bis an das Himmelsgewölbe erweitert denke, in H, es ist der Bogen $HZ = 90^0$, weil Z der Pol der h A gelegten Kreisebene des sichtbaren Horizonts Da HZ ein Vertikalkreis von A, so giebt HS Erhöhung über jenen Horizont in Gradmaß die e der Sonne ꝛc. über dem Standort A. Aus der nenhöhe HS ergiebt sich ihr Complement $SZ = c$, hen Bogen oder Winkel man gewöhnlich die Zenith- nz der Sonne oder eines andern Himmelskörpers Beziehung auf einen gewissen terrestrischen Ort A nt. Aus der gemessenen Zenithdistanz läßt sich um- hrt die Höhe HS ableiten.

Durch den Mittelpunkt der Sonne S und den Nord- P am Himmel denke man sich einen größten Kreis ge- , welcher den Aequator in Q trifft. Der Bogen PQ ß aus dem oben angeführten Grunde gleichfalls 90^0 be- gen. Der Bogen SQ heißt in der Astronomie die Ab- ichung der Sonne oder eines andern Himmelskör- s. Kennt man für eine bestimmte Zeit der Beobach- ig die Abweichung der Sonne, nehmlich SQ in Grad- ß, so weiß man auch ihr Complement, nehmlich die lardistanz $SP = a$.

Die drei Bogen EP, HZ und PQ bilden am mmel, aber nur in der Idee des Beobachters, ein härisches Dreieck SZP, dessen eine Spitze mit dem rdpol P zusammenfällt.

Wenn der mit diesem Gegenstand noch nicht ver- ute Leser sich die Entstehung des sphärischen Dreiecks, r Sonnenhöhe, Polardistanz u. s. w. recht anschaulich achen will, so darf er sich nur unter freiem Himmel gen Süden hin stellen, die Sonne bei einiger Erhö- ung gegen Ost oder West betrachten, und sich nach der gebenen Anleitung und Figur die 3 Viertelkreise am imelsgewölbe gezogen denken.

Der sphärische Winkel ZPS oder EPQ heißt der

Stundenwinkel für den Meridian PE des Ortes A. Derselbe zeigt nehmlich an, nach wie viel Stunden, Minuten ꝛc. die Sonne bei ihrem Umlauf um die Erde in den Meridian PE des Ortes A treten muß, wenn sie bei S östlich steht. Wenn sie aber westlich steht, so giebt der Stundenwinkel die Nachmittagsstunde. Die Verwandlung des bekannten Stundenwinkels in die Vor- oder Nachmittagsstunde, oder umgekehrt, geschieht äußerst leicht nach diesem Satz: 360° geben 24 Stunden, oder 15° eine Stunde, daher 1° zu 4 Minuten, 15′ zu 1 Minute, 15″ zu 1 Sekunde Zeit gehören u. s. w.

Der sphärische Winkel EZS heißt das Azimuth der Sonne in Beziehung auf den Meridian ZE des Ortes A auf der Erde. Man begreift sogleich, daß dieser Winkel in Gradmaß gleich seyn muß dem Horizontalwinkel, welcher bei A durch die horizontalen Projectionen von AZ und AS gebildet wird, oder gleich dem diedrischen Winkel der Vertikalebenen AZE und AZS.

Sowohl der Stundenwinkel als auch das Azimuth der Sonne lassen sich aus den drei Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks ZPS berechnen, wenn ihre Complemente die Breite des Ortes A, die Zenithdistanz und die Abweichung der Sonne, bei einem gewissen Stand zu einer genau bekannten Zeit, gegeben sind.

Es ist nehmlich nach §. 37. IIte Abth.

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,ZPS \text{ (Stundenwinkel)} = \sqrt{\frac{\sin.\ \frac{1}{2}(c+b-a)\ .\ \sin.\ \frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin.\ a\ .\ \sin.\ b}}$$

$$\text{oder Cos. } \tfrac{1}{2}\,ZPS = \sqrt{\frac{\sin.\ \frac{1}{2}(a+b+c)\ .\ \sin.\ \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin.\ a\ .\ \sin.\ b}}$$

Nennen wir den Azimuthalwinkel α, so ist:

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c).\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.\ b\ .\ \sin.\ c}}$$

$$\text{oder Cos.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c).\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.\ b\ .\ \sin.\ c}}$$

Zur Uebung kann sich der geneigte Leser ein Beispiel in Zahlen selbst ansetzen und berechnen.

Außer der Sonnenhöhe, die man durch Messung mit dem Bordaschen Kreise oder auch mit dem Sextant erfährt, wird daher auch die geographische Breite und die Abweichung der Sonne für den Augenblick der Beobachtung als bekannt vorausgesetzt. Die Abweichung muß man aus den astronomischen Ephemeriden nehmen. Dabei muß man die Zeit der Beobachtung bis auf die einzelne Sekunde sehr genau wissen, wegen der veränderlichen Abweichung der Sonne. Die Zeit, welche die Uhr wenigstens sehr nahe angiebt, läßt sich durch den berechneten Stundenwinkel prüfen und verbessern.

Da demnach die Berechnung des Azimuths der Sonne oder eines andern Himmelskörpers zugleich von mehreren Größen abhängt, so begreift man die Möglichkeit der Fehler in Bestimmungen der Art. Nur von wenig Oertern auf der Erde kennt man die geographische Breite bis auf eine oder einige Sekunden genau. Eben so können in Beobachtung der Sonnenhöhen und der Zeit bedeutende Fehler Statt finden, wenn nicht die äußerste Sorgfalt dabei angewendet wird. Von der Correction der gemessenen Höhen himmlischer Körper wegen der Refraction und wegen der Parallaxe, so wie wegen des scheinbaren Durchmessers der Sonne will ich das Bemerkenswertheste weiterhin anzeigen.

Kann man nun durch astronomische Beobachtung das Azimuth der Sonne finden, wobei man sich meistens mit einer Genauigkeit von etwa 10 Sekunden zur Orientirung eines Dreiecknetzes begnügen kann, so läßt

ſich auch das Azimuth zweier Oerter auf der Erde in folgender Art annähernd beſtimmen.

Es ſtelle in Fig. 123. N S die durch A laufende Mittagslinie (Mittagsebene) vor, G einen zweiten Ort (Richtobject), H die Sonne, hier weſtlich von der Mittagsebene des Ortes A. H A S ſey für ein gewiſſes Zeitmoment das Azimuth der Sonne. Der Horizontalwinkel G A S iſt das Azimuth des Ortes G in Beziehung auf den Meridian des Hauptſtandortes (Normalpunktes) A. Dieſer Azimuthalwinkel G A S wird zur Orientirung des trigonometriſchen Netzes verlangt, ohne daß durch A eine Mittagslinie durch künſtliche Signale abgeſteckt, oder durch ein in der Mittagsebene bewegliches Fernrohr (Paſſagen-Inſtrument auf Sternwarten) ein für allemahl determinirt worden.

Kann man in demſelben Augenblick, wo man die Sonne in H obſervirt, zugleich den Horizontalwinkel H A G meſſen, ſo erhält man damit den geſuchten terreſtriſchen Azimuthalwinkel

$$GAS = HAG - HAS.$$

Braucht man einen Winkelmeſſer mit Höhenkreis und Azimuthalkreis, Bordaſchen Kreis, ſo kann man ſchnell nach einander, beinahe in einem und demſelben Moment, den man an einer aſtronomiſchen Pendeluhr oder an einem Taſchenchronometer genau bemerkt, ſowohl die Sonnenhöhe als auch den Horizontalwinkel H A G beobachten u. ſ. w.

Schwieriger wird dieſe Beſtimmung vermittelſt eines Sextanten, weil man hier einen ſchiefgeneigten Winkel und zur Reduction deſſelben außer der Sonnenhöhe auch noch einen zweiten Elevations- oder Depreſſionswinkel nehmen muß, wofern G nicht im Horizont von A liegt. Dazu, ſo wie zur Stellung der Sextantenebene in die Ebene des ſchiefgeneigten Winkels gehört immer mehr Zeit, während welcher ſich die Son-

he, ihr Azimuth, der Winkel HAG, also auch
zimuthalwinkel GAS beträchtlich ändert. Man
in diesem Falle die Zeit sehr genau, wenigstens
if 1", messen können, um die mit der Zeitverän-
g zusammengehörigen Veränderungen der Winkel
ernd genug berechnen zu können. Größere Aus-
chkeit über diesen astronomischen Gegenstand läßt
schränkte Raum dieses Buches nicht zu.

Um die Lage des Ortes G gegen den Meridian
rtes A durch Berechnung in Gradmaß zu erlan-
muß man es auch hier bei einer einzelnen Obser-
n nicht bewenden lassen, sondern dieselbe mehrere
e bei verschiedenen Sonnenhöhen, Vormittags und
nittags, auch an verschienenen Tagen, wiederho-
Aus mehreren wenig von einander abweichenden
ben des Azimuthalwinkels GAS nimmt man so
das arithmetische Mittel.

Steht die Sonne H (Fig. 123.) westlich, der ter-
che Ort G östlich vom Meridian AS, so subtra-
nan das Azimuth der Sonne vom Horizontalwin-
AG, um den gesuchten Azimuthalwinkel GAS
halten. Eben so, wenn die Sonne östlich, der
G westlich von AS stände. Wofern aber beide
iner Seite von AS, z. B. östlich, wären, so müßte
das Sonnenazimuth zum Horizontalwinkel addi-
wenn HAS kleiner als GAS oder die Sonne
Meridian näher wäre als der Ort G, hingegen
Sonnenazimuth den Horizontalwinkel subtrahiren,
HAS größer als GAS wäre u. s. w., um den
ngten Azimuthalwinkel GAS zu bekommen. Der
e Ort kann auch auf die Nordseite von A fallen,
. B. B (Fig. 123.) und dann der Azimuthalwin-
AN aus dem astronomisch bestimmten Azimuth
Sonne HAS und dem Horizontalwinkel BAH
eiten seyn. In diesem Falle wird BAN =

180^0 — (BAH — HAS). Alle verschiedenen Fälle, die hier vorkommen können, lassen sich durch einfache Constructionen der Elementargeometrie anschaulich machen.

Im Allgemeinen darf man behaupten, daß das Azimuth zweier Oerter auf der Erde aus dem Azimuth der Sonne abzuleiten, immer eine sehr complicirte, mancherlei Fehlern ausgesetzte Operation sey, und daß derselbe Zweck eben so vollkommen oder noch vollkommener erreicht werde, wenn man nach §. 173, 174 die Lage des durch einen Ort A laufenden Meridians finden kann.

§. 176.

Zeitmessung durch Uhren, Chronometer.

Eine richtige Zeitmessung nach Stunden, Minuten, Sekunden eines Tages, eines Sonnentages oder eines sogenannten Sterntages, braucht man nicht allein zu reinastronomischen Beobachtungen, sondern auch zu größern geodätischen Operationen. Außer den Zwecken, die man damit nach §. 174, 175 erreicht, bedarf man einer genauen Zeitmessung (Chronométrie) ganz vorzüglich zur Bestimmung der geographischen Breiten und Längen der Oerter auf der Erde.

Bekanntlich mißt man die Zeit in Tagen, Stunden, Minuten ꝛc.

Der Zeitraum eines Tages wird begrenzt durch einen ganzen scheinbaren Umlauf der Sonne oder eines Fixsternes um die Erde, nehmlich durch zwei zunächst auf einander folgende Kulminationen oder Durchgänge jener Himmelskörper durch den Meridian eines bestimmten Ortes auf der Erde.

Die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden

Kulminationen der Sonne, oder von einem wahren Mittag zum andern, heißt ein wahrer Tag oder wahre Sonnenzeit; hingegen heißt die zwischen zwei auf einander folgenden Kulminationen eines Fixsterns ein Sterntag, Sternzeit. Wahre Sonnenzeit können nur Sonnenuhren, aber höchst unvollkommen, zeigen. Auf Sternzeit richtet man insgemein die astronomischen Pendeluhren auf Sternwarten ein; doch stellt man diese und die tragbaren Taschensekundenuhren (Chronometer) lieber auf mittlere Sonnenzeit, wenn sie zur Bestimmung der geographischen Längen und Breiten dienen sollen.

Die Unterschiede zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit und zwischen Sternzeit (Tagen) verhalten sich also:

Ein Sonnenjahr (tropisches) wird abgegrenzt oder bestimmt durch den Zeitraum von einer Frühlings- oder Herbst-Nachtgleiche (Aequinoctium) bis zur nächst darauf folgenden. Durch astronomische Beobachtungen hat man gefunden, daß ein solches Jahr in 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Min., 48 Sekunden $= 365\frac{20928}{86400}$ T. $= 365{,}2422 \ldots$. Tagen, wahren Sonnentagen, vollendet wird. Das sogenannte siderische Jahr, durch die Rückkehr der Sonne zu einem und demselben Fixsterne begrenzt, ist etwas größer, nehmlich = 365 T., 6 St., 9 Min., 11 Sekunden. Vergl. die astron. Lehrb.

Die Sterntage sind sehr gleichförmig, allein sie können mit den wahren Sonnentagen nicht zusammenstimmen, sondern müssen immer etwas kleiner ausfallen als letztere, aus folgendem Grunde:

Wenn die Sonne an einem Tage zugleich mit einem Fixstern kulminirte oder durch den Meridian eines Ortes ging, so muß sie am darauf folgenden Tage um etwas später als der Fixstern kulminiren, weil sie

sich bekanntlich in der Ekliptik von Westen gegen Osten immerwährend fortbewegt; folglich muß jeder Sonnentag größer seyn als ein zugehöriger Sterntag.

Stellen wir uns einstweilen vor, daß die Sonne mit gleichförmiger Bewegung — wie es jedoch nicht der Fall ist — die ganze Bahn der Ekliptik oder vielmehr den Kreis von 360° des Aequators in 1 Jahr = 365,2422.... wahren Sonnentagen durchlaufe, so beträgt nach der Regel de Tri die Fortrückung der Sonne von Westen gegen Osten in einem Tage so viel als $\frac{21600}{365,2422}$ Min. = 59 Min., 8,6 Sek. sehr nahe. Der mittlere scheinbare Durchmesser der Sonne beträgt nach den neuen Sonnentafeln von Delambre 32'3'',3; folglich rückt die Sonne bei ihrer mittlern Bewegung täglich fast um das Doppelte ihres scheinbaren Durchmessers von Westen gegen Osten weiter. Da sie bei diesem täglichen Fortrücken in 1 Jahr = 365,2422.. Tagen den ganzen Aequatorkreis = 360° durchläuft, so muß sie in diesem Zeitraum öffenbar einmahl weniger durch den Meridian irgend eines Ortes auf der Erde gehen (kulminiren), als ein Fixstern in derselben Zeit. Daraus folgt, daß zu 365,2422 ... Sonnentagen in einem tropischen Sonnenjahr 366,2422 ... Sterntage gehören, daß folglich 1 Sterntag kürzer ist als 1 mittlerer Sonnentag in dem Verhältniß

365,2422 : 366,2422.

So findet man einen Sterntag = $24 \times \frac{365,2422}{366,2422}$ = 23 St., 56 Min., 4,09'' eines mittlern Sonnentages nahe. Umgekehrt betragen 24 Stunden mittlerer Sonnenzeit 24 St., 3 Min., 56,5 Sek. Sternzeit nahe. Nach diesen Sätzen kann es nicht schwer fallen, Sternzeit in mittlere Sonnenzeit, und umgekehrt, zu verwandeln. Zur Uebung mag der Leser eine solche Reduction vornehmen, und z. B. 3 St., 27 Min., 53,7 Sek. Sternzeit in mittlere Sonnenzeit verwandeln.

Von der mittlern Sonnenzeit, für welche man sich
mittlere Sonne mit gleichförmiger Bewegung
Aequator oder in einer zu diesem parallelen Kreis-
ie imaginirt, weicht die wahre Sonnenzeit mehr
: weniger ab.

Die Sonnentage können an Dauer unter sich aus
i Gründen nicht gleich seyn. Erstlich bewegt sich
Sonne nicht im Aequator fort, sondern in der Ebene
Ekliptik *), weshalb ihre gerade Aufsteigung un-
ichförmig wachsen müßte, wenn sie sich auch gleich-
mig fortbewegte. Zweitens bewegt sie sich selbst in
Ekliptik nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit.
ı die Zeit der längsten Tage (Sommersolstitium) be-
igt diese Geschwindigkeit weniger, gegen 57 Min. im
ogen, um die Zeit der kürzesten Tage (Wintersolsti-
ım) mehr, gegen 61 Min. Hieraus folgt, daß die
ıhren Sonnentage bald länger bald kürzer als die
ıgebildeten mittlern Sonnentage seyn, aber auch ei-
ge Mahle, nehmlich zu vier verschiedenen jedoch ver-
ıderlichen Zeiten, im Jahre mit letztern nahe zusam-
enfallen müssen. Das Ausführlichere hierüber muß
ıan in den astronomischen Schriften nachsehen; auch
ı mehreren physikalischen Werken, z. B. in Gehler's
nd Fischer's phys. Wörterb., in Hube's Natur-
ehre u. a. m., findet der Anfänger genügliche Beleh-
ung über diesen Gegenstand.

Die wahren Mittage (Kulminiren der Sonne) ei-
en den mittlern bald vor, bald bleiben sie hinter den-
elben zurück, bald fallen auch beide nahe zusammen.

---

*) Die Neigung derselben gegen die Aequatorebene oder Schiefe der Ekliptik ist etwas veränderlich, ihre jährliche Abnahme beträgt nach der Theorie von Laplace 0, 52″. Im Mittel ist die Schiefe der Ekliptik jetzt ungefähr = 23° 28′. Vor 2000 Jahren war sie nahe = 24°.

Der größte Unterschied beider, im Februar und Nov... ber, kann bis auf $\frac{1}{4}$ Stunde ungefähr steigen.

Die Differenz der wahren und mittleren Sonnen... zeit (Mittage) in Stunden, Minuten und Sekunden mittlerer Zeit, für jeden Tag eines Jahres in Bezug berechnet, heißt man allgemein die Zeitgleichung (équation du tems). Wenn z. B. der wahre Mittag am 11. Febr. eines Jahres um 12 Uhr 14 Min. 36 Sek. des mittlern Sonnentages, am 2. Nov. um 11 Uhr 43 Min. 44,9 Sek. des mittlern Sonnentages eintritt: geben die Unterschiede der Mittage die Zeitgleichung für diese Tage eines bestimmten Jahres. Fielen an einem Tage beide Mittage ganz oder sehr nahe zusammen, so wäre die Zeitgleichung = 0. Man muß Tabellen der Zeitgleichung für jeden Tag im Jahre haben, um die mittlere Sonnenzeit, welche Sekundenpendeluhren und Chronometer zeigen, in wahre Sonnenzeit oder umgekehrt verwandeln zu können. Man findet dieselben in den astronomischen Ephemeriden, z. B. in den Berl. astron. Jahrb. und in der Pariser Connoissance des tems, unter den Benennungen: Mittlere Zeit im wahren Mittage und tems moyen au vrai midi.

Somit läßt sich ohne besondre Schwierigkeit die mittlere Sonnenzeit und diese durch die Zeitgleichung in wahre Sonnenzeit verwandeln, und umgekehrt.

Noch haben wir hierbei zu bemerken, daß die Astronomen ihren Sonnentag mit dem Mittage, wo die Sonne kulminirt, den Sterntag aber mit der Kulmination des Frühlingspunktes der Ekliptik anfangen, und in beiden Fällen von 0 bis 24 Stunden — von einer bis zur nächstfolgenden Kulmination — fortzählen. Da die Sternstunden zu verschiedenen Zeiten mit immer andern Sonnenstunden zusammenfallen müssen, so geben sie kein bequemes Zeitmaß für das practische Leben. Man stellt daher alle Sekundenpendeluhren, die

eographiſchen Zwecken oder zur Regulirung anderer
n dienen, auf mittlere Sonnenzeit. Auch die Aſtro-
en reduciren beobachtete Sternzeit, und geben ihre
bachtungen in wahrer Sonnenzeit an.

Zu geodätiſchem Gebrauch, vornehmlich zur Be-
mung der Breiten und Längen der Oerter auf der
e ſind unſtreitig genau regulirte Pendeluhren die
rläßigſten; in manchen Fällen, beſonders bei Län-
beſtimmungen, leiſten jedoch richtig und gleichförmig
nde Taſchenſekundenuhren, bekannt unter dem be-
dern Namen Chronometer, beſſere Dienſte. Dieſe
ſchenchronometer (Engl. Timekeeper) ſind be-
ders in England durch das Bedürfniß genauerer und
uemerer Längenbeſtimmungen zur See auf einen ho-
Grad von Vollkommenheit gebracht worden. Be-
mt ſind hauptſächlich die Chronometer von Ho-
lls, Emery und Arnold. Es iſt aber ein ſolches
rkzeug immer ſehr koſtbar; eines von Howells
ete 100 Pfd. Sterl., v. Zach meldet ſogar in ſ.
chr. über die Aufn. von Thüringen ꝛc., daß acht Eng-
he Chronometer, die er bei jener Operation zu Längen-
immungen im Gang hatte, zuſammen 7000 Rthlr.
eten. Jetzt werden ſolche etwas billiger zu 400 bis
o Rthlr. auch von Deutſchen Künſtlern hergeſtellt.
t dem Ankauf eines ſogenannten Chronometers muß
n vorſichtig, mit vielſeitigen Prüfungen derſelben,
gehen, weil bisweilen gemeine Taſchenuhren, mit
er kleinen Veränderung, ſchön gearbeitet aber mit
nz ungleichförmigem Gange, dafür ausgegeben wer-
n. Es iſt zu bedauern, daß gute Taſchenchronometer
ungemein theuer und alſo für unbemittelte Liebhaber
Geodäſie und der mathematiſchen Geographie ein un-
ſchwingliches Kleinod ſind. Könnte man eine ſolche Uhr
r 100 Rthlr. haben, ſo würden wir 1000 und mehr
ue Längenbeſtimmungen für die Geographie gewinnen.

Von der Construction astronomischer Uhren und Chronometer handeln mehrere Schriftsteller, vorzüglich gründlich Bohnenberger in s. Anl. zur geogr. Ortsbest. S. 150 sqq., auch Vega im 3ten Bde. s. Vorles. über Math.

§. 177.

Prüfung und Berichtigung des Ganges der Pendeluhren und Chronometer.

Die Haupttugend einer Uhr, die zu astronomisch-geodätischen Operationen brauchbar seyn soll, ist ein gleichförmiger Gang derselben, wenigstens auf so lange Zeit, als die ganze Beobachtung und das Geschäft dauert, wozu eine sichre Zeitbestimmung cooperirt. Gemeine, noch so schöne Taschenuhren, die Sekunden schlagen, sind nach meiner Erfahrung zu jenem Zweck nicht zu gebrauchen. Sogar astronomische Pendeluhren und Chronometer haben nur selten den erforderlichen Grad der Genauigkeit.

Daß eine gleichförmig laufende Uhr, sie mag auf Sternzeit oder wie noch gewöhnlicher auf mittlere Sonnenzeit eingestellt seyn, die wahre Sonnenzeit nie zeigen könne, sondern derselben bald voreilen, bald gegen dieselbe zurückbleiben müsse, folgt aus dem im vorigen §. Gesagten.

Um den Gang der Uhr zu untersuchen, gebraucht man correspondirende Höhen der Sonne oder auch einzelner Fixsterne, deren Kulminationszeit für irgend einen Ort aus astronomischen Tafeln bekannt ist. Jeder Himmelskörper erreicht seine größte Höhe, indem er durch den Meridian eines Ortes geht. In gleichen Zeiten vor und nach der Kulmination, z. B. 2 Stunden vorher und 2 Stunden nachher, steht er gleich hoch

über dem Horizont des Ortes, wenn er nehmlich während dieser Zeit seine Stellung gegen den Aequator nicht verändert, wie dies bei Fixsternen, aber nicht bei der Sonne, der Fall ist.

Nehmen wir einstweilen an, daß auch die Sonne in gleichen Zeiten vor und nach ihrer Kulmination gleich hoch stehe, so läßt sich die Zeit einer Sekundenuhr am wahren Mittage finden.

Man beobachtet erst am Vormittag, sodann wieder am Nachmittag gleiche Höhen der Sonne (ihres obersten Randes), z. B. die von 27^0 19′, und bemerkt die Zeit, welche in diesen Augenblicken die Uhr angiebt, z. B.

am Vormittag — 9 U. 21′ 31″,
= Nachmittag — 2 U. 35′ 17″, addire 12 St. zur Nachmittagszeit,

$+$ 12

summire alles $+$ 23 U. 56′ 48″
halbire die Summe 11 U. 58′ 24″.

So viel zeigte die Uhr, als die Sonne kulminirte, folglich blieb sie um 1′ 36″ hinter der wahren Mittagszeit zurück. Verwandelt man nach der Zeitgleichung die wahre Zeit in mittlere, so weiß man auch den Stand der Uhr gegen den mittlern Mittag. So kann man sie auf den mittlern Mittag einstellen, oder auch ihre Abweichung in Rechnung bringen.

Um größere Gewißheit zu bekommen, nimmt man mehrere Paare correspodirender Höhen nach einander mit Bemerkung der Uhrzeiten, und aus allen Angaben der Mittagszeit das arithmetische Mittel. Durch diese Repetition werden auch hier die fast unvermeidlichen kleinen Fehler im Observiren sehr vermindert oder ganz vernichtet.

Weil aber die Abweichung der Sonne gegen den Aequator sich von einer Beobachtung bis zur andern verändert, so erreicht sie einerlei Höhen Vormittag und Nachmittag nicht in ganz gleichen Zeiten nach der Kulmination, oder umgekehrt bei gleichen Stundenwinkeln steht sie nicht gleich hoch. Darum bedarf die aus correspondirenden Höhen gefolgerte Mittagszeit einer kleinen Verbesserung, welche durch eigene Sonnentafeln, z. B. die von Zach, (Tab. motuum solis etc.) erleichtert wird. Die Methode der Berechnung dafür sehe man nach in Bohnenberger's geogr. Ortsbest. S. 171 sqq. oder in guten Lehrb. der Astronomie. Braucht man correspondirende Höhen eines Fixsterns, dessen Kulminationszeit nach mittlerm Mittag aus astron. Tafeln bekannt ist, so fällt jene Correction wegen veränderlicher Abweichung weg.

Correspondirende Sonnenhöhen beobachtet man am besten gegen 8 bis 9 Uhr Vormittags und 3 bis 4 Uhr Nachmittags, Fixsternhöhen etwa 3 Stunden vor und nach ihrem Durchgang durch den Meridian, weil um diese Zeiten die Höhenveränderungen schneller vor sich gehen, und also eine genauere Zeitmessung gleicher Höhen möglich machen. Vergl. Bode's Erläut. der Sternkunde S. 129, Bohnenbergers geogr. Ortsbest. S. 180. u. a. m.

Auch aus einzeln gemessenen Sonnenhöhen läßt sich ihr Stundenwinkel, folglich die Zeit berechnen, wenn zugleich die Breite des Ortes, die Abweichung der Sonne und die Zeit der Beobachtung, letztere auch nur ungefähr, bekannt sind; vergl. §. 175. Der berechnete Stundenwinkel wird in Zeit verwandelt nach dem Satz, daß 15^0 eine Stunde = 60 Min., 1^0 also 4 Min. .... 15″ im Bogen 1 Sek. Zeit geben.

Die Kulmination der Sonne oder einzelner Fixsterne wird ebenfalls zur Bestimmung der Zeit und zur

Unterſuchung des Ganges einer Uhr angewendet. Dieſe Methode iſt beſonders auf Sternwarten brauchbar, wo die Beobachtung der Kulminationen durch Paſſagen-inſtrumente in der Mittagsebene ungemein erleichtert wird. Anweiſung und bequeme Tafeln zur erleichterten Berechnung der Zeit aus Durchgängen der Sterne enthalten die tab. mot. sol. von Zach.

Ob eine Uhr der mittlern Sonnenzeit oder der Sternzeit voreile, oder aber zurückbleibe, nehmlich zu langſam gehe, kann man aus zwei oder mehreren auf einander folgenden Kulminationen der Sonne oder eines Sternes und aus den dafür gefundenen Zeitangaben der Uhr finden. Hätte ſie z. B. an einem mittlern Mittage auf 12 Uhr gezeigt, am darauf folgenden aber auf 12 Uhr 14″, ſo iſt ihr Lauf zu ſchnell, ſie eilt nehmlich der mittlern Sonnenzeit täglich um 14″ vor u. ſ. w. Bei jeder aſtronomiſch-geodätiſchen Beſtimmung muß man das Voreilen oder Retardiren der Sekundenuhr, ſo wie ihre vorerwähnte Abweichung, genau kennen, in Rechnung bringen, und damit die falſche Zeit in wahre Zeit verwandeln. Dieſe Verwandlung hat durchaus keine Schwierigkeit, wenn ſonſt die data hierzu richtig ſind. Eilt die Uhr täglich 14″ vor, ſo rechnet man nach dem Satz 12 St. 14″ geben 12 mittlere Sonnenſtunden ꝛc. Das Voreilen oder Zurückbleiben einer ſonſt guten d. h. gleichförmig gehenden Uhr (aſtron. Pendeluhr oder eines Taſchenchronometers) muß genau durch mehrtägige Beobachtungen unterſucht werden, bevor man ſie zu geodätiſchen, beſonders Längenbeſtimmungen, anwendet.

Das Weſentlichſte und Unentbehrlichſte an einer ſolchen Uhr iſt ein gleichförmiger Gang, der ſelbſt von dem Wechſel der Lufttemperatur gar nicht oder doch nur unbedeutend wenig geſtört werden darf. Daß man dieſen gleichförmigen Gang ebenfalls durch aſtronomiſche

Beobachtungen, auch durch Hülfe einer bereits als richtig erprobten aſtronomiſchen Pendeluhr, deren es nur wenige giebt, prüfen könne, brauche ich kaum zu erinnern. Eilt eine Uhr der mittlern Sonnenzeit oder der Sternzeit vor, oder bleibt ſie gegen dieſelbe zurück, ſo muß die Differenz des Voreilens oder des Zurückbleibens an mehreren auf einander folgenden Tagen gleich viel betragen u. ſ. w. Die allermeiſten auch eleganten Taſchenſekundenuhren beſtehen dieſe Prüfungen nicht, können daher nicht zu geodätiſchen Zwecken dienen. Am gleichförmigſten gehen immer die feſtſtehenden Pendeluhren mit Gewichten, nicht mit Federn. Indeſſen hat man auch kleinern Uhren ohne Pendel (Chronometer) in den neuern Zeiten, beſonders in England, eine ſehr große Vollkommenheit in Hinſicht ihres gleichförmigen Ganges durch eine beſſere Hemmung, Sicherung vor dem Einfluß der Lufttemperatur u. ſ. w. zu verſchaffen gewußt.

Correction der Sonnen- und Sternhöhen, wegen der Refraction, der Parallaxe und des Sonnendurchmeſſers.

§. 178.

Aſtronomiſche Strahlenbrechung (Refraction).

So wie es eine terreſtriſche Strahlenbrechung, Refraction (ſ. § 143.) giebt, welche entfernte Gegenſtände auf der Erde über ihren wahren Ort für das Auge des Beobachters erhebt, eben ſo giebt es auch eine aſtronomiſche. Dieſe zeigt die Himmelskörper, Sonne, Mond

und alle Sterne, wenn solche nicht im Scheitelpunkt (Zenith) des Beobachters sind, immer höher, als sie wirklich über dem Horizont stehen, folglich macht sie die beobachteten Höhenwinkel zu groß, oder umgekehrt, deren Complemente die Zenithdistanzen zu klein.

Da das Licht der Himmelskörper die ganze Atmosphäre durchlaufen muß, um auf die Erde zu gelangen, so erleidet es beim Durchgang durch mehrere Luftschichten von ungleichen Dichtigkeiten eine vielmehrmahlige Brechung, folglich wird auch die Wirkung der astronomischen Refraction weit größer, als die der terrestrischen nach §. 143.

Je näher ein Stern am Horizont oder je kleiner der scheinbare Höhenwinkel, desto schiefer fällt das Licht auf die Atmosphäre, desto größer wird die Brechung desselben; am Horizont ist sie am größten. Je näher ein Stern am Zenith steht, desto senkrechter fällt sein Licht auf die Atmosphäre, desto kleiner die Refraction, im Zenith wird solche = o oder jeder Stern erscheint hier an seinem wahren Ort.

Jede gemessene Sonnenhöhe oder Sternenhöhe muß daher um den Refractionswinkel, der der scheinbaren Höhe zugehört, verbessert d. h. vermindert werden. Zenithdistanzen müssen umgekehrt um diesen Winkel vergrößert werden.

Mit der Untersuchung der astronomischen Refraction, welche wegen der veränderlichen Schwere und Wärme der Luft mit vielen Schwierigkeiten und Ungewißheiten zu kämpfen hat, haben sich von jeher die Astronomen eifrig beschäftigt. Je genauer man dieselbe in den neuern Zeiten kennen lernte, desto zuverläßiger wurden die Messungen am Himmel und auch zugleich die astronomischen Ortsbestimmungen auf der Erde.

Besonders haben sich Simpson, der das Gesetz der krummlinigten Bahn des Lichts entdeckte, Brad-

ley, Tob. Mayer Tab. mot. solis et lunae, London 1770), Lambert, und in den neuern Zeiten Laplace, Delambre, Biot u. a. m. um diesen wichtigen Gegenstand verdient gemacht.

Am berühmtesten und auch noch jetzt am gebräuchlichsten ist die Bradleysche Tafel der astronomischen Refraction. Mit einigen kleinen Veränderungen, die in den neuern Zeiten dazu gekommen, findet man die Bradleysche Tafel in allen astronomischen Lehrbüchern, Jahrbüchern und Tafeln, auch in den besonders erschienenen Sonnen- und Mondtafeln, als in Zach's tab. mot. solis; neuere Refractionstafeln nach Piazzi, Delambre und Laplace in den Tables du soleil et de la lune, par Delambre et Bürg. Biot hat darüber ein eignes Werk geschrieben: Recherches sur les refractions etc.

Diese Tafeln geben die Größe der Refraction für verschiedene Höhenwinkel von 0^0, wo sie am größten gegen 33 Min., bis 90^0, wo sie $= 0$ ist. Bei kleinen Höhenwinkeln sind die Differenzen am größten, darum geben auch hier die vollständigern Tabellen die Refraction auf kleinere Fortschreitungen der Höhenwinkel, von Minute zu Minute oder von 5′ zu 5′. Für noch kleinere Fortschreitungen der Winkel von Sekunde zu Sekunde muß man die zugehörigen Refractionswinkel durch Interpoliren (Einschalten) berechnen. Tafeln zum Interpoliren haben Lambert, Lagrange u. a. m. in den astronomischen Jahrb. gegeben.

Eine vollständige Tafel der astron. Refraction oder Strahlenbrechung würde hier zu viel Platz einnehmen, und kann von jedem, der wirklich astronomische Beobachtungen zu geodätischen Zwecken anzustellen hat, in astron. Schriften, auch in Bohnenbergers geogr. Ortsbest. nachgesehen werden. Hier mag es Beispielshalber an ein paar Angaben der Art genügen.

Mittlere aſtronomiſche Refraction:

Scheinbare Höhe.	Refraction.	Scheinbare Höhe.	Refraction.
0° 0′	33′ (Min.) nahe	1°	24′ 28″
0° 5′	32′ 10″	1° 30′	21′ 15″
2°	18′ 35″	40°	1′ 8″
3°	14′ 36″	45°	0′ 57″
5°	9′ 54″	50°	0′ 48″
10°	5′ 15″	60°	0′ 33″
20°	2′ 36″	70°	0′ 21″
30°	1′ 38″	80°	0′ 10″
		90°	0′ 0″.

Die mittlere aſtron. Refraction hängt mit der Barometerhöhe 27 Z. 8 Lin. Par. und einer Lufttemperatur von 8° Reaum. zuſammen. Bei andern Barometer- und Thermometerſtänden erleiden die mittlern Refractionen additive oder ſubtractive Veränderungen von mehreren Sekunden. Solche Correctionstabellen findet man ebenfalls in den aſtron. Schriften. — Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Refraction nahe am Horizont und bei kleinen Höhenwinkeln ungefähr von 0° bis 10° veränderlich und oftmahls größer iſt, als ſie nach den Berechnungen ſeyn ſollte. Darum nimmt man Sonnen- und Sternenhöhen gern bei größern Elevationen näher am Zenith, um die Ungewißheit wegen der veränderlichen Refraction und der davon abhängenden Verbeſſerung der gemeſſenen Winkel zu vermindern.

Den Gebrauch der Tabellen für die Strahlenbrechung iſt einfach. Hätte man z. B. die Höhe der Sonne, des Mondes oder eines Fixſternes = 30° gefunden, ſo müßte man davon ungefähr 1′ 38″ ſubtrahiren, um den wahren Höhenwinkel zu erhalten; zu einer gemeſ-

senen Zenithdistanz = 60° wäre dagegen 1′ 38″ zu addiren.

§. 179.

Parallaxe der Sonne. (Fig. 127.)

Was man unter einem parallaktischen Winkel zu verstehen habe, dessen ist schon früher bei mehreren Gelegenheiten in diesem Werke Erwähnung geschehen. Die Parallaxe (parall. Wink.) verursacht, daß wir ein entferntes Richtobject von zwei verschiedenen Standpunkten aus nach verschiedenen Richtungen, also nicht an einem und demselben scheinbaren Orte sehen.

Die astronomische Parallaxe bewirkt, daß wir die nähern Himmelskörper, als den Mond, die Sonne von einem Ort auf der Erdoberfläche aus unter andern Höhenwinkeln, an einem andern scheinbaren Ort des Himmelsgewölbes erblicken, als solche vom Mittelpunkt der Erde aus erscheinen würden.

In der Astronomie und auch in der höhern Geodäsie, namentlich bei Messungen von Polhöhen, werden alle Winkel auf den Mittelpunkt der Erde als einen gemeinschaftlichen Vergleichungspunkt bezogen. Da wir aber vom Mittelpunkt der Erde aus keine Winkel gegen Richtobjecte am Himmel messen können, so müssen wir die auf der Erde genommenen Winkel um die sogenannte Parallaxe verbessern, nehmlich vergrößern, um die Winkel zu erhalten, unter denen wir die Himmelskörper vom Mittelpunkt der Erde aus sehen würden.

Da der geometrische Begriff der astronomischen Parallaxe äußerst einfach ist, so will ich die Erläuterung desselben in wenig Worte zusammendrängen.

Es stelle (Fig. 127.) CA den Halbmesser der

Erde vor, A einen Beobachtungsort, B und F einen Himmelskörper, z. B. den Mond oder die Sonne, in zwei verschiedenen Stellungen gegen A, doch so, daß CB = CF bleibe. Steht der Himmelskörper bei B im scheinbaren Horizont von A, so sieht man ihn von A aus in der Richtung AL, vom Mittelpunkt der Erde von C aus in der Richtung CK. Bei A hat also B gar keine Höhe über dem Horizont des Beobachters, bei C hingegen erscheint er unter dem Höhenwinkel ECB. Dem scheinbaren Horizont AB entspricht am Mittelpunkt der Erde der wahre Horizont CE. Der Winkel ABC heißt die Horizontalparallaxe in Beziehung auf A und seinen scheinbaren Horizont. Da ABC = BCE, so ist der reducirte Höhenwinkel, welcher bei A scheinbar = 0°, die Horizontalparallaxe selbst. Kennt man also diese, so setzt man sie für 0° der Beobachtung.

Steht derselbe Himmelskörper bei gleicher Entfernung von der Erde, nehmlich CF = CB = CE, über dem Horizont von A etwa bei F, so ist seine scheinbare gemessene Höhe der ∠BAF, die reducirte Höhe der ∠ECF. Bei A sieht man den Himmelskörper von A aus scheinbar in H, von C aus in G, folglich bei A zu niedrig. Der parallaktische Winkel AFC heißt die Höhenparallaxe in Beziehung auf den scheinbaren Horizont AL des Ortes A.

Nach Sätzen der Elementargeometrie ist:

$$\angle ECF = \angle BMF = \angle BAF + \angle AFC.$$

Hieraus folgt, daß man die Höhenparallaxe immer zur scheinbaren gemessenen Höhe BAF addiren muß, um den auf den Mittelpunkt der Erde reducirten Winkel ECF zu erhalten. Demnach hat die Parallaxe auf die gemessenen Höhen am Himmel einen Einfluß, welcher dem der astronomischen Refraction gerade entgegen-

gesetzt ist. Letztere macht die gemessenen Höhen zu groß, erstere zu klein. Indessen ist die additive Correction der Parallaxe, besonders bei Sonnenhöhen, um vieles geringer als die subtractive der Refraction. Viel beträchtlicher ist die Mondparallaxe.

Aus dem Halbmesser der Erde CA und aus der Entfernung eines Himmelskörpers CB ließe sich die Horizontalparallaxe ABC trigonometrisch ableiten, nehmlich:

$$CB : CA = \text{sin. tot.} : \text{sin. } ABC$$

$$\text{also sin. } ABC = \frac{CA \cdot \text{sin. tot.}}{CB.}$$

Hieraus folgt, daß die Horizontalparallaxe um so kleiner werden muß, je größer CB oder je weiter ein Himmelskörper von der Erde entfernt ist. Die Entfernungen der Fixsterne sind in Verhältniß gegen den Halbmesser der Erde CA als unendlich groß zu betrachten. Darum giebt es auch weder eine Horizontal- noch eine Höhenparallaxe für die Fixsterne. Am größten muß die Mondparallaxe, unbeträchtlicher die Sonnenparallaxe, seyn. Kennt man die Horizontalparallaxe BCE, so kann man daraus und aus einem gemessenen scheinbaren Höhenwinkel BAF die zugehörige Höhenparallaxe AFC trigonometrisch herleiten. Es ist

$CA : CB = \text{sin. } ABC : \text{sin. tot.}$

$CA : CF = \text{sin. } AFC : \text{sin. } CAF$ oder sin. ZAF, oder cos. BAF.

Daher für $CB = CF$

Sin. ABC : sin. tot. = sin. AFC : cos. BAF, folglich

$$\text{Sin. } AFC = \frac{\text{sin. } ABC \cdot \text{cos. } BAF}{\text{sin. tot.}}$$

raus erhellt nach trigonometrischen Sätzen zweierlei: daß jede Höhenparallaxe immer kleiner seyn muß die Horizontalparallaxe, 2) daß die Höhenparall- sich gegen einander verhalten, wie die Cosinus scheinbaren Höhen, oder die Sinus ihrer Comple- te, nehmlich der Zenithdistanzen. Sie nehmen also ner mehr ab, je größer die scheinbaren Höhen oder leiner die Zenithdistanzen werden. Steht ein Him- skörper im Scheitelpunkt (Zenith) Z des Beobach- gsortes A, so wird die Höhenparallaxe, folglich auch Correction der gemessenen Höhe = o.

Umgekehrt kann man auch nach obiger Formel einer bekannten Höhenparallaxe die Horizontal- allaxe berechnen.

Wie man die Horizontal- und darnach auch die henparallaxe eines Himmelskörpers, gegen dessen fernung der Erdhalbmesser noch eine beträchtliche, ch immer sehr kleine, Größe ist, durch astronomische obachtungen bestimmen könne, und wirklich annä- nd gefunden habe, muß man in astronomischen oder h in größern physikalischen Werken nachsehen.

Die Horizontalparallaxe der Sonne *) ist bei ih- mittlern Entfernung von der Erde = 8″, 5 ($8\frac{1}{2}$ k.) gefunden worden. Hierzu haben mehrere Durch- ge der Venus, hauptsächlich der vom J. 1769. ge- nt. Bei einer so geringen, schwerlich bis auf ein ntel einer Sekunde auszumittelnden Größe, können Angaben verschiedener Astronomen nicht anders als rschieden ausfallen. Lalande setzt sie = 8, 6″,

*) Sie kann, da sie äußerst gering, nicht so directe wie die- jenige des Mondes, sondern nur mittelbar durch die bereits bestimmten Parallaxen der nächsten Planeten, besonders des Mars und der Venus (bei ihrem Durchgang durch die Sonnenscheibe) gefunden worden.

Pingré = 8″, 8, Hell = 8, 7″, Delambre in s. Sonnentafeln = 8, 8″ u. s. w.

Bei dieser, obschon kleinen, Ungewißheit bleibt in Bestimmung der Sonnenferne, die eben aus ihrer Parallaxe geschlossen wird, eine Ungewißheit von vielen tausend Meilen.

Daß die Sonnenparallaxe so klein ist, rührt von ihrer ungeheuern Entfernung, im Mittel = 24000 Erdhalbmessern, her. Wenn man auf der Erde einen Gegenstand von 1 Fuß Durchmesser eine Meile weit sieht, so erscheint er ungefähr unter demselben Sehewinkel. Unter diesem Winkel verschwindet er aber für das Auge, vergl. §. 97.

Die Horizontalparallaxe der Sonne verändert sich übrigens ein wenig nach ihren verschiedenen Abständen von der Erde. Die Unterschiede wegen der Abplattung der Erde unter verschiedenen Breitegraden kommt aber dabei in gar keine Betrachtung, wie bei der viel größern Mondparallaxe, welche am Aequator 61′ 32″, unter dem Pol 61′ 20″ beträgt, wenn nehmlich der Mond der Erde am nächsten steht; am kleinsten wird letztere = 53′ 52″.

Abgekürztes Täfelchen der Sonnenparallaxe, wenn sie im Horizont = 8″,5 gesezt wird.

Höhenwinkel	Im Januar	Im April u. October	Im Jul.
0°	8, 64 Sek.	8, 50	8, 35
8°	8, 56	8, 42	8, 27
12°	8, 46	8, 32	8, 20
16°	8, 30	8, 17	8, 05
20°	8, 12	8, 09	8, 00
24°	7, 90	7, 77	7, 65
28°	7, 77	7, 64	7, 52
32°	7, 30	7, 21	7, 10
36°	6, 97	6, 88	6, 77
40°	6, 60	6, 51	6, 41
48°	5, 78	5, 69	5, 59
56°	4, 80	4, 75	4, 68
60°	4, 30	4, 25	4, 20
64°	3, 78	3, 73	3, 68
70°	2, 96	2, 91	2, 88
80°	1, 50	1, 48	1, 45
84°	0, 90	0, 89	0, 87
86°	0, 60	0, 59	0, 58
90°	0, 00	0, 00	0, 00

§. 180.

Correction der Sonnenhöhen wegen ihres scheinbaren Durchmessers.

Bei jeder Messung einer Sonnenhöhe, auch im Mittag, beobachtet man ihren obersten, auch wohl ihren untersten Rand. Da man aber die Erhöhung ihres Mittelpunktes verlangt, so muß man im ersten Falle ihren halben scheinbaren Durchmesser, d. h. den Sehewinkel, unter welchem er uns erscheint, vom observirten Höhenwinkel subtrahiren, im zweiten Falle aber dazu addiren.

Der scheinbare Sonnendurchmesser ist etwas veränderlich. Nach äußerst sorgfältigen mikrometrischen Messungen der Astronomen ist er zur Zeit des Wintersolstitiums, wo die Sonne der Erde am nächsten steht, am größten = 32′ (Min.) 35″,6, am kleinsten zur Zeit des Sommersolstitiums = 31′31″, der mittlere = 32′3,3″ zur Zeit der Aequinoctien.

Dieser Unterschied rührt her von der elliptischen Bahn, in welcher sich scheinbar die Sonne jährlich um die Erde bewegt, und in deren einem Brennpunkte die Erde steht. Der größte Durchmesser des Mondes ist = 33′31″, der kleinste = 29′22″, der mittlere = 31′7″. — Hätte man nun z. B. zur Zeit der längsten Tage eine Sonnenhöhe, nehmlich ihres obern Randes, = 41°53′31″ gefunden, so müßte man den Sonnenhalbmesser = 16′17,8″ davon subtrahiren, um die gesuchte Höhe des Sonnenmittelpunktes = 41°37′13,2″ zu erhalten.

Die Fixsterne zeigen auch durch Fernröhre mit der stärksten Vergrößerung keinen scheinbaren Durchmesser; mithin fällt bei Messung der Sternhöhen die Correction

l, welche bei Sonnenhöhen nie vernachläßigt werden
f.

§. 181.

ber die Meſſung der Sternhöhen oder enithdiſtanzen vermittelſt des Borda- ſchen Kreiſes.

Mißt man Sonnen- oder Sternhöhen mit einem uadrant oder Sextant, ſo bedarf es hierzu einer hori- ıtalen Viſirlinie, eines natürlichen oder künſtlichen ›rizontes. Bei Anwendung eines Mayer-Borda- en Multiplikationskreiſes iſt man nicht allein dieſer mer ſchwer zu erfüllenden Bedingung überhoben, ſon- :n man erlangt damit auch zugleich den Vortheil der inkelrepetition; vergl. §. 62 und 63. III. Abth.

Mit dem Bordaſchen Kreis mißt man zwar nur : Zenithdiſtanzen der Himmelskörper; da aber die ›mplemente derſelben zu 90° ihre Höhen geben, ſo hält man damit zugleich Sonnen-, Mond- u. Stern- öhen, und zwar um vieles genauer, als mit einem uadrant, Sextant ꝛc.

Zu Beſtimmungen der höhern Geodäſie, wo man e äußerſte Schärfe und Genauigkeit beabſichtigt, als t derjenigen der geographiſchen Breiten, zu Gradmeſ- ıngen u. ſ. w., wo Sonnen- und Stern-Höhen oft ge- ıaucht werden, iſt der Bordaſche Kreis nach der beſten onſtruction unſtreitig jedem andern bis jetzt bekann- :n Winkelmeſſer vorzuziehen.

Um eine Zenithdiſtanz mit dem Bordaſchen Kreis, eſſen Beſchreibung im §. 37. Fig. 35, 36, 37 gegeben ›orden, zu meſſen, muß er zuvörderſt auf einer ganz eſten, nicht merklich zu erſchütternden Unterlage durch in Bleiloth, durch die Stellſchrauben und Libellen ſo

gestellt werden, daß die Ebene des obern Kreises vollkommen vertikal steht, und auch bei jeder Azimuthalbewegung in dieser vertikalen Stellung bleibt; vergl. Fig. 36. 37.

Zur wirklichen Messung einer Zenithdistanz gehören zwei geschickte, mit dem Instrumente vertraute und wohl eingeübte Beobachter, von denen einer das obere Fernrohr oo (Fig. 35. 36) nach dem himmlischen Objecte einrichtet und observirt, der zweite aber die Libelle am untern Fernrohr uu richtig einstellt und in Ordnung erhält.

Zwei Beobachter sind auch darum nöthig, weil wegen der Höhenänderung der Sonne und Sterne in kurzen Zeiträumen die repetirende Winkelmessung äußerst schnell vor sich gehen muß, damit man während der Kulminationszeit die größtmögliche Anzahl von Multiplicationen und somit die gesuchte Zenithdistanz genauer erhalte. Das obere Fernrohr muß sich übrigens parallel zur Kreisebene bewegen, das Fadenkreuz (am besten von Spinnefäden) im Brennpunkt des Fernrohrs so gestellt seyn, daß der eine Faden genau vertikal, der andre horizontal stehe. Diese Stellung prüft und berichtigt man am einfachsten durch eine Senkrechte, welche man mittelst eines Bleilothes an einer entfernten Wand bezeichnet hat, und eine zweite Horizontale, welche jene unter einem rechten Winkel durchkreuzt, worauf man durch das Fernrohr visirt u. s. w.

Die Acte der Messung selbst will ich meinen Lesern nur mit wenig Worten, und ich hoffe auch damit deutlich genug, vor Augen legen.

1) Der vertikal gestellte Kreis wird durch Azimuthalbewegung in die Vertikalebene gebracht, worin das himmlische Object liegt, dessen Zenithdistanz man verlangt. Der erste der vier Nonien (Indices) wird auf 0° der Limbustheilung gestellt,

die Angaben der andern Nonien werden genau abgelesen und notirt. Indessen ist diese Stellung des einen Nonius auf 0° nicht durchaus nothwendig; der Anfangspunkt der Winkelmessung kann auch von einem andern Theilstrich des Limbus ausgehen. Doch muß die Gradzahl dieses Anfangspunktes, so wie die der übrigen drei (oder 1) Nonien genau bemerkt werden, um solche am Ende der Messung in Rechnung bringen zu können.

2) Man dreht den Kreis sammt dem an ihm befestigten Fernrohr um seine horizontale Achse B (Fig. 37.) so weit herum, durch gröbere schnelle und sanfte Bewegung, bis man den Gegenstand am Himmel in der Richtung der Fernrohrachse erblickt. Während dem stellt der zweite Gehülfe die Libelle am untern Fernrohr durch gröbere und feinere Bewegung horizontal, bei welcher Bewegung der Kreis nicht gedreht wird. Sobald nun die Luftblase in der Mitte und zugleich das Fernrohr gegen das himmlische Object gerichtet steht, oder der horizontale Faden des Fadenkreuzes den Zielpunkt am Himmel deckt (abschneidet), so ist die erste Beobachtung beendet. Bei Einstellung des Fernrohrs und der Libelle müssen beide Gehülfen sich gegenseitig schnell verständigen. Es hält immer etwas schwer, das rechte Ziel in möglichst kurzer Zeit zu erreichen. Darum müssen beide Beobachter wohl eingeübt seyn.

3) Der erste Beobachter dreht den vertikalen Kreis durch Azimuthalbewegung auf der Säule K (Fig. 37.) um 180° herum, so daß nun seine Limbusebene links nach Osten steht, wenn dieselbe erst rechts gegen Westen stand. Jetzt ist das Fernrohr gegen Norden gekehrt, wenn es zuvor gegen Süden stand. Indem der eine Gehülfe durch Bewe-

gung des Kreises das untere Fernrohr wieder horizontal oder die Libelle wieder richtig (die Luftblase in die Mitte) einstellt, dreht der erste Beobachter das obere Fernrohr, ohne daß sich der Kreis mit bewegt, wieder südlich herum auf denselben himmlischen Gegenstand. Da sich bei diesen beiderseitigen Bewegungen der obern und untern Alhidade gegenseitige Störungen der richtigen Lagen finden, so müssen beide Gehülfen so lange im Berichtigen und Stellen fortfahren, bis die Luftblase in der Mitte steht und zu gleicher Zeit das Fernrohr gegen den Zielpunkt am Himmel, wie bei der ersten Beobachtung. Ob der Kreis bei der Umdrehung vertikal geblieben sey, zeigt das kleine Queerniveau seiner horizontalen Achse B (Fig. 37.) an. Im Fall einer geringen Neigung verbessert man sie durch die Stellschrauben, bis das kleine Niveau wieder richtig einsteht, und so den vertikalen Stand des Kreises anzeigt.

Nach dieser zweiten Beobachtung ist eine Doppelrepetition der Winkelmessung vollbracht, und der erste, so wie die übrigen Nonien (Indices), haben einen Bogen durchlaufen, der in Gradmaß zweimahl so groß ist, als die gesuchte Zenithdistanz. Die Hälfte des Winkels, den die Indices angeben, ist daher der einfachen Zenithdistanz gleich.

Die Acte der ersten und zweiten Observation (N° 2 und N° 3) kann sich der Leser nach Fig. 24. Tab. II. ganz klar machen. A kann hier die Sonne oder einen Stern, B den Scheitelpunkt (Zenith) des Beobachters in C vorstellen. Das obere Fernrohr steht bei der ersten Beobachtung in der Lage Co, nach der zweiten in der Lage Co''; die doppelte Zenithdistanz giebt der Bogen oo'',

und dieser durch 2 dividirt die einfache = BCA u. s. w.

Daß diese erste Observation des doppelten Winkels noch einmahl oder mehrere Mahle wiederholt (multiplicirt) werden könne, und wie dies geschehe, bedarf keiner weitläufigen Auseinandersetzung. Man dreht den Kreis wieder um 180° herum gegen Westen, und richtet das Fernrohr, befestigt am Kreis, durch Drehung des letztern von neuem auf den Zielpunkt am Himmel, wobei der zweite Gehülfe das Niveau wieder einstellt, wie vorher gelehrt worden. Sodann wendet man den Kreis wieder um 180° herum nach Westen, und verfährt weiter wie bei der ersten und zweiten Beobachtung.

So erhält man durch fortgesetzte Multiplikation erst die zweifache, dann die vierfache, dann die sechsfache Zenithdistanz u. s. w. Wie man hieraus zuletzt den einfachen Winkel ableitet, ist in §. 62 erklärt worden. Wenn man z. B. nach 25mahliger Multiplikation oder nach 50mahliger einfachen östlichen und westlichen Observation, wobei die ganze Kreisperipherie mehrere Mahle durchlaufen worden seyn kann, nach einem arithmetischen Mittel aus den Angaben der zwei oder vier Nonien den vielfachen Winkel = 2038° 59′ 14″ erhielte, so wäre die einfache Zenithdistanz = 40° 46′ 47,08″, woraus sich ihr Complement zu 90°, nehmlich der Höhenwinkel = 49° 13′ 12,92″ ergäbe.

Man kann nach jeder einzelnen Doppelmessung des Winkels die Angaben der 2 oder 4 Nonien ablesen; indessen ist dies bei der Schnelligkeit, womit die Beobachtungen geschehen müssen, nicht immer möglich und hinreichend, die letzten

Angaben der Nonien in Rechnung zu bringen.

Die Hauptsache bei solchen Messungen kommt darauf an, daß erstlich der ganze Kreis auf einer äußerst festen unerschütterlichen Grundlage stehe, und zweitens, daß derselbe bei jeder Drehung hung vertikal bleibe. Wie man diese Stellung vorläufig zu prüfen, und mittelst der Stellschraube und Libellen zu corrigiren habe, läßt sich aus dem beurtheilen, was früherhin im §. 69 von Berichtigung der Libellen und im §. 82 von der Ajustirung des Niveau's bemerkt worden.

Ich füge hierzu noch folgende nothwendige Erinnerungen:

Bei jeder Messung einer Zenithdistanz geschehe die Beobachtung in einem bestimmten Punkt des Sehefeldes vom Fernrohr, am besten in einer Entfernung vom Vertikalfaden nach beiden Seiten desselben links und rechts, bei der zweiten Observation nach der entgegengesetzten Seite, weil beim Umwenden des Kreises um 180^0 das Fernrohr in eine umgekehrte Lage kommt. Beobachtet man die Sonne, so schneidet man einen, z. B. den obern Sonnenrand bei der ersten Observation (westlichen Stellung der Limbusebene) mit der untern Schärfe des Horizontalfadens vom Fadenkreuz ab, bei der zweiten Observation hingegen mit der obern Schärfe desselben, ebenfalls wegen Verkehrung des Fernrohrs. Nähme man bei der ersten Observation den obern, bei der zweiten den untern Sonnenrand, so erhielte man directe die Zenithdistanz vom Mittelpunkt der Sonne, folglich bedürfte es dann nicht der Correction wegen des scheinbaren Sonnenhalbmessers (§. 180), der doch immer wenigstens bis auf $1''$ ungewiß bleibt.

Jede Messung durch Multipliciren muß so schnell als möglich vollbracht werden, damit sich während der-

selben die Höhe des Himmelskörpers nicht beträchtlich ändere. Bei sehr genauen Observationen müssen an einer Uhr die Zeiten bemerkt werden, um die ihnen zukommenden geringen Höhenänderungen am Ende in Rechnung zu bringen. Beim Kulminiren der Himmelskörper betragen ihre Höhenänderungen in kleinen Zeiträumen von einer oder ein paar Minuten nur unbedeutend wenig.

Beobachtet man die Sonne, so schwächt man ihr Licht durch ein sehr dunkles Glas zwischen dem Auge und dem Okular des Fernrohrs. Den Strahlenglanz (Irradiation sehr heller Fixsterne, z. B. des Sirius, Arcturus, auch des Polarsterns, welcher Glanz das scharfe Pointiren erschwert, schwächt man am besten durch ein hellgrünes Augenglas.

Bei nächtlichen Observationen muß man das Fadenkreuz im Fernrohr stark beleuchten, und dadurch für das Auge des Beobachters sichtbar machen. Dies geschieht vermittelst eines am obern Fernrohr angesteckten versilberten Illuminators oder reflectirenden Hohlspiegels, den man so stellen kann, daß das von einem brennenden Wachsstock oder einer kleinen Laterne seitwärts auffallende Licht von ihm in das Fernrohr reflectirt wird. Der kleine Illuminator ist in Fig. 35. Tab. IV. angedeutet.

Was sonst noch über das Messen der Zenithdistanzen und anderer Winkel mit dem Bordaschen Kreis zu bemerken wäre, das erlernt sich besser durch eigne aufmerksame Betrachtung und Handhabung des Instrumentes selbst. Mir scheint das Operiren damit so gar schwer nicht, als es von mehreren Geometern beschrieben worden. Wer noch weitere Anweisung hierzu begehrt, kann solche in mehreren Schriften finden, besonders gut in dem klassischen Werke von Delambre: Base du Syst. mètr., in verschiedenen Heften der

Zach'schen Corresp. ꝛc., in Zach's Nachrichten von der Aufnahme von Thüringen u. s. w. S. 112 sqq. u. a. m. Für gute Köpfe wird aber wahrscheinlich auch das hier Gesagte schon völlig ausreichen.

Bestimmung der geographischen Breiten der Oerter auf der Erde.

§. 182.

Allgemeiner Begriff von Polhöhe, Aequatorhöhe und geographischer Breite.

(Fig. 128.)

Der Begriff von der geographischen Breite der Oerter auf der Erde wird jetzt überall in bessern Schulen erklärt, und in allen geographischen Büchern auseinandergesetzt. Ich werde daher nur kurz davon handeln, und vorzüglich das erläutern, was die Astronomie zu Bestimmungen der Art vermag.

Es stelle (Fig. 128.) SCN die Erdachse, N den Nordpol und S den Südpol derselben vor. Gedenkt man sich die Erdachse bis an das Himmelsgewölbe verlängert, so wird der Punkt P den Nordpol am Himmel in Beziehung auf die Umdrehungsachse der Erde bezeichnen. EQ und eine durch dieselbe gelegte, in Gedanken ebenfalls bis an den Himmel erweiterte, Ebene bedeutet den Aequator der Erde. Jeder Punkt im Aequatorkreis ist von seinem Pol N oder S um einen Bogen von 90^0 entfernt.

Ist A ein Ort auf der Erdoberfläche, und SEAN

urch A und durch die Pole S, N laufender größ-
Halbkreis oder der terreſtriſche Meridian des Ortes
ſo giebt der Bogen EA in Gradmaß, von Punkt
n Aequator an gerechnet, die geographiſche Breite
Ortes A. Gedenkt man ſich die Ebene ECA bis
en Himmel erweitert, ſo erhält man einen Bogen
Himmel, der in Gradmaß eben ſo viel beträgt, als
terreſtriſche Bogen EA oder, wenn die Erde keine
kommene Kugelgeſtalt hat, ſo viel als der corre-
ndirende Winkel ECA am Mittelpunkt der Erde.
mittelſt des aſtronomiſch beſtimmten Winkels ECA
des ihm am Himmel entſprechenden Bogens läßt
demnach die geographiſche Breite des Ortes A an-
en.

AD bezeichne die durch A gelegte Horizontal-
ne, BB' die ihr entſprechende parallele durch den
ttelpunkt der Erde gelegte Ebene, Z das Zenith des
tes A.

In dieſer Verbindung heißt PCZ die Polardi-
nz, PCB die Polhöhe und ECB' die Aequatorhöhe
s Ortes.

Da $B'CZ = ECP = ZCB = 90^0$, ſo folgt
raus:

1) ECZ oder Bogen $EA = BCP$, nehmlich die Polhöhe des Ortes A iſt gleich ſeiner geographiſchen Breite; daher die aſtronomiſche Beſtimmung der Polhöhen die geographiſchen Breiten giebt.

2) $B'CE + ECA = 90^0$, nehmlich die Breite oder Polhöhe macht mit der Aequatorhöhe eines Ortes A zuſammen 90^0; daher läßt ſich durch bloße Subtraction von 90^0 die Aequatorhöhe aus der Breite oder Polhöhe, und umgekehrt aus der Aequatorhöhe die Breite eines Ortes A finden. Wenn z. B. die Polhöhe oder Breite von Berlin

$= 52^0\,31'\,46''$ gefunden worden, so ist seine Aequatorhöhe $= 37^0\,28'\,14''$.

Meistens leitet man aus der directe beobachteten Polhöhe die Aequatorhöhe ab; zuweilen bestimmt man aber erst aus der Mittagshöhe und aus der Abweichung eines Sternes, besonders der Sonne, die Aequatorhöhe, und aus dieser sodann die Polhöhe oder Breite.

3) $ECA + ACP = 90$; daher läßt sich aus der Zenithdistanz des Nordpols am Himmel die Polhöhe oder Breite eines Orts ableiten.

4) $ACP = B'CE$, nehmlich die Polardistanz ist immer der Aequatorhöhe eines Ortes gleich.

Wir wollen nun sehen, welche Mittel der Astronomie zu Gebote stehen, um die Polhöhen, oder umgekehrt die Aequatorhöhen, eines terrestrischen Ortes bis zur Genauigkeit von einer oder einigen Sekunden zu messen — denn weiter mag diese Genauigkeit wohl nie oder nur äußerst selten gehen.

§. 183.

Astronomische Bestimmung der Polhöhen aus den Kulminationen der Circumpolarsterne. (Fig. 128.)

Stände genau im Nordpol P am Himmel ein Fixstern, so würde derselbe bei der Umdrehung der Erde um ihre Achse SN immer einerlei Höhe über dem scheinbaren Horizont AD des Ortes A behalten, der Höhenwinkel DAP oder vielmehr BCP bliebe unveränderlich. Man dürfte daher nur DAP messen, um die wahre Polhöhe BCP und somit den Breitenwinkel ECZ des Ortes A zu erhalten.

Eigentlich ist der im Horizont von A gemessene Winkel DAP nicht $=$ BCP; denn BCP $=$ DGP

) A P + A P G. Wenn aber P ein Fixstern ist,
ırf man seine Parallaxe, nehmlich den W. A P G
setzen, daher ohne Fehler den beobachtenden Win-
) A P, nachdem er wegen der Refraction verbessert
)en, für die wahre Polhöhe B C P annehmen. Bei
Kleinheit des Erdhalbmessers, der im Verhältniß
n die gleichsam unendlich großen Entfernungen der
erne ein Punkt wird, fallen die beiden Horizonte
) und B B′ in einen zusammen, man sieht bei A
ı so die Hälfte des Sternhimmels als bei C, und
ist ganz gleichgültig, ob man in A den Winkel
P mißt, oder in C den Winkel B A P mäße, wenn
mlich P ein Fixstern, aber kein naher Himmelskör-
, z. B. die Sonne ist.

Es steht jedoch kein Fixstern genau im Nordpol P.
bst der Polarstern im Schwanz des kleinen Bä-
ist noch um ungefähr 1°44′ im Bogen vom Pole
fernt *). Daher beschreiben auch alle Circumpolar-
ne, welche dem Pole P nahe stehen und für den Ho-
)nt des nördlichen Ortes A nicht untergehen, größere
r kleinere Kreise um den Weltpol. Sie gehen zwei-
hl durch den Meridian des Ortes A und ihre obere
d untere Kulmination, größte und kleinste Höhe über

---

*) Die Polardistanz dieses Sterns ist wegen des Vorrückens der Nachtgleichen (Zurückweichens der Aequinoctialpunkte) veränderlich und jetzt im Abnehmen; im J. 2105 wird er nach den Berechnungen der Astronomen dem Weltpol am nächsten, nehmlich bis auf 28′ kommen, und sich hierauf wieder von ihm entfernen, Dann wird der Stern γ im Sternbilde Cepheus an die Stelle des jetzigen Polarsterns kommen. Delambre und Méchain fanden im Jahr 1796 die Deklination (Abweichung vom Aequator) des Polarsterns durch 500mahlige Observation mit dem Bordaschen Kreise = 88° 13′ 7,3″, ihre jährliche Veränderung = + 19,52″ u. s. w. Vergl. die größern astron. Werke.

dem Horizont von A kann unter günstigen Um
bei A observirt werden, nehmlich am besten in
Winternächten, wo ein solcher Stern des Abends
dem Pol und 12 Sternstunden nachher am M
wenn es noch finster ist, unter dem Pol kulmini

Nun seyen beide Höhen (Fig. 128.) die g
BCO und die kleinste BCU gemessen und wg
Refraction verbessert, so giebt offenbar ihre halbe
me die gesuchte Polhöhe BCP. Dasselbe erhält m
wenn man die halbe Differenz beider Höhen zu
nern addirt oder von der größern subtrahirt. S
$BCO = 56^0$, $BCU = 48^0$, so erhielte man BC
$\frac{56 + 48}{2} = 52^0$ die Polhöhe oder Breite des B
achtungsortes A.

Zu einer solchen Beobachtung wählt man am
sten einen solchen kenntlichen Stern, der dem S
am nächsten steht, dessen kleinste Höhe am gerin
ist und also ihrer größten Höhe am nächsten k
weil die Correction wegen der astronomischen Refra
(Strahlenbrechung) bei kleinern Höhen weit unsi
wird, als bei größern. Daher ist auch von jeher
Polarstern, α des kleinen Bären, zu Breitenbes
mungen in nördlichen Ländern vorzugsweise em
worden. Auf diese Art beobachtete man in Peters
die größte Höhe d. Pol.St. $= 62^0\,5'\,35''$
Refr. $= \quad -31''$
die kleinste Höhe $= 57^0\,48' -$
Refr. $= \quad -37''$
Daher die Breite von Petersburg $= 59^0\,56'\,13''$.
In einem neuern Verzeichniß steht sie $= 59^0\,56'\,23''$.

Zur Messung der Höhen wurde früher ein Mau
quadrant, der schon in der Mittagsebene steht, oder
beweglicher Quadrant, der sich in diese Ebene stel
läßt, angewendet. Größere Gewißheit verschafft je

eitig ein Bordascher Kreis. Der Sextant mit lichem Horizont ist hier nicht wohl zu gebrauchen, bei einer Messung von Sonnenhöhen.

Die Kulminationszeiten des Sterns erfährt man äufig durch correspondirende Höhen desselben und wohlberichtigte Uhr. Diese Zeiten wartet man ab, observirt jetzt die größte und kleinste Höhe des rns.

Mißt man mit einem Bordaschen Kreis die Zehdistanzen des Polarsterns, nehmlich die größte ZCU die kleinste ZCO, so giebt ihre Hälfte die Aequahöhe, und deren Complement die Polhöhe oder Breite A. Auf solche Weise bestimmte v. Zach im Jahr 04 die Breite der Seeberger Sternwarte also:

den 10. Jan.

$ZCO = 37^0\ 20'\ 1'',7$
$ZCU = 40^0\ 47'\ 42'',2$ } durch 100 Observ.

den 11. Jan.

$ZCO = 37^0\ 20'\ 2'',6$
$ZCU = 40^0\ 47'\ 42'',2$ } 100 Observ.

den 24. Jan.

$ZCO = 37^0\ 20'\ 3'',4$
$ZCU = 40^0\ 47'\ 42'',5$ } 100 Observ.

Das arithmetische Mittel aus diesen nur sehr wenig von einander abweichenden Angaben gab die Aequatorhöhe $B'CE = ZCP = 39^0\ 3'\ 52'',43$, folglich ihr Complement die Polhöhe oder Breite der Seeberger Sternwarte $= 50^0\ 56'\ 7'',57$.

Auch mit den besten Winkelmessern (repetirenden Kreisen) und bei aller Geschicklichkeit und Vorsicht im Beobachten kann man dennoch auf 1 oder ein paar Sekunden in Breitenbestimmungen fehlen, und diese Ungewißheit läßt sich bloß durch vervielfältigte Beobachtun-

gen, auch mit Zuziehung verschiedener Circumpolarsterne, vermindern bisweilen auch wohl gänzlich vertilgen. Wenn verschiedene Bestimmungen einer Breite auch noch durch andere Methoden, als die eben angezeigte, unter einander immer ganz oder doch bis auf Zehntel einer Sekunde harmoniren, so kann man wohl auf eine Genauigkeit bis auf 1″ fest vertrauen. Als v. Zach nach einer zweiten Methode, wobei die Zenithdistanzen des Polarsterns bei seiner obern und untern Kulmination gemessen, und seine Abweichung (Deklination) als bekannt angenommen wurde, die Breite von Seeberg bestimmte, so fand er sie durch 800 Beobachtungen = 50° 56′ 7″, 58 bis 50° 56′ 7″, 74; durch beobachtete Zenithdistanzen eines andern Fixsterns Atair fand er dieselbe = 50° 56′ 8″, 33, durch Zenithdistanzen der Sonne = 50° 56′ 8″, 3. Das Mittel aus allen Bestimmungen gäbe also die Seeberger Breite = 50° 56′ 7″, 9 nahe = 50° 56′ 8″. Eine frühere Bestimmung mit einem 7zölligen Sextant wich von jener um 5″ ab.

§. 184.

Zweite Methode der Polhöhenbestimmung aus Kulminationshöhen der Sterne, Sonne, und ihrer Abweichung. (Fig. 128.)

Es bedeute in unsrer Figur H die Sonne oder einen Fixstern beim Kulminiren oder Durchgang durch die Mittagsebene von A, so ist für den Beobachtungsort A seine Höhe B′CH. Ist H die Sonne, und wird ihre Höhe bei A gemessen, so bedarf der wirklich observirte Höhenwinkel einer Verbesserung wegen der Höhenparallaxe der Sonne (n. §. 179.) und außerdem noch einer zweiten wegen der Refraction wie jede andere Sternhöhe, um den gesuchten Winkel B′CH zu erhal-

Kennt man aus Sonnentafeln und Sternverzeich-
n genau genug die nördliche oder südliche Abwei-
g (Deklination) des beobachteten Himmelskörpers,
äßt sich eben so genau die Aequatorhöhe, folglich
die Breite des Ortes A finden.

Wenn die Abweichung der Sonne oder des Sterns
lich vom Aequator ist, nehmlich ECH, so muß
n sie von der beobachteten Höhe B′CH subtrahiren,
sie aber südlich, nehmlich ECH′ (Fig. 128.), so
ß man solche zur Höhe B′CH′ addiren, um die
uatorhöhe B′CE und damit zugleich ihr Comple-
nt zu 90° nehmlich die Breite oder Polhöhe ECA
Ortes A zu erhalten.

Mißt man statt der Meridianhöhen die Zenith-
anzen, z. B. ZCH, so läßt sich hieraus und aus
bekannten Abweichung der Sonne oder eines Sterns
ch die Aequatorhöhe und Polhöhe eines Ortes ablei-
, wie aus der Figur erhellt.

Die Zeit der Kulmination, wo die Sonne oder
Fixstern im Meridian eines Ortes A die größte Höhe
eicht, muß man anderweitig, z. B. aus Sternverzeich-
ssen oder durch vorgängige Beobachtung correspondiren-
r Höhen (s. §. 178.), schon wissen, um sich zur rechten
it zur Messung der Kulminationshöhen anzuschicken.

Beispiel: Tob. Mayer beobachtete zu Göttingen mit einem Scheibeninstrument (Astrolabium) am 14. Sept. 1753

e Mittagshöhe d. obern Sonnenrandes	=	42°	1′ 57″
bzug wegen der Refraction (§. 178.)	=	—	— 55″
Sonnenhalbmesser subtr.	=	—	15′ 59″
Höhe des Sonnenmittelpunktes	=	41°	45′ 3″
Abzuziehen die nördl. Dekl.	=	3°	17′ 10″
Aequatorhöhe	=	38°	27′ 44″
lso die Polhöhe od. Breite v. Göttingen	=	51°	32′ 16″

Nach wiederholten Beobachtungen mittelst eines Mauerquadranten fand Mayer diese Polhöhe später = 51° 31′ 54″. In einem neuern Verzeichniß finde ich dieselbe = 51° 31′ 58″ angegeben.

Statt der Sonnenhöhen, die sich mit dem Sextanten nehmen lassen, wo es auf die Genauigkeit von einigen Sekunden nicht ankommt, kann man auch die Kulminationshöhen von sehr hellen nördlichen oder südlichen Fixsternen, z. B. dem Sirius, des Sterns α im Adler ꝛc., deren Abweichungen aus Sternverzeichnissen hinlänglich genau bekannt sind, zu Breitenbestimmungen anwenden. Zahlenbeispiele kann sich der Leser selbst ansetzen. Am besten eignen sich hierzu solche Sterne, welche nahe am Zenith des Beobachters kulminiren, weil hier die Wirkung der Refraction sehr gering oder = 0 wird.

Die zwei bisher gezeigten Methoden, die Polhöhe oder Breite eines Ortes zu finden, sind in der That die brauchbarsten, einfachsten und zuverläßigsten; sie gewähren für die mathematische Geographie, für die Chartenzeichnung ꝛc. hinlängliche Genauigkeit.

Nur in äußerst seltenen Fällen, auf Reisen, wo man die Breiten schnell und nur ungefähr bestimmen, und Sonnenhöhen nicht genau im Mittag, sondern eine kurze Zeit vor oder nachher — Circummeridianhöhen — zu nehmen genöthigt ist, nimmt man zu einer weit verwickeltern und in jedem Fall weniger genauen Methode seine Zuflucht.

Man mißt außerhalb doch nahe dem Meridian des Orts liegende Sternen- besonders Sonnenhöhen (Circummeridianhöhen), und reducirt dieselben sodann auf die wahren Mittagshöhen. Hierzu muß aber die Zeit jeder Beobachtung und die Deklination des Himmelskörpers sehr genau bekannt seyn. Die Berechnungen dafür findet man in mehreren astronomischen Schriften,

B. von Tob. Mayer, Lalande, Käſtner, hnenberger (geogr. Ortsb.), Cagnoli u. a. m. e Formel für die Höhenänderungen der Sterne bis Kulmination giebt Delambre in ſ. Werk: Méides analytiques pour la détermination d'un Arc Meridien etc. Iſt außer der Sonnenhöhe (oder rnhöhe) und der Abweichung derſelben noch die Zeit au genug bekannt, ſo läßt ſich hieraus auch geradezu Breite berechnen. Vergl. §. 175. Fig. 126.

Es ſey gegeben die Höhe der Sonne HS, alſo auch
ihre Zenithdiſtanz ZS = c
die Abweichung der Sonne SQ, alſo auch
ihre Polardiſtanz PS = a

e Zeit vor oder nach Mittag, welche
ch dem bekannten Satz, daß 1 Sek.
it = 15″ Stundenwinkel, auch den
härischen Winkel EPQ = P giebt.

m ſphäriſchen Dreieck läßt ſich daher aus a, c und P r Bogen ZP = b berechnen, woraus ſich das Comlement deſſelben, nehmlich die Breite EZ des Ors A ergiebt, indem Z das Zenith deſſelben am Himnel iſt, und der himmliſche Bogen EZ in Gradmaß ie ihm entſprechende Breite auf der Erde ausdrückt. Es muß aber zu dieſer Art der Breitenbeſtimmung vies bekannt ſeyn, und daher können ſich leicht beträchtiche Fehler in ſelbige einſchleichen. Beſonders ſchwierig ſt eine ganz ſichre und bis auf 1 oder ein paar Sekunden genaue Zeitbeſtimmung. Man weiß aber, daß ein Fehler von 1″ Zeit ſchon einen Fehler von 15″ im Stundenwinkel P erzeugt u. ſ. w. Man wird daher immer lieber wahre Meridianhöhen oder Höhen der Circumpolarſterne zur Breitenbeſtimmung von Hauptörtern, als Hauptſtädten, Obſervatorien und Hauptpunkten eines großen Dreiecknetzes gebrauchen.

Die weitere Betrachtung dieſes Gegenſtandes überlaſſe ich dem denkenden Leſer. Ein ſolcher kann auch nach Anweiſung des §. 175. mit Fig. 126. noch andere aſtronomiſche Aufgaben leicht auflöſen, welche gemeiniglich für ſehr hoch und ſchwer gehalten werden, als:

Aus der Breite eines Ortes, der Abweichung der Sonne (oder eines Sterns) und der Zeit der Beobachtung die Höhe derſelben zu finden. So kann man auch die Sonnenhöhenveränderungen nahe am Mittag (Circummeridianhöhen) berechnen;

aus der Polhöhe, aus der Abweichung und Höhe der Sonne die Sonnenzeit in Stunden, Minuten, Sekunden zu berechnen;

aus der Sonnenhöhe, Zeit und Polhöhe (Breite) eines Ortes die Abweichung der Sonne vom Aequator (Deklination) abzuleiten.

Beſtimmung der geographiſchen Längen der Oerter auf der Erde.

§. 185.

Allgemeiner Begriff von geographiſcher Länge. (Fig. 129.)

Wenn A und K zwei Oerter auf der Erde zu verſchiedenen Meridianen NAS und NKS gehören, folglich nicht zu gleicher Zeit Mittag ꝛc. haben, ſo heißt bekanntlich dieſe Abweichung der Meridiane der Längenunterſchied beider Oerter, auch wohl die Länge des einen Ortes K, wenn die Längengrade vom Meridian des andern Ortes A an gerechnet werden.

Der Längenunterſchied zweier Oerter A, K wird beſtimmt oder gemeſſen durch den ſphäriſchen Winkel

ANK am Nordpol oder Südpol, welchen die beiden Meridianebenen von A und K einschließen, oder auch durch den zugehörigen Bogen EM am Aequator oder aber durch den in Gradmaß gleichen Bogen AL im Parallelkreis, der durch A hindurch geht. Beträgt z. B. jener sphärische Neigungswinkel oder der Bogen EM oder AL 15°, so ist der Länzenunterschied der Oerter A und K, wenn sie auch unter verschiedenen Breiten (nördlichen oder südlichen) oder in verschiedenen Parallelkreisen liegen, in Gradmaß ebenfalls 15°. Man sagt auch, die Länge von K sey = 15°, wenn die Länge von A = 0° d. h. der Meridian NAS als der erste angenommen wird, von dem aus westlich oder östlich hin die andern Meridiane in Graden ꝛc. fortgezählt werden. Fast allgemein nimmt man den Meridian, der zwischen der westlichen Küste der Insel Ferro und der Stadt auf derselben hindurch geht, als den ersten (Länge = 0°) an, so daß der östlichere Meridian der Pariser Sternwarte genau = 20° ist. Die Astronomen nehmen indessen häufig den Meridian ihrer Sternwarten als den ersten an, und beziehen sodann auf diesen die Längen anderer westlich oder östlich hin liegenden Oerter auf der Erde. Meistens verlangt man nur den Längenunterschied zweier Oerter, dann ist es wirklich ganz gleichgültig, welchen Meridian man als den ersten ansieht, doch zur Vergleichung der Längen und zur geographischen Ortsbestimmung immer das vernünftigste, einen, nehmlich den von Ferro, als den ersten allgemein festzusetzen.

Der Längenunterschied zweier Oerter A, K bestimmt zugleich den Unterschied ihrer Tageszeiten. In den östlichern Meridianen kulminirt die Sonne (oder ein Stern) früher oder der Mittag tritt früher ein, als in den westlichern. Liegt ein Ort F in der Länge um 90° östlicher als ein andrer E, so wird es in F um $\frac{24}{4}$

= 6 St. früher Mittag als in E. Eben so mit allen übrigen Tageszeiten, am besten in mittlerer Sonnenzeit beobachtet; man kann aber auch Sternzeit hierzu gebrauchen. Läge R um 15° westlicher als K, so wäre der Zeitunterschied = 1 Stunde u. s. w.

Daher heißen auch die Längenunterschiede zweier Oerter oder vielmehr die ihnen zugehörigen sphärischen Winkel am Nordpol (oder correspondirenden Bogen am Aequator oder in Parallelkreisen) Stundenwinkel. So ist ∠ANK oder Bogen EM oder AL in Gradmaß der Stundenwinkel der Oerter A und K.

Längenunterschied und Zeitunterschied sind zwei zusammengehörige Größen; aus einer ergiebt sich zugleich die andere. Nach folgendem Täfelchen läßt sich ganz einfach aus dem Zeitunterschied zweier Oerter ihr Längenunterschied, oder umgekehrt, berechnen.

Längenunterschiede od. Stundenwinkel	15°	1°	15′	1′	15″	1″
Zeitunterschiede	1 St.	4 Min.	1 Min.	4 Sk.	1 Sk.	4 Tert.

Man giebt den Längenunterschied zweier Oerter bald im Bogen, bald in Zeit an; letzteres geschieht häufig von Astronomen.

Weiß man nun den Zeitunterschied zweier Oerter auf der Erde durch gleichzeitige Beobachtung einer Erscheinung am Himmel oder auf der Erde, die an beiden Oertern in einem und demselben absoluten Zeitmoment wahrgenommen wird, so kann man hieraus den Längenunterschied jener Oerter nach vorstehender Tafel ableiten.

Beispiel: Im J. 1748 den 8. Aug. beobachteten bei einer Mondfinsterniß den Eintritt des Mondflecken Tycho in den Schatten

Heinsius in Leipzig um 11 Uhr 16′ 32″
Bouguer in Paris um 10 Uhr 36′ 28″

Zeitunterschied = 40′ 4″.

Nach Heinsius ist das arithm. Mittel mehrerer Beobachtungen = 40′ 3″. Daraus folgt der Längenunterschied (Stundenwinkel) der Oerter Leipzig und Paris = 10° 0′ 45″, oder wenn der Pariser Meridian 20° östlicher als der von Ferro liegt, so ist die Länge von Leipzig in Beziehung auf den Meridian von Ferro = 30° 0′ 45″. In neuern Breiten- und Längenverzeichnissen findet man die Länge von Leipzig = 30° 2′ 25″; in Vega's Log. Taf. ist solche = 30° 1′ 30″, in ältern Verzeichnissen 29° 44′ 22″, auf Mayer's krit. Charte von Deutschland = 30° 13′ angegeben. Ein recht auffallendes Beispiel giebt der lange bestrittene Längenunterschied der Sternwarten von Paris und Greenwich, worin früher nach 100jährigen astronom. Observ. noch eine Ungewißheit von 2 Min. herrschte.

Ueber diese Verschiedenheit und Ungewißheit in den Angaben der Längen selbst von Hauptörtern, noch vielmehr aber von andern Oertern, wo oft kaum eine nur mittelmäßige astronomische oder terrestrische Beobachtung Statt gefunden, wird man sich nicht wundern, wenn man bedenkt, wie schwierig eine richtige Zeitbestimmung und eine völlig gleichzeitige Beobachtung einer und derselben momentanen Erscheinung seyn müsse. Da ein Fehler von 1″ Zeit schon 15″ Fehler im Stundenwinkel oder Längenunterschied hervorbringt, und leicht noch weit beträchtlichere Fehler in der Zeitbestimmung begangen werden, so folgt, daß wir in den Längen der Oerter auf der Erde keine größere Genauigkeit als die von $\frac{1}{4}$ bis 1 Min. suchen dürfen, wenn solche nehmlich durch bessere Beobachtungen bestimmt worden. Bei andern Oertern können Fehler von mehreren Minuten, $\frac{1}{4}^{0}$ oder noch mehr vorkommen. Man vergl. hierüber verschiedene Tabellen der Längen und Breiten.

Die Längenunterschiede zweier oder mehrerer Oerter werden durch Zeitunterschiede gefunden, wie wir

eben bemerkt haben. Die Zeitunterschiede aber werden mehr oder weniger genau durch folgende zwei Hauptmethoden der Beobachtung gefunden.

§. 186.

Längenbestimmung durch correspondirende gleichzeitige Beobachtungen.

Diese Beobachtungen sind entweder rein astronomische oder bloß terrestrische.

1) Astronomische: Zwei oder mehrere Beobachter an zwei oder mehreren weit von einander entfernten Hauptörtern, besonders Sternwarten, beobachten eine Himmelsbegebenheit (Erscheinung), die alle in einem und demselben absoluten Zeitmoment wahrnehmen; jeder der Beobachter bemerkt mit Zuziehung eines Gehülfen die Zeit der Erscheinung an einer guten Sekundenuhr wenigstens bis auf 1 Sek. genau. So erhält man, wenn überall gleichzeitig beobachtet und die Zeit jedes Orts richtig bis auf 1 Sek. bemerkt worden, die Längenunterschiede bis auf 15″. So groß wird aber wohl die Genauigkeit bei einer einmahligen correspondirenden Brobachtung nur selten, und es gehören vieljährige wiederholte Beobachtungen dazu, um den Längenunterschied zwei weit entlegener Oerter, z. B. Paris und Wien u. s. w., bis auf 1 oder $\frac{1}{2}$ Min. zuverläßig zu erhalten. Wäre im vorerwähnten Beispiel (§. 185.) im Zeitunterschied ein Fehler von 4″ vorgefallen, wie es leicht geschehen konnte, wenn nicht in gleichem Moment beobachtet wurde, und die Uhren um 1 oder ein paar Sekunden von der wahren Zeit differirten, so kam dadurch in die Länge von Leipzig ein Feh-

ler von 1 Minute u. s. w. Der Gang der Uhren an zwei Beobachtungsörtern gegen mittlere Sonnenzeit oder Sternzeit, ihr Voreilen oder Zurückbleiben müssen genau bekannt seyn, und in Rechnung gebracht werden.

Von Himmelserscheinungen, welche an verschiedenen ern der Erde zu gleicher Zeit gesehen werden, sind ders folgende zu Längenbestimmungen brauchbar:

a) Mondfinsternisse, nehmlich Anfang und Ende derselben, hauptsächlich der Eintritt und Austritt eines Mondflecken in den Schatten;

b) Verfinsterung und Wiederscheinen der Jupitersstrabanten, besonders des ersten; die Beobachtung geschieht mit achromatischen, stark vergrößernden, Fernröhren, und erfordert die größte Vorsicht und Aufmerksamkeit;

c) Sonnenfinsternisse, ferner Fixsternbedeckungen vom Mond, auch Durchgänge der Venus und des Merkurs durch die Sonne. Hierdurch erlangt man noch größere Schärfe, allein die Beobachtungen sind schwieriger, so wie die dazu gehörigen Berechnungen. Hierüber muß man die bessern astron. Schriften nachsehen. —

Gemeinhin braucht man die Erscheinungen a) und und gelangt so durch mehrjährige Beobachtungen einer Genauigkeit von wenigstens 10 — 15″.

So große Annäherungen zur Wahrheit, als in ographischen Breiten der Natur der Sache gemäß öglich werden, kann man auch durch die besten himmschen Beobachtungen in den Längen nie erlangen.

In den astron. Ephemeriden, z. B. in den Berlin. on Bode, in der Connoissance des tems etc., sind ür Hauptörter (Sternwarten) die Zeiten der erwähnen Himmelserscheinungen schon in Voraus berechnet. Man weiß also schon ungefähr die Zeiten, wo man sich

zur Beobachtung anschicken muß. Ausführlicher handelt über diesen Gegenstand Bohnenberger in s. geogr. Ortsbest.

2) Terrestrische: Man wählt hierzu solche künstlich ausgeführte Erscheinungen auf der Erde, deren plötzliches Entstehen oder Verschwinden sich an zwei oder mehreren in Länge verschiedenen Beobachtungsörtern in einerlei absolutem Zeitmoment (wenigstens bis auf 1" genau) wahrnehmen läßt. Aus den vermittelst genau regulirter Sekundenuhren beobachteten Zeiten und Zeitunterschieden werden die Längenunterschiede der Oerter bekannt. Für Längenunterschiede bis auf 1° auch wohl 2° ist diese Bestimmungsweise ungemein brauchbar und noch genauer auch leichter ausführbar, als die vorerwähnten astronomischen. — Zu diesem Behuf sind in England, Frankreich und Deutschland vielerlei Versuche mit verschiedenen Lichtsignalen, besonders mit Leuchtkugeln, deren Platzen an mehreren Oertern beobachtet wurde, mit réverbères, mit Kanonenschlägen, mit Abbrennen von beträchtlichen Pulvermassen in freier Luft angestellt worden. Das letztere Signal, nehmlich das Abbrennen von Schießpulver, welches hierbei nicht eingeschlossen wird, ist unstreitig das einfachste und sicherste zu Längenbestimmungen, weil sich die dabei entstehende momentane Lichterscheinung auf sehr weite Entfernungen von 15 Meilen und darüber deutlich wahrnehmen läßt. Den ersten glücklichen Versuch in dieser Art führten zuerst Lacaille und Cassini de Thury in den J. 1739 und 1740 aus, und bestimmten somit einen Längenbogen von ungefähr 2 Graden. Der Berg St. Victoire bei Aix in der Provence war der eine, ein Berg bei Cette in Languedoc der zweite Be-

obachtungsort, die Entfernung beider gegen 24 geogr. Meilen. Fast in der Mitte derselben (wie es bei allen Beobachtungen dieser Art geschehen muß) war der Sigkalort, nehmlich eine Terrasse der Dorfkirche St. Maries, wo am Morgen und sodann wieder am Abend 20 Pfund gewöhnliches Schießpulver losgebrannt wurden. Die Beobachter an den entfernten Standörtern sahen mit bewaffneten und auch mit unbewaffneten Augen die Explosion sehr deutlich wie einen Blitz, dessen Lichterscheinung kaum $\frac{1}{2}$ Sek. währte. Der Versuch würde zu verschiedenen Mahlen unternommen, und die Resultate wichen nur wenig von einander ab. Die Beobachtungen findet man in der Schrift: Méridienne vérifiée, Paris 1740. p. 98 sqq. also angegeben:

14. Dec. 1739	Beob. Oert.	Wahre Zeit d. Lichterscheinung
Abends	St. Victoire	6 Uhr 7′ 33″
	Cette	5 = 59′ 59″
	Zeitunterschied	= 7′ 34″

Durch drei spätere Beobachtungen am 15. Dec. des Morgens gegen 6 Uhr, am 4. Jan. 1740 des Abends und am 5. Jan. des Abends gegen 6 Uhr fand man die Zeitunterschiede

7′ 33,5″ — 7′ 32,5″ — 7′ 33″.

Das Mittel aus allen = 7′ 33,25″ gab (nach §. 185.) den gesuchten Längenunterschied = 1° 53′ 19″. Die Ungewißheit von 1″ mag hier mehr von falscher Uhrzeit als von falscher Beobachtung des Moments der Lichterscheinung herrühren. Wären die Beobachtungen noch öfter wiederholt worden, so würde man auch diese Ungewißheit noch beträchtlich vermindert und den Längenunterschied bis auf 1 oder ein paar Sekunden er-

halten haben. So genau läßt sich eine Länge durch astronomische Beobachtungen wohl nie sicher bestimmen, und es verdient daher die erwähnte Methode, kleinere Längenunterschiede von 2° und von noch mehr Graden durch weitere Fortsetzung von bereits bestimmten auf noch weiter entlegenere Oerter, überall den Vorzug. Daß man auf diesem Wege durch ein Pulversignal — öfters wiederholt — zugleich die Längenunterschiede mehrerer umliegenden Oerter, wo die Beobachter mit Uhren zu richtiger Zeitbestimmung ꝛc. versehen sind, finden könne, versteht sich von selbst. Auch kann man sich besonders auf geringere Entfernungen mit weniger als 10 Pfund Pulver zum Lichtsignal begnügen.

Auch v. Zach hat bei der von ihm geleiteten, nur theilweise *) zu Stande gekommenen, Aufnahme von Thüringen und dem Eichsfelde ꝛc. die Pulversignale zu Längenbestimmungen angewendet, wobei mehrere sehr geübte Mathematiker beobachteten. Es ergab sich aus mehreren vergleichenden Versuchen, daß unter allen Signalen (Flaggensignalen, Leuchtkugeln u. s. w.) die Pulversignale die deutlichsten und zuverläßigsten sind, selbst am Tage, auch unter den ungünstigsten Umständen, anwendbar. Die Abweichungen in den Resultaten mehrerer Beobachtungen gingen immer nur Theilchen einer Sekunde. Durch zwei Feuer, einmahl auf dem Inselsberge, das zweitemahl auf dem Ettersberge, bestimmte man einen Längenbogen von 1° 12′ 18,15″ zwischen Dietrichsberg und Ettersberg hinlänglich genau. Es gehören jedoch zu allen solchen

---

*) Es sind bloß Breiten und Längen mehrerer Oerter bestimmt worden, den trigonometrischen Theil der Aufnahme, so wie die projectirte Gradmessung, enthält die v Zachsche Schrift: Nachr. von der Aufnahme von Thüringen und dem Eichsfelde ꝛc. bloß auf dem Titel.

Längenbestimmungen Scharfblick, Vorsicht, gute Werkzeuge, besonders ist hierbei eine ganz richtige Zeitbestimmung wenigstens bis auf 1″, wozu auch correspondirende Sonnenhöhen mit dem Sextanten genommen dienen können, ein höchst wichtiges Erforderniß, weil 1 Sek. Fehler in Zeit 15″ Fehler in der Länge erzeugt u. s. w.

Die Längenbestimmung durch Pulversignale habe ich selbst (auf eine kleinere Distanz von 43′ 17″) versucht und brauchbar befunden.

§. 187.

Längenbestimmung durch einfache (einzelne) Beobachtungen.

A) Die erste hieher gehörige Bestimmungsart ist die sogenannte Distanzenmethode oder Messung von Mondabständen. Diese braucht man besonders zur Bestimmung der Länge zur See (Meereslänge), wofür in London und Paris besondere Commissionen, Bureau des Longitudes, bestehen, weil jene Kenntniß für die Schifffahrt höchst wichtig ist.

Man mißt auf der See zu einer anderweitig bekannten Zeit des Tages den Abstand des Mondes von der See oder einem der hellsten Fixsterne, und sucht sodann im Schiffskalender (Nautical Almanac), welcher nach den jetzt sehr vervollkommneten Mondtafeln die Abstände des Mondes für einen bestimmten Meridian (im Naut. Alm. für den von Greenwich) anzeigt. So findet der Schiffer im Almanach die Zeit, zu welcher sich der beobachtete Mondabstand unter dem bestimmten Meridian, z. B. dem von Greenwich, einstel-

len muß, und aus dem Unterschied beider Zeiten für einerlei absolute Zeit der Erscheinung die Länge des Schiffes (Ortes auf der See) vom Nullmalmeridian an gerechnet, bis zur Genauigkeit von etwa 10 Min. Die hierbei nöthigen mühsamen Correctionen werden durch die Anweisung des Almanachs erleichtert und abgekürzt. Aus diesem Lande kann man diese Distanzenmethode mit Beziehung genauer Mondtafeln, in welchen die Mondabstände für einen bestimmten Meridian mit Angabe der Zeiten berechnet stehen, anwenden; doch ist sie eben nicht die sicherste.

Das Weitere hierüber muß man in astron. Werken, z. B. in Bode's Erläut. der Sternkunde, auch in Bohnenberger's geogr. Ortsbest. S. 414 sqq., nachsehen. Die Correctionen der gemessenen Abstände beziehen sich besonders auf die Refraction und Parallaxe, und erfordern eine mühsame Berechnung. Mondabstände nimmt man gewöhnlich mit einem Sextant, auf der See mit einem Octant.

B) Die zweite Bestimmungsart durch einfache Beobachtung geschieht mittelst tragbarer Sekundenuhren oder Taschenchronometer. Hat eine solche Uhr wirklich einen ganz gleichförmigen Gang nach mittlerer Sonnenzeit oder Sternzeit, und wird dieser gleichförmige Gang nicht durch Erschütterungen beim Transport von einem Ort zu einem andern noch durch den Wechsel der Wärme gestört, so ist sie wirklich ein unschätzbares Kleinod, das sicherste und bequemste Hülfsmittel zu Längenbestimmungen auf dem festen Lande und auf dem Meer, besonders aber für die Schifffahrt sehr wichtig. Wäre auch die Uhr der wahren Zeit voreilte oder hinter derselben zurückbliebe, so könnte man ihre Acceleration oder Retardation leicht in Rechnung

gen. Der Gebrauch eines solchen Chronometers ist einfach. Wollte man damit den Längenunterschied zweier Oerter A und B finden, so würde man die Uhr am Ort A auf die Mittagszeit desselben einstellen, ihr Voreilen oder Zurückbleiben einige Tage zuvor beobachten, und sich nun damit an den zweiten Ort B begeben, hier die Zeit (Mittagszeit) des Ortes finden, diese mit der Zeit der Uhr, welche dem Orte A zugehört, vergleichen, und nun aus dem gefundenen Zeitunterschied den Längenunterschied beider Oerter A und B so berechnen, wie vorher gezeigt worden. — Indessen mag nur äußerst selten ein Chronometer den hierzu erforderlichen Grad von Genauigkeit besitzen; vergl. was in §. 177. darüber bemerkt worden.

§. 188.

nzeige einiger der zuverläßigsten astronomisch bestimmten Längen und Breiten.

Daß man die Breiten der Oerter um vieles genauer erlangen könne, als ihre Längen, erhellt aus den orgetragenen Methoden der Bestimmung. Bei den Breiten einiger Hauptplätze, insbesondere der bessern Sternwarten, kann man sich bei dem jetzigen Zustand er Astronomie und mathematischen Geographie auf die estimmte Genauigkeit von 1″ oder doch ein paar Sekunden ziemlich verlassen. Weit unsicherer, zum Theil vohl bis auf mehrere Minuten falsch, sind die Längen. Indessen führt man doch in den Verzeichnissen eine sehr roße Anzahl von Oertern mit ihren Längen und Breiten, auch erstere bis auf die einzelne Sekunde an. Ich

dächte, bei mehreren unsicher bestimmten Breiten und noch mehr Längen hätte man die Sekunden, welche bloß auf dem Papier wahr sind, ganz weglassen oder in runder Zahl geben können.

Ich lasse hier einige der bewährtesten Breiten und Längen nach einem neuern Verzeichniß, das von frühern Verzeichnissen der Art beträchtlich abweicht, folgen. Für die Längen ist der Meridian von Ferro der erste.

Oerter.	Breite oder Polhöhe.	Länge, östliche.
London, Paulskirche . .	51° 30′ 49″	17° 34′ 13″
Paris, Sternw.	48° 50′ 14″	20°
Wien, Sternw.	48° 12′ 36″	34° 1′ 44″
Berlin, Sternw. . . .	52° 31′ 46″	31° 2′ 30″
Gotha, Seeberg. Sternw.	50° 56′ 7″	28° 23′ 45″
Leipzig, Sternw. . . .	51° 19′ 14″	30° 2′ 25″
Göttingen, Sternw. .	51° 31′ 58″	27° 35′ 40″
Petersburg, Sternw. .	59° 56′ 23″	47° 57′ 54″
Stockholm	59° 20′ 31″	35° 42′ 56″
Kopenhagen, Sternw. .	55° 41′ 4″	30° 15′ 30″
Rom, Peterskirche . . .	41° 53′ 54″	30° 7′ 15″
Constantinopel . . .	41° 1′ 34″	46° 42′ 30″

Die Breiten und Längen anderer Oerter muß man in größern Verzeichnissen nachsehen. Das Neueste und, wie mir scheint, das Beste findet man im Gothaischen geneal. Taschenbuch (55ster Jahrg.) auf das Jahr 1818. — Unsichrer in Vega's Log. Taf. 2ter Bd. u. a. m.

§. 189.

Prüfung eines großen trigonometrischen Netzes durch die anderweitig bestimmten Breiten und Längen, und umgekehrt. (Fig. 123.)

Wenn man nach §§. 170—175. über ein ganzes Land ein trigonometrisches Netz gelegt, dasselbe gegen den Meridian eines Ortes richtig orientirt, und nach der Methode der Abscissen und Ordinaten vermöge eines oder mehrerer wirklich gemessenen Azimuthalwinkel nach §. 171. scharf berechnet hat, so stellen die berechneten Abscissen die Breitenunterschiede, die Ordinaten hingegen die Längenunterschiede der Dreieckpunkte dar, wenigstens sehr annähernd. Zwar sind die berechneten horizontalen Abstände streng genommen nicht ganz gleich den zugehörigen Bogen auf der Erde, allein die Differenzen sind selbst auf Entfernungen von einigen Meilen so gering, daß sie gegen andere nicht ganz zu vermeidende Fehler in der Winkelmessung ꝛc. in gar keine Betrachtung kommen; vergl. §. 138. 4te Abth.

Kennt man nun die mittlere Bogenlänge eines Meridiangrades, überhaupt eines mittlern Grades von einem größten Kreis um die Erde, so lassen sich hieraus nach Anleit. eines folg. §. auch die Bogenlängen berechnen, welche den Längengraden unter verschiedenen Breiten, nehmlich von Parallelkreisen zu kommen, deren geographische Breiten bekannt sind. Wäre die Länge eines Grades am Aequator, die Breite des Ortes A (Fig. 129.) gegeben, so ließe sich daraus in der Voraussetzung, daß die Erde die Gestalt einer Kugel habe, auch die Bogenlänge eines Grades ꝛc. berechnen, der zum Parallelkreis A B gehört. In einem wohlausge-

führten und genau orientirten Dreiecknetz (Fig. 123.) werden folglich die Abscissen A b, A c, A e, A h u. s. w. in Gradmaß verwandelt die Breitenunterschiede der Oerter A, B, C, E, H ꝛc., die Ordinaten B b, C c, E e, H h u. s. w. auf Gradmaß reducirt die Längenunterschiede derselben Oerter geben. So erhält man durch ein richtiges Dreiecknetz zugleich annähernd die geographische Lage mehrerer Oerter, wenn die Breite und Länge von einem oder von einigen Hauptstandörtern, z. B. von A und E, durch astronomische oder andere Bestimmungen (§§. 183 — 187.) bereits bekannt geworden.

Auch werden dermaßen die astronomisch festgesetzten Breiten und Längen die aus dem Dreiecknetz sich ergebenden controliren, diesem zur Prüfung der Richtigkeit dienen, so wie auch umgekehrt. Sind z. B. die Breitenunterschiede der Oerter A, E, K gleich genau durch astronomische Beobachtungen und durch die Abscissen A c, A k gefunden, so müssen beiderlei Resultate ganz oder für den Zweck der Charte nahe genug zusammenstimmen. Eben so verhält es sich mit der wechselseitigen Controle der Längenunterschiede. Begreiflich wird diese Prüfung des Dreiecknetzes um so vollständiger, je mehr Punkte desselben nach Breite und Länge durch anderweitige Mittel erhalten worden. Bei Triangulirung sehr großer Länderstrecken darf man diese vortreffliche Prüfungsmethode nie versäumen.

Eine weitere Erläuterung dieses Gegenstandes in Zahlenbeispielen verbietet der beschränkte Raum dieses Werkes, und ist auch für denkende Leser nicht nothwendig.

§. 190.

Gradmessung. (Fig. 130.)

lm über die Größe, die Dimensionen und die Ge=
er Erde im Allgemeinen bessere Vorstellungen zu
n, als die Alten davon hatten, sind in den neuern
von der Mitte des 17ten Jahrhunderts an meh=
radmessungen in verschiedenen Gegenden der Erde
verschiedenen Breiten mit glücklichem Erfolg aus=
t worden. Kennt man nach solchen Messungen
ittlere Bogenlänge von 1^0 eines größten Umkrei=
eripherie) der Erde, so läßt sich daraus nach ein=
Sätzen der Kreis und Kugelberechnung der Um=
der Durchmesser, Halbmesser der Erde, die Größe
Oberfläche in Quadratmaß u. s. w. annähernd
en; denn mehr als Annäherung darf man hier
begehren, auch nie zu erreichen hoffen.

Zu einer solchen Messung eignen sich am besten
engrade, indem der nach irgend einem Längenmaß
estimmende terrestrische Bogen auch in Gradmaß
rst genau bekannt seyn muß, und geographische
ten und Breitenunterschiede zweier Oerter am zu=
ßigsten gefunden werden. So erklärt sich die Zweck=
gkeit des bei allen bisher unternommenen Grad=
ungen befolgten Verfahrens.

Man verbindet nehmlich zwei Richtpunkte T und
Fig. 130.), welche nahe unter einerlei Meridian
n, und deren Breitenunterschied (nehmlich der durch
lben laufenden Parallelkreise G g und D d) sich durch
nomische Beobachtungen ergiebt, durch eine Reihe
Dreiecken in der Richtung und Nähe jenes Meri=
s. Man verbindet ferner dieses trigonometrische
mit einer hinlänglich großen directe gemessenen
is B b, zu größerer Sicherheit lieber mit zwei Ba=

sen. Ferner mißt man alle Winkel der Dreiecke, ingleichen einen oder besser mehrere Azimuthalwinkel, und berechnet endlich hieraus QM, den Abstand der Parallelkreise Dd und Gg, nehmlich die Länge des in Gradmaß bekannten Breitenbogens. Die Berechnung geschieht in ganz ähnlicher Weise, wie solche im §. 171. vorgetragen worden.

Dies ist kürzlich der ganze Hergang einer Gradmessung, wie solche zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten geschehen ist, und auch nie anders geschehen kann. Das hier gezeigte Verfahren rührt in der Hauptsache ursprünglich von Snellius (im Anf. des 17ten Jahrh.) her; allein mit weit bessern Instrumenten, mit erweiterten geometrischen Einsichten hat zuerst Picard 1669 eine Gradmessung zwischen Paris und Amiens hinlänglich genau ausgeführt. Desselben Verfahrens bediente man sich weiterhin zur Verlängerung der Pariser Mittagslinie und bei spätern Operationen der Art.

Daß eine genaue Gradmessung die schwierigste Aufgabe der höhern Erdmessung sey, daß sie die allervollkommensten Instrumente, einen richtigen Gebrauch derselben und von Seiten der Geometer Gewandheit und tiefe mathematische Kenntnisse verlange, sieht der Leser auf den ersten Anblick. Es müssen bei einer so zusammengesetzten Operation alle in diesem Buche früher angezeigten Aufgaben, Methoden und practischen Vortheile zusammenwirken und einander wechselseitig unterstützen.

Jede Gradmessung zerfällt in vier Hauptacte:

1) Die Messung einer oder zur Controle zweier Basen; diese kann zu Anfang oder zu Ende oder auch im Verlauf der Triangulirung geschehen.
2) Die Messung der Dreieckwinkel; diese geschieht am sichersten mit Bordaschen Kreisen oder zur Erspa-

rung der läſtigen Winkelreductionen mit repetirenden Theodoliten.

3) Die Meſſung der Azimuthalwinkel; hier erleichtert eine künſtliche durch einen Ort gezogene Mittagslinie die Beobachtung, ſonſt bedient man ſich der Sonnenazimuthe.

4) Die Meſſung eines Gradbogens am Himmel, welcher den Breitenunterſchied der Oerter T und Q giebt. Dieſen erfährt man am beſten durch die Differenz der Zenithdiſtanzen eines und deſſelben Fixſterns für beide Beobachtungsörter T und Q. Zur Verſicherung braucht man hierzu gern mehrere Fixſterne und zwar ſolche, die nahe am Zenith kulminiren, um die Ungewißheit der Refraction dieſer noch bis jetzt nicht ganz beſiegten Feindinn aller aſtronomiſchen Obſervationen zu mindern. Zur Meſſung braucht man ſichrer einen Bordaſchen Kreis, als die früher, z. B. bei der Gradmeſſung am Polarkreis angewendeten ſchwerfälligen Zenithſectoren. Fände man die Höhen eines oder mehrerer Fixſterne an einem Ort T um $1^0\ 13'\ 17''$ größer oder kleiner als am zweiten Standort Q, ſo betrüge auch der Breitenunterſchied dieſer Oerter $1^0\ 13'\ 17''$.

Als Beiſpiel habe ich im verkleinerten Bilde (Fig. 30.) die Gradmeſſung erwählt, welche im J. 1736 — 737 im Schwediſchen Lappland von Maupertuis, lairaut, Camus, le Monnier, Outhier und em Schwed. Gelehrten Celſius ausgeführt worden l. Der Breitenbogen zwiſchen der Stadt Tornea nd dem Berg Kittis unter ungefähr 66^0 Breite durchſchnitt den Polarkreis, und war nach mehreren ſtronomiſchen Obſervationen im Mittel $= 57'\ 28\frac{3}{4}''$ der $= 57'\ 27''$ nach andern Vorausſetzungen. Dieſe Größe iſt aber gewiß um einige Sekunden ungewiß

hauptsächlich wegen fehlerhafter Beobachtungen mit dem Zenithsector.

T war die Stadt (Thurm) Tornea, Q der Gipfel des Berges Kittis, wo ein Observatorium erbaut wurde, die übrigen Punkte des Triangelnetzes waren Signalpyramiden auf Bergen. Die auf dem Eise eines zugefrornen Flusses zweimahl ausgemessene Basis Bb war im Mittel = 7406 Toiſ. 5 F. 2 Z., der Azimuthalwinkel PQM zwiſchen Kittis (künſtliche Mittagslinie) und dem Berge Pällingi im Mittel = 28° 51′ 52″ u. ſ. w.

So fand ſich der Abſtand der Parallelkreiſe Dd und Gg durch eine Doppelrechnung nach beiden öſtlichen und weſtlichen Richtungen, nehmlich der Abſciſſen (Meridianſtücke) DP + EA + AF + CG und andernſeits der Abſciſſen dN + LK + Kg = QM = 55020,09 Toiſ. Da dieſer Abſtand einem Breitenbogen = 57′ 28¾″ zugehört, ſo wird die Länge eines Grades der Mittagslinie, die durch den Polarkreis läuft, ungefähr = 57437,9 Toiſ. — Lalande ſetzt ihn in ſ. Aſtron. = 57422. Die alſo beſtimmte Länge betrug mehr als die früher in Frankreich von Picard gemeſſene Gradlänge. Das Detail der Meſſung, die dabei angewendeten Vorſichten und Prüfungen ꝛc. hat Maupertuis in ſ. Schrift: La figure de la Terre determinée par les Observ. (deutſch überſ. Zürich 1741) beſchrieben.

Der Meſſung am Polarkreis fehlte eine zweite Prüfungsbaſis, die Baſis Bb wurde nicht nivellirt und wie mir ſcheint etwas zu flüchtig gemeſſen, der Breitenunterſchied wahrſcheinlich um mehrere Sekunden falſch gefunden, auch wurden die Winkel der Dreiecke nicht auf die vollkommenſte Art beſtimmt. So mag ſich der beträchtliche Unterſchied erklären, der zwiſchen den Reſultaten dieſer und der in den J. 1001 — 1803 unter

der Direction von Svanberg wiederholten Gradmeſſung findet. Dieſe letztere gab die Länge eines Grades am Polarkreis um ein ſehr Beträchtliches kleiner als ihn Maupertuis gefunden hatte. Die Meſſung von Svanberg, bei welcher der Breitenbogen = 1° 37′ 19,4″ an Länge = 92780,23 Toiſ. war, verdient mehr Vertrauen, weil ſie mit beſſern Hülfsmitteln und mit größerer Vorſicht ausgeführt worden. Man findet ſie ausführlich beſchrieben in der Denkſchrift: Exposition des opérations faites en Lapponie pour la determ. d'un arc du Merid. 1801 — 1803, par Mell. Ofverbom, Svanberg etc. Stockholm 1805. Den weſentlichen Inhalt dieſes intereſſanten Werkes giebt Zach's Mon. Corr. 1805.

§. 191.

Unterſchied der Meridiangrade unter verſchiedenen Breiten.

Um die Geſtalt der Erde beſtimmter kennen zu lernen, und beſonders die wichtige Frage zu entſcheiden, ob die Erde eine vollkommene Kugelgeſtalt oder eine davon abweichende habe, mußten in verſchiedenen Gegenden der Erde unter verſchiedenen Breiten Gradmeſſungen angeſtellt werden.

Faſt zu gleicher Zeit mit der am Polarkreis bewirkten (in den J. 1735 — 1744) die franz. Akad. Bouguer, Condamine u. a. m. eine Gradmeſſung in Peru am Aequator. Der Bogen betrug über 3°, und nach einer genauen Triangulirung u. ſ. w. fand man die Länge eines Meridiangrades am Aequator im Mittel = 56753 Toiſ. folglich kleiner, als den in Frankreich zwiſchen Paris und Amiens gemeſſenen mittlern = 57027 Toiſ. Bouguer und Condamine ſetzen

die Grenzen des noch möglichen Fehlers = $\frac{1}{1500}$ ihrer Gradlänge, nehmlich 35 bis 40 Toiſ.

Eine Gradmeſſung von La Caille am Vorgebirge der gut. Hoffnung im J. 1751 giebt den Meridiangrad unter einer ſüdlichen Breite von 33° 18′ an Länge = 57037 Toiſ., folglich größer als den mittlern Grad in Frankreich bei 45° nördl. Breite.

Eine andere Meſſung von Boscowich im päpſtlichen Gebiet im J. 1755 giebt den Meridiangrad unter einer Breite von 43° an Länge = 56979 Toiſ.

Die Gradmeſſung von Liesganig in Oeſterreich im J. 1770 giebt für die Breite von 48° 43′ die Gradlänge = 57086 Toiſ.

Die Meſſung von Maſon und Diron im nördl. Amerika (Penſylvanien) giebt für die nördl. Breite von 39° 17′ die Gradlänge = 56888 Toiſ.

Die größte und neueſte aller bis jetzt unternommenen Meridiangradmeſſungen wurde in den J. 1792 bis 1798 von Delambre und Méchain mit ganz vorzüglicher Genauigkeit, mit Anwendung der beſten Werkzeuge und Methoden vollbracht. Der Gradbogen von Dünkirchen bis Barcelona betrug 9, 6738° (nahe 9° 40′), an Länge = 551578 Toiſ., die mittlere Größe eines Grades = 57018 Toiſ. Dieſe Meſſung iſt ſpäter im J. 1806 von Biot, Arago und Rodriguez bis zu den Baleariſchen Inſeln fortgeſetzt worden. Die letzte franzöſiſche Gradmeſſung von Delambre und Méchain iſt unbeſtreitbar das Beſte und Vorzüglichſte, was hierin geſchehen und was Menſchenkräfte in Operationen ſo ſchwieriger Natur zu leiſten vermögen. Wer die dabei gebrauchten Methoden und Vorſichten der Beobachtung und des Kalkuls bis auf das allerkleinſte Detail kennen lernen will, muß das Werk von Delambre ſelbſt nachleſen, nehmlich die Base du Système métrique décimal ou Mesure de

l'Arc du Méridien entre les Parallèles de Dunkerque et Barcelone, in 3 ſehr vol. Bdn., Paris 1806—1810. Seinen Inhalt auch nur abgekürzt hier mitzutheilen, erlaubt der mäßige Umfang dieſes Werkes nicht. Wer dieſes überflüßig mit Methoden und Kunſtgriffen des Kalkuls ausgeſtattete Werk lieſ't, kann alle andere Schriften über Gradmeſſungen entbehren, und darnach mit guten Inſtrumenten ſelbſt eine ſolche Operation ausführen. Ich glaube aber nicht, daß auch nur einer meiner deutſchen Leſer je in dieſen glücklichen Fall kommen wird, da die deutſchen Regierungen nichts für dieſen großen geographiſchen Zweck verwenden, der Beutel eines Privatgelehrten aber demſelben nicht gewachſen iſt. Wir Deutſchen müſſen uns ſtatt großer Verſuche meiſtens mit der Theorie allein begnügen.

§. 192.

Geſtalt und Dimenſionen der Erdkugel.

So viel iſt bis zur Evidenz durch die zeither geſchehenen Gradmeſſungen entſchieden, daß wir die Größe eines Grades auf der Erde ziemlich genau, für das practiſche Leben wenigſtens genau genug, wiſſen, daß die Größen der Grade vom Aequator nach den Polen hin zu nehmen, und daß folglich die Erdachſe kleiner, als der Aequatorialdurchmeſſer, folglich unſer Erdkörper eine an den Polen abgeplattete Kugel (Sphäroid) ſeyn muß.

Nach den neueſten Berechnungen iſt das Längenverhältniß zwiſchen dem Durchmeſſer des Aequators und dem der Erdachſe = 335 : 334 das wahrſcheinlichſte, daher die Abplattung = $\frac{1}{334}$. Hierzu haben außer den gemeſſenen Graden auch die beobachteten Geſetze der Schwere und der Pendellängen unter verſchiedenen Breiten verholfen. Biot ſetzt nach den zu Dünkirchen und Formentera unterſuchten Pendellängen jene Abplattung

$= \frac{1}{308}$. Nach Euler's Theorie war das Verhältniß $= 230 : 229$; das Newtonsche Verhältniß ungefähr daſſelbe. Ich könnte noch mehrere andere Verhältniſſe der Erdabplattung anführen; allein ſchon die bemerkten zeigen zur Genüge, wie unſicher es um dieſe Kenntniß beſtellt iſt. Demnach wiſſen wir wohl im Allgemeinen, daß die Erde eine etwas unreguläre an den Polen eingedrückte Kugelgeſtalt habe, und wie groß demnach ungefähr die Meridiangrade unter verſchiedenen Breiten ſind, aber von der Geſtalt der Meridiane ſelbſt haben wir noch keine genügenden Vorſtellungen, ſondern nur Hypotheſen. Man iſt geneigt geweſen, den größten Kreiſen um die Erde, die durch die Pole gehen, eine elliptiſche Geſtalt und demnach der ganzen Erdkugel die eines Ellipſoides beizulegen, das ſich um ſeine kleine Achſe bewegt. Allein dieſe Hypotheſe findet keine Beſtätigung in den gemeſſenen Graden ſelbſt. Jede zwei dieſer Grade geben eine andere Ellipſe. Bouguer ſchloß aus der Vergleichung dreier gemeſſenen Grade, daß ſich dieſe nicht wie in einer regelmäßigen Ellipſe, ſondern wie die Biquadrate der geographiſchen Breiten verhalten, welche Annahme mit den wirklichen Meſſungen noch am nächſten zuſammenſtimmt. Der am Vorgebirge der gut. Hoffnung gemeſſene Grad hat übrigens wahrſcheinlich gemacht, daß die ſüdliche Hemiſphäre nicht ganz ſo geſtaltet ſeyn mag, wie die nördliche. Im Ganzen nimmt man, beſonders zur Chartenzeichnung, die Erde als eine Kugel an, aus zwei äußerſten Gradgrenzen das arithmetiſche Mittel, und berechnet damit auf die gewöhnliche Art den Umfang, Durchmeſſer, die Oberfläche und den Kubikinhalt der Erde.

Setzt man den kleinſten Breitengrad am Aequator
$= 56710$ Toiſ.,
den größten an den Polen $= 57446$ =
ſo iſt ein mittlerer Breitengrad $= 57078$ =

Sonst wird er auch = 57173½ Toiſ. geſetzt. Dies iſt alles nur Annäherung. Der funfzehnte Theil eines mittlern Grades heißt eine geographiſche Meile. Dieſe iſt nach Klügel (Aſtron.) = 3800 Toiſ. 3 F. Par. = 22803 Par. F. = 23598 Rheinl. F.; ſonſt auch = 3811½ Toiſ = 23661 Rheinl. F. angenommen.

Nach Klügel iſt der Halbmeſſer des Aequatorkreiſes = 3279991 Toiſ.
die halbe Erdachſe = 3262447 "
der mittlere Erdhalbmeſſer = 3275790 " *)

Hieraus laſſen ſich alle andern Dimenſionen der Erde leicht herleiten, aber nur ungefähr, je nachdem man dieſe oder jene Annahme zu Grunde legt.

§. 193.

Meſſung von Längengraden.

Um unſre Kenntniß von der wahren Geſtalt der Erde zu erweitern, ich ſage nicht zu beſchließen, würde es noch nothwendig ſeyn, mit derſelben Genauigkeit, wie man verſchiedene Breitengrade gemeſſen, auch mehrere Längengrade in verſchiedenen Parallelkreiſen zu meſſen, um zu ſehen, ob wenigſtens in einem Parallelkreis, z. B. dem Aequator, oder unter 45° ꝛc. die Größen der Längengrade ſich gleich bleiben. Fänden ſich auch dieſe verſchieden, ſo könnten ſelbſt die Meridiankreiſe unter ſich nicht gleich ſeyn. Daß die Parallel-

*) Es herrſcht jedoch in dergleichen Angaben von verſchiedenen Geometern eine eben nicht tröſtliche Verſchiedenheit. Bouguer (Trait. de Navig.) ſetzt den Erdhalbmeſſer = 3306000 Toiſ. Anderswo finde ich einen mittlern Grad = 57107,5 Toiſ., die geogr. Meile ungefähr = 3807 Toiſ. angezeigt u. ſ. w.

kreiſe ebenfalls eine mehr elliptiſche Geſtalt haben, und alſo auch in dieſer Hinſicht die Erde von der Kugelgeſtalt abweichen könne, beruht mehr auf Hypotheſen als auf directen Erfahrungen. Was wird zuletzt aus unſrer Erdkugel noch für ein ſonderbarer Körper werden?

Delambre iſt bei der Gradmeſſung von Dünkirchen bis Barcelona durch mehrere Beobachtungen auf die Vermuthung geleitet worden, daß die Parallelkreiſe von der Kreisgeſtalt wirklich etwas abweichen mögen, doch hält er es nicht für eine ausgemachte Sache. Um dieſe wichtige Frage zu entſcheiden, ſchlug Laplace in ſ. Mecanique céleste (Vol. II) eine Längengradmeſſung nehmlich eines Bogens vor, welcher den Meridian der Pariſer Sternwarte unter der größten Breite von Frankreich ſenkrecht durchſchneidet. So viel ich weiß, iſt nichts aus dieſer Meſſung geworden; eben ſo wenig aus der, welche v. Zach in Deutſchland, für einen durch die Seeberger Sternwarte laufenden Längenbogen (Parallelkreis) von 5 bis 6° beabſichtigte; vergl. deſſ. Nachr. v. d. Aufn. von Thüringen ꝛc. Eine ſolche Längengradmeſſung war die von Caſſini de Thury und Lacaille im J. 1740 nur unvollkommen ausgeführte (ſiehe oben §. 186. 2.). Der durch Zeitdifferenzen beſtimmte Längenbogen war ungefähr = 1° 53′ 19″, die ſenkrechte Entfernung gegen 40 Lieues oder 24 geogr. Meilen.

Sonſt iſt wenig oder nichts Entſcheidendes für dieſe Unterſuchung geſchehen.

Könnte man mit derſelben Genauigkeit, wie in einem Meridian, auch in einem Parallelkreis zwei hinlänglich weit entfernte Punkte auf der Erde beſtimmen, die einerlei Breite haben, ſo würde noch eine Längendifferenzbeſtimmung beider Oerter durch Zeitmeſſung (§§. 185 — 187.) und ſodann eine Triangulirung wie bei andern Gradmeſſungen nöthig ſeyn, um die Größen

wöhnlicher Abgeordneter in Bezug auf diese seine Stellung sich zu verhalten und seine Aemter zu verwalten habe. Wenn er sich nun in dieser Beziehung nicht so benimmt, wie es der Würde des Hauses, dessen Mitglied er ist, wie es der Ehre und der moralischen Stellung dieses Hauses, dessen Mitglied er ist, wie es der Ehre und der moralischen Stellung dieses Hauses angemessen ist, so kann, wie wir eben gehört haben, das Haus ihn zur Ordnung rufen, und wenn er sich dem nicht fügt, ihn ausschließen. Ich glaube also, daß dieses eine Angelegenheit ist, die lediglich in das Innere dieses Hauses gehört, und daß wir uns nicht darum zu kümmern haben, ob Herr Gladstone sich so oder anders benimmt. Ich bin daher auch entschieden dagegen, daß wir uns in diese Angelegenheit mischen.

Herr Ward: Ich möchte nur eine Frage an den Herrn Secretär des Innern richten.

Herr Walpole: Ich bin nicht im Stande, in Bezug auf die Verwaltung der Universität Oxford Auskunft zu geben, da ich nicht weiß, was in dem Augenblicke dort vorgeht.

Herr Ward: Ich möchte nur wissen, ob es wahr ist, daß Herr Gladstone, der Kanzler der Universität Oxford, in seiner Eigenschaft als solcher, das Recht hat, die Vorlesungen zu controliren, und ob er in dem Falle, wenn er es für nöthig erachtet, Vorlesungen zu verbieten, dieses Recht auch ausüben kann.

Herr Walpole: Ich glaube, daß der Kanzler der Universität (President) in allen Fällen, in welchen sie beschließt, daß eine Vorlesung nicht gehalten werden soll, dieselbe nicht halten darf.

Herr Ward: Ich habe noch eine weitere Frage an den Herrn Secretär des Innern zu richten. Ist es wahr, daß Herr Gladstone, der Kanzler der Universität Oxford, in seiner Eigenschaft als solcher, das Recht hat, die Vorlesungen zu controliren, und ob er in dem Falle, wenn er es für nöthig erachtet, Vorlesungen zu verbieten, dieses Recht auch ausüben kann.

Herr Walpole: Ich glaube, daß der Kanzler der Universität (President) in allen Fällen, in welchen sie beschließt, daß eine Vorlesung nicht gehalten werden soll, dieselbe nicht halten darf.

Herr Ward: Ich habe noch eine weitere Frage an den Herrn Secretär des Innern zu richten. Ist es wahr, daß

ten, wie ihre Halbmesser, so verhält sich auch die des Parallelkreises A B zu der des Aequators E Q wie A G zu E C = cos. E C A : sin. tot. Dies gilt von Parallelkreisen unter allen Breiten, auch von einzelnen Graden, Minuten ꝛc. derselben. Nehmlich an Bogenlänge verhalten sich die Grade der Parallelkreise gegen einander, wie die Cosinus ihrer Breiten. Ist nun ein mittlerer Grad vom größten Umkreis der Erde gegeben, allgemein = 15 geogr. Meilen gesetzt, ingleichen die Breite eines Parallelkreises = α bekannt, so ist ein Grad des Parallelkreises

$$\beta = 15 \cdot \cos. \alpha \text{ geogr. Meilen,}$$

$$\log. \beta = \log. 15 + \log. \cos. \alpha - 10 \text{ u. s. w.}$$

Statt 15 Meilen kann man bei dieser Berechnung auch die Größe eines mittlern Meridiangrades in Toisen oder nach einem andern Maßstab gebrauchen, wenn nehmlich diese Größe genau genug bekannt ist. Sie ist es aber nicht, denn ein Geometer setzt diese, ein andrer jene Zahl dafür an. Also findet auch hier nur Annäherung Statt, aber genau genug für alle practischen Fälle, besonders für die Anfertigung der Charten und Erdgloben.

Für Sin. tot. = 1 ist der Cos. $60^0 = \frac{1}{2}$, daher ein Grad von einem Parallelkreise, der zu 60^0 Breite gehört $= \frac{1}{2} \cdot 15 = 7\frac{1}{2}$ Meilen. So läßt sich bei der Annahme der sphärischen Gestalt der Erde eine Tafel für die Parallelkreise aller Breiten von 0^0 bis 90^0 anfertigen. Man kann aber eine solche Tafel entbehren, und die Rechnung in vorkommenden Fällen für irgend einen Parallelkreis besonders anstellen. Wäre z. B. die Breite eines Ortes = 52^0, so wäre, weil cos. 52^0 = 0,6156615, ein Grad des hierzu gehörigen Parallelkreises = 15 . 0,6156615 = 9,234 geogr. M. nahe. Berücksichtigt man aber hierbei die Abplattung der Erde, und nimmt man irgend ein Verhältniß dafür an, so erhält man etwas abweichende Resultate, welche sich in-

ten und nicht Zeug verdingen sollen. Eine solche Ord. hatte es in Bern im October 1687, am 30. Jan. 1688 und am 30. Jan. 1689 gegeben, und eine ähnliche ist auch in Zürich am 30. Jan. 1689 ergangen (s. 1689, 1, 10 und Bernerord. 1689, 1, 1). Am 30. Jan. 1690 wurde in Bern eine Ord. gegen das Tragen der Perücken erlassen (s. 1690, 1, 1), und eine ähnliche ist auch in Zürich am 30. Jan. 1690 ergangen.

1698.

Charakter der Berner Landsatzungen auf der Landschaft bei Murten.

Obrigkeit und Amtleute in Murten. Die Landsatzungen sollen auf der Landschaft Murten, auf der Landvogtei und bei Gerichten in Murten, wie auch in der Stadt Murten selbst, gehalten werden. Die Landsatzungen sollen, wie in allen andern Aemtern, auf freiem Platze gehalten werden.

Wenn in Streitsachen Urtheil in Betreff Derjenigen, so Güter und vor gnugsame Bezahlung Eigenthum haben, gefällt werden soll, so sollen Diejenigen, so Güter und Eigenthum haben, zu Urtheilern gebraucht werden. Wenn aber Jemand Urtheiler, so Güter und Eigenthum haben, nicht bekommen kann, so mögen auch Andere, so Güter haben, Urtheiler sein. Wenn aber Jemand Urtheiler, so Güter

Daher wird die reducirte Basis $g = \frac{G \cdot R}{R + E}$.

Da e immer sehr klein gegen R, so ist der Coefficient $\frac{R}{R+e}$ nahe = 1, daher sich in der Wirklichkeit die reducirte Basis g nur sehr wenig von der gemessenen G unterscheidet. Dieser Unterschied läßt sich also bestimmen:

$$G - g = G = \frac{GR}{R+e} = \frac{Ge}{R+e} = G \cdot \frac{e}{R+e},$$

eine immer sehr kleine Größe, da e in Verhältniß gegen (R + e) nur ungemein wenig beträgt.

Beispiel: e = 300 Toiſ., G = 7000 = 2 Meilen nahe, R = 3275790 Toiſ., so wird logarithmisch berechnet die reducirte Basis

g = 6999,36 Toiſ.

Der Unterschied wird aber noch viel geringer, wenn die gemessenen Basen, wie gewöhnlich, weit weniger als 300 Toiſ. über das Niveau des Meeres erhöht liegen. Die weitere Reduction der horizontalen Basen auf die correspondirenden Bogenlängen geschieht nach §. 138.

§. 196.

Aufgabe. (Fig. 129.)

Zwei Oerter auf der Erde A und O liegen in einerlei Meridian, ihr Breitenunterschied ist in Gradmaß gegeben, daraus soll ihre Entfernung im Bogen nach irgend einem Längenmaß berechnet werden.

Auflösung: Wäre die Breite von A 53° 17′, die Breite von O = 58° 29′, so wäre der Breitenunterschied oder Meridianbogen zwischen beiden = 5° 12′, woraus sich nach der Regel de Tri die Länge desselben berechnen läßt, wenn man 1° = 15 geogr. Meilen setzt u. s. w.

§. 197.
Aufgabe. (Fig. 129.)

Die Breiten zweier Oerter R und K und der Länterschied derselben (der sphärische Winkel RNK) gegeben; darauf soll ihre Bogenentfernung, die iem größten Kreis der Erdkugel gehört, berechnet n.

ıflösung: Aus der Breite LR ergiebt sich ihr Complement zu 90°, nehmlich der Bogen RN, eben so aus der Breite MK ihr Complement der Bogen KN. Im sphärischen Dreieck RKN kennt man also zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, woraus sich die dritte Seite RK in Gradmaß berechnen läßt, nach §. 39. 2te Abth. Den gefundenen Gradbogen reducirt man ferner auf Meilenmaß nach dem Satz, daß $1^0 = 15$ geogr. Meilen ist.

ieispiel: Die Breite eines Ortes sey = 52° 31′ 30″, die Breite des zweiten = 48° 40′ 14″; so ist die eine Seite des Dreiecks = 37° 28′ 30″, die zweite Seite = 41° 9′ 46″; der Längenunterschied beider Oerter sey = 11° 2′ 30″.

Daraus folgt der Bogen RK = 7° 53′ 48″, auf Meilenmaß reducirt nahe = 118 bis 119 geogr. Meilen. Dies ist ungefähr die Bogenentfernung zwischen Paris und Berlin. Macht man aber, wie die Franzosen und Preußen bei ihren gegenseitigen freundschaftlichen Besuchen gethan, den Marsch von einem Ort zum andern nicht auf dem kürzesten Wege, so hat man mehr Meilen zu machen, und braucht mehr Zeit.

§. 198.
Aufgabe. (Fig. 129.)

Die Breiten LR, MK zweier Oerter und ihre

Entfernung R K im Bogen nach Meilenmaß gi
ben; daraus soll ihr Längenunterschied, nehmli
sphärische Winkel RNK oder der Bogen L M b
werden.

Auflösung: Hier sind im sphärischen D
R K N alle drei Seiten bekannt, wenn m
gegebene Meilenlänge des Bogens R K in
Minuten ꝛc. verwandelt, nach dem Satz, d
geogr. Meilen 1° geben. Daraus kann m
§. 37. 2te Abth. den sphärischen Winkel R
oder den Gradbogen L M am Aequator b
Ein Beispiel der Art kann sich der Leser sel
setzen und berechnen.

§. 199.
Aufgabe. (Fig. 129.)

Die Bogenentfernung R K zweier Oerter R
K, die Breite M K des einen Ortes K und da
muth des Ortes R in Beziehung auf den Meridi
K (vergl. §. 175.), nehmlich der sphärische Winkel
oder sein Complement zu 180° R K N sind bek
daraus soll man L R die unbekannte Breite de
ten Ortes R und den Längenunterschied R N K
Oerter berechnen.

Auflösung: Aus M K ergiebt sich sein Co
ment zu 90°, nehmlich Bog. K N, aus dem
lenmaß das Gradmaß des Bogens R K.
sphärischen Dreieck R K N kann man demnach
den zwei Seiten K N, K R und dem von
eingeschloßnen Winkel R K N die übrigen
(nach §. 39, 40. 2te
R N, woraus L
des
∠ R N K oder
schied

Auch KRN oder KRS, nehmlich das Azimuth
ortes K in Beziehung auf den Meridian von R
ſich durch dieſen Kalkul beſtimmen.

Man ſieht wohl, wie viel Werth dieſes Problem
er höhern Erdmeſſung haben muß. Es kommt hier
darauf an, daß die Breite eines Ortes K und
Azimuth eines zweiten R gegen den Meridian von
uvörderſt ſehr genau mit den beſten Winkelmeſſern
gemittelt werde. Zur Prüfung und Controle kann
n hierauf auch noch die Breite des Ortes R durch
cte Meſſung ſuchen.

§. 200.

lächeninhalt triangulirter Erdſtrecken.

Beſchluß.

Bei kleinen Aufnahmen, ökonomiſchen, kame-
iſtiſchen ꝛc., berechnet man die Flächen entweder un-
ttelbar aus gemeſſenen Größen, Dreieckſeiten, Abſciſ-
n, Ordinaten (Perpendikularen) oder nach den auf
m geometriſchen Grundriß verjüngten Maßen derſel-
n. Dieſe Sache iſt ganz elementariſch und allgemein
kannt; vergl. §. 155, 157.

Der Flächenraum eines ganzen Landes wird nach
em aſtronomiſch-trigonometriſchen Netz berechnet, wel-
es man darüber gelegt hat, und zwar gebraucht man
ier ein größeres Flächenmaß, Quadratmeilen. Sind
ie Hauptgrenzpunkte des Landes in Hinſicht ihrer geo-
graphiſchen Breiten und Längen einmahl richtig be-
ſtimmt, ſo läßt ſich ſein Flächeninhalt in Quadrat-
graden, wovon jeder 15 geographiſche Meilen lang
und breit iſt, annähernd finden. Wie die Flächen
ume einzelner ſphäriſcher Dreiecke, ingleichen ſphä-
Polygone auf einer Kugel, deren Halbmeſſer
ſt, berechnet werden, zeigen die im §. 46, 47.
l. erläuterten Aufgaben. Man ſetzt auch wohl
Flächenraum eines Landes aus den durch

Specielle trapezoidale Reflexionen erhalten die Schemen von einzelnen Punkten von Kreisen.

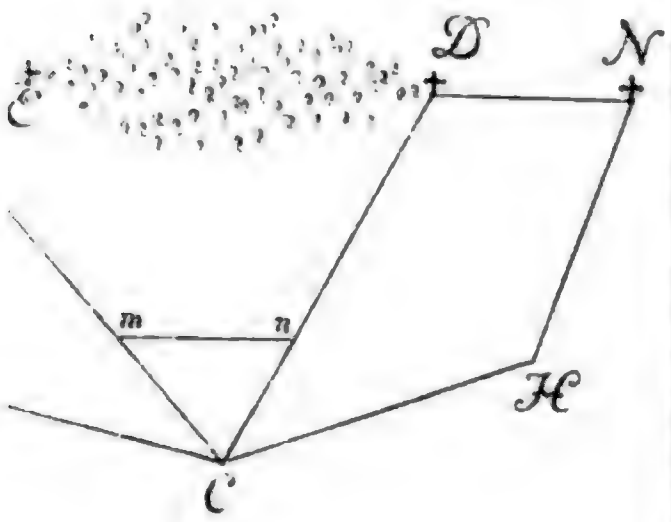
Durch Addition der beiden Kreise a_1, a_2 erhält man den Kreis a, durch Addition der beiden Kreise b_1, b_2 erhält man den Kreis b. Durch Addition der beiden Kreise a, b erhält man den Kreis c. Durch Addition der beiden Kreise c, c erhält man den Kreis d. Durch Addition der beiden Kreise d, d erhält man den Kreis e, u. s. w.

Verdoppelungen.

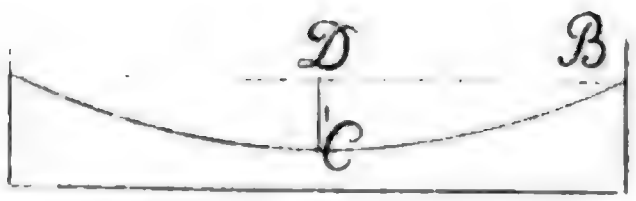
Fig. 1.

Kreis a_1 in Kreis a_2 in Kreis a_3 in Kreis a_4 in Kreis a_5 in Kreis a_6 in Kreis a_7 in Kreis a_8 in Kreis a_9 in Kreis a_{10} in Kreis a_{11} in Kreis a_{12} in Kreis a_{13} in Kreis a_{14} in Kreis a_{15} in Kreis a_{16} in Kreis a_{17} in Kreis a_{18} in Kreis a_{19} in Kreis a_{20} in Kreis a_{21} in Kreis a_{22} in Kreis

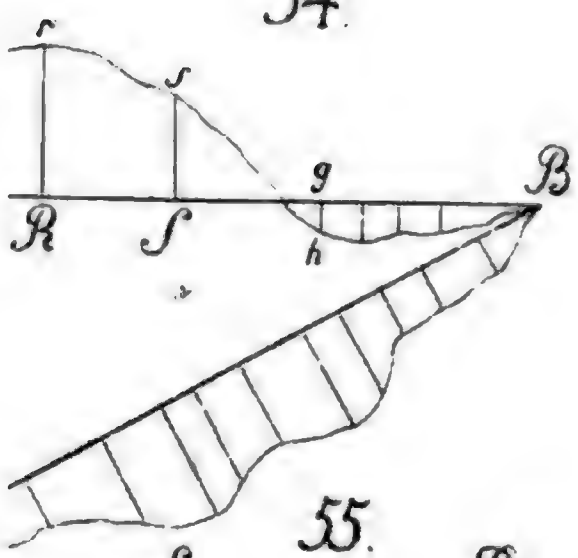
48.



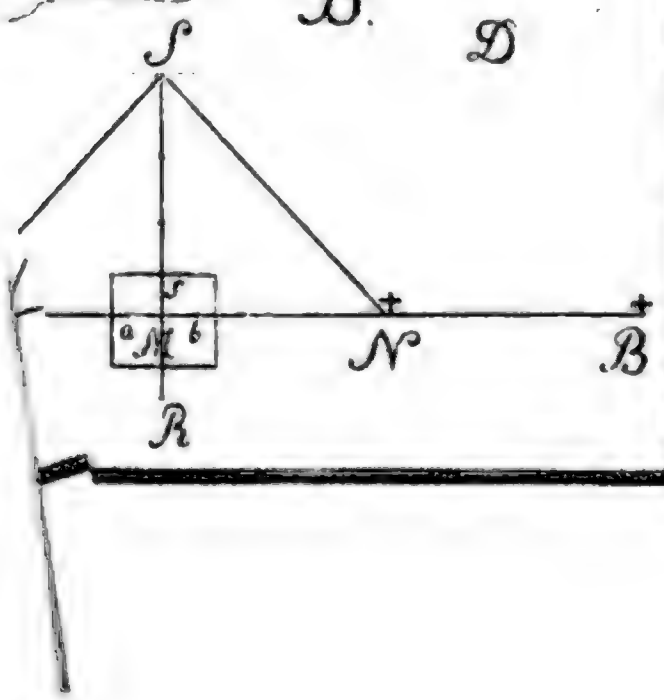
51.



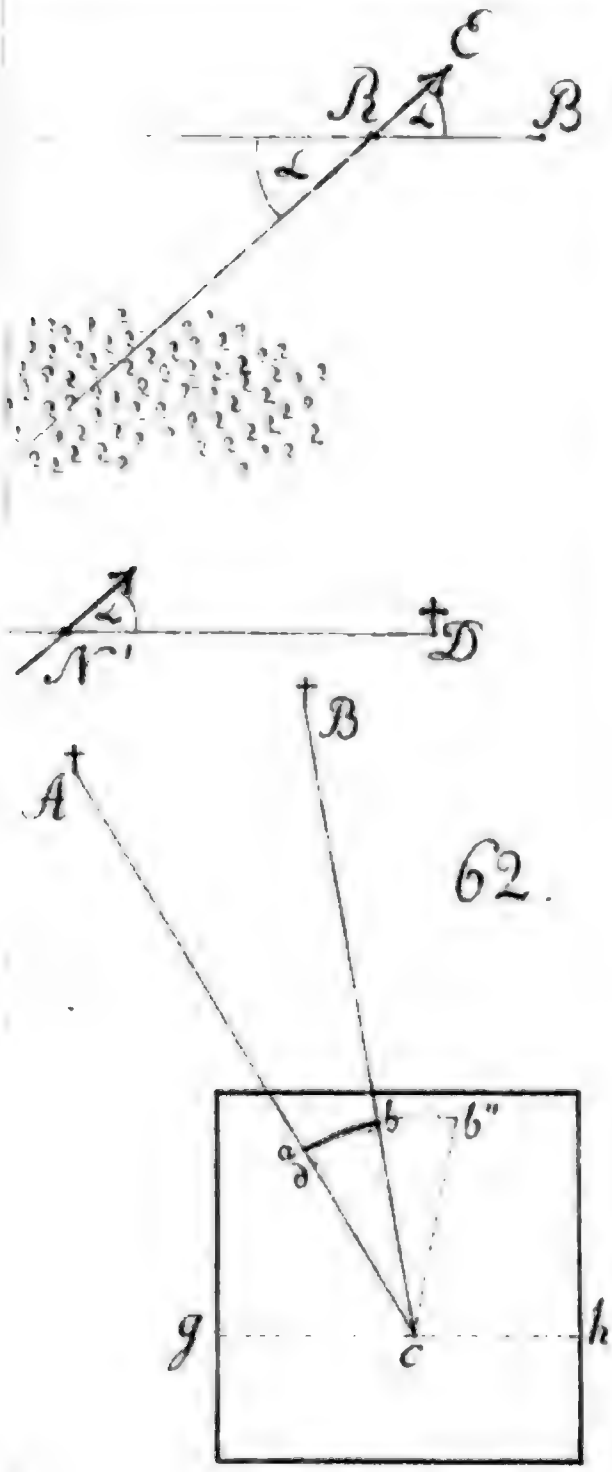
54.



55.

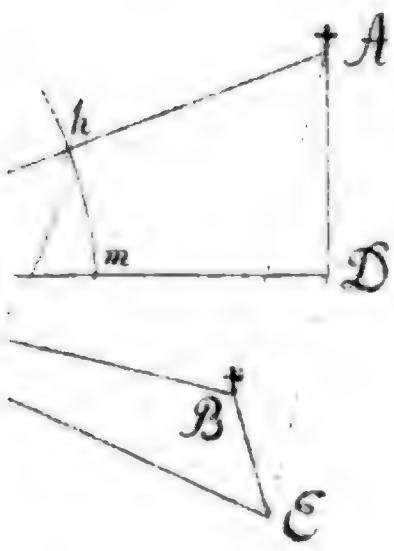


Digitized by C



3

63.



§. 180.

Correction der Sonnenhöhen wegen ihres scheinbaren Durchmessers.

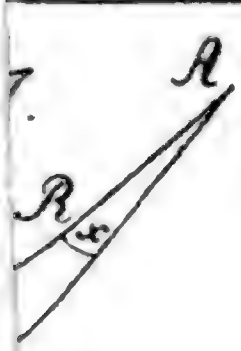
Bei jeder Messung einer Sonnenhöhe, auch im Mittag, beobachtet man ihren obersten, auch wohl ihren untersten Rand. Da man aber die Erhöhung ihres Mittelpunktes verlangt, so muß man im ersten Falle ihren halben scheinbaren Durchmesser, d. h. den Sehewinkel, unter welchem er uns erscheint, vom observirten Höhenwinkel subtrahiren, im zweiten Falle aber dazu addiren.

Der scheinbare Sonnendurchmesser ist etwas veränderlich. Nach äußerst sorgfältigen mikrometrischen Messungen der Astronomen ist er zur Zeit des Wintersolstitiums, wo die Sonne der Erde am nächsten steht, am größten = 32′ (Min.) 35″,6, am kleinsten zur Zeit des Sommersolstitiums = 31′31″, der mittlere = 32′3,3″ zur Zeit der Aequinoctien.

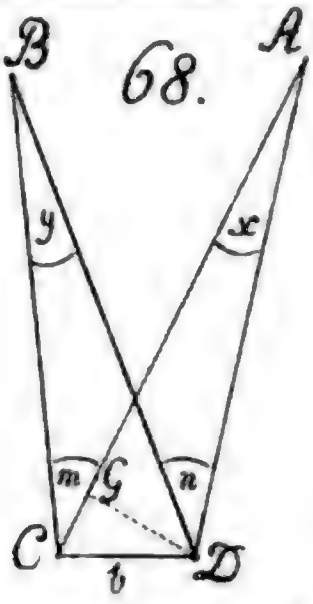
Dieser Unterschied rührt her von der elliptischen Bahn, in welcher sich scheinbar die Sonne jährlich um die Erde bewegt, und in deren einem Brennpunkte die Erde steht. Der größte Durchmesser des Mondes ist = 33′31″, der kleinste = 29′22″, der mittlere = 31′7″. — Hätte man nun z. B. zur Zeit der längsten Tage eine Sonnenhöhe, nehmlich ihres obern Randes, = 41°53′31″ gefunden, so müßte man den Sonnenhalbmesser = 16′17,8″ davon subtrahiren, um die gesuchte Höhe des Sonnenmittelpunktes = 41°37′13,2″ zu erhalten.

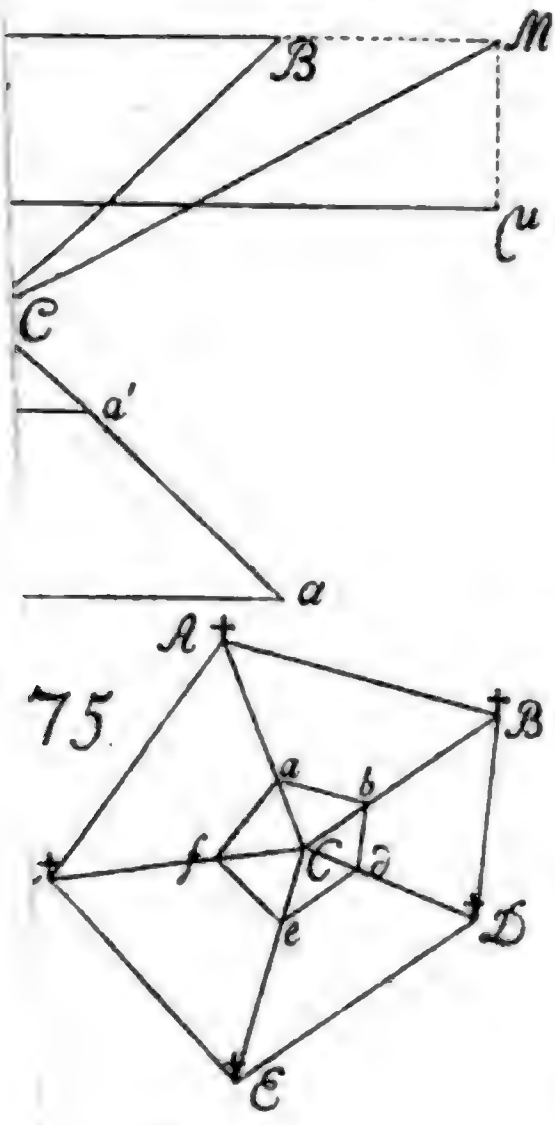
Die Fixsterne zeigen auch durch Fernröhre mit der stärksten Vergrößerung keinen scheinbaren Durchmesser; mithin fällt bei Messung der Sternhöhen die Correction

7.



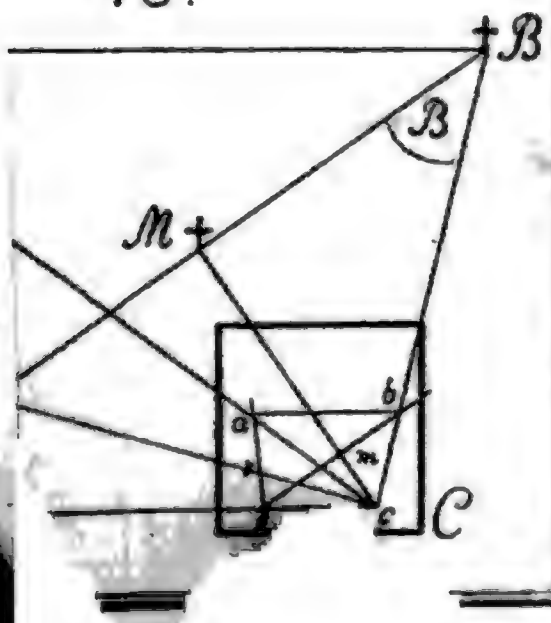
68.



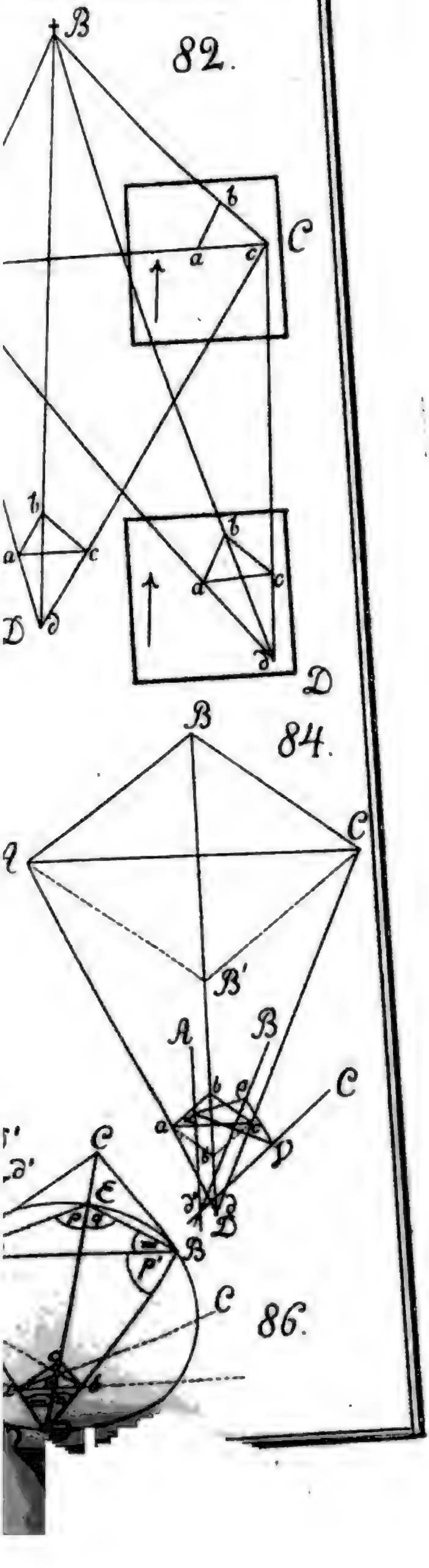


75.

78.



Tab IX



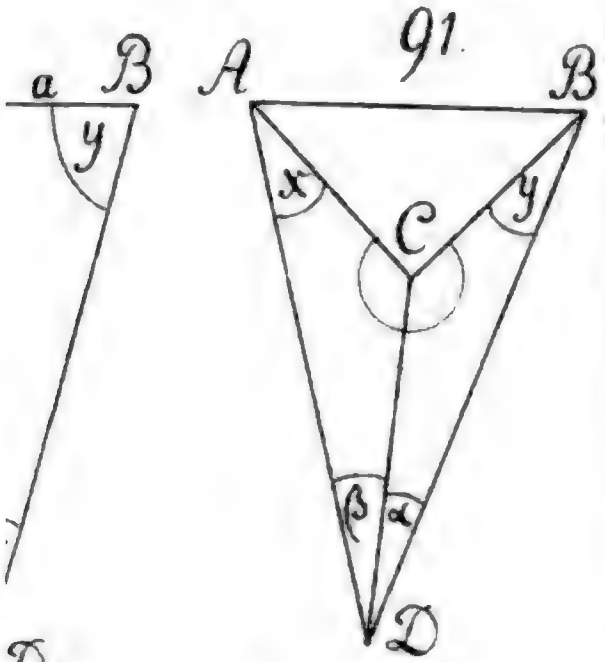
gung des Kreises das untere Fernrohr wieder horizontal oder die Libelle wieder richtig (die Luftblase in die Mitte) einstellt, dreht der erste Beobachter das obere Fernrohr, ohne daß sich der Kreis mit bewegt, wieder südlich herum auf denselben himmlischen Gegenstand. Da sich bei diesen beiderseitigen Bewegungen der obern und untern Alhidade gegenseitige Störungen der richtigen Lagen finden, so müssen beide Gehülfen so lange im Berichtigen und Stellen fortfahren, bis die Luftblase in der Mitte steht und zu gleicher Zeit das Fernrohr gegen den Zielpunkt am Himmel, wie bei der ersten Beobachtung. Ob der Kreis bei der Umdrehung vertikal geblieben sey, zeigt das kleine Queerniveau seiner horizontalen Achse B (Fig. 37.) an. Im Fall einer geringen Neigung verbessert man sie durch die Stellschrauben, bis das kleine Niveau wieder richtig einsteht, und so den vertikalen Stand des Kreises anzeigt.

Nach dieser zweiten Beobachtung ist eine Doppelrepetition der Winkelmessung vollbracht, und der erste, so wie die übrigen Nonien (Indices), haben einen Bogen durchlaufen, der in Gradmaß zweimahl so groß ist, als die gesuchte Zenithdistanz. Die Hälfte des Winkels, den die Indices angeben, ist daher der einfachen Zenithdistanz gleich.

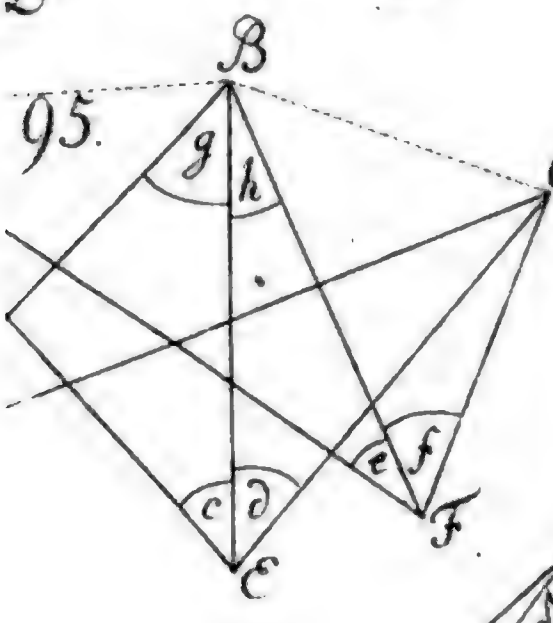
Die Acte der ersten und zweiten Observation (N° 2 und N° 3) kann sich der Leser nach Fig. 24. Tab. II. ganz klar machen. A kann hier die Sonne oder einen Stern, B den Scheitelpunkt (Zenith) des Beobachters in C vorstellen. Das obere Fernrohr steht bei der ersten Beobachtung in der Lage Co, nach der zweiten in der Lage Co''; die doppelte Zenithdistanz giebt der Bogen oo'',

Tab X.

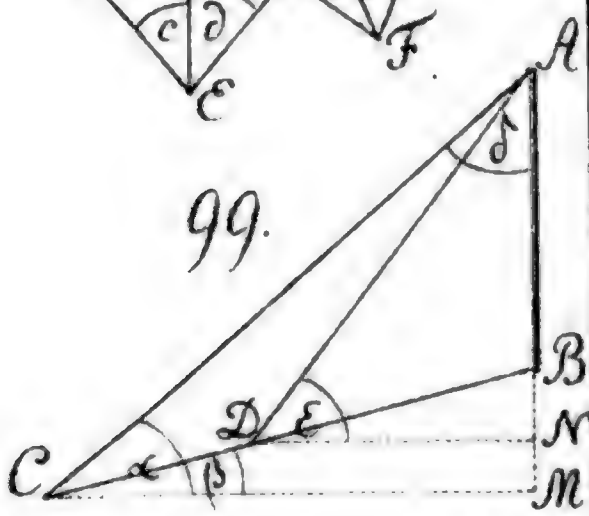
91.



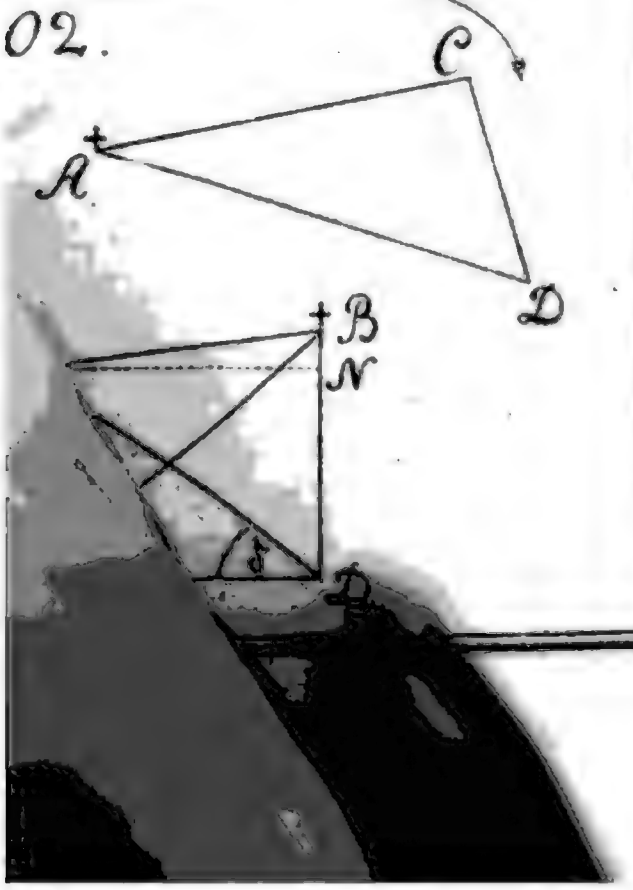
95.



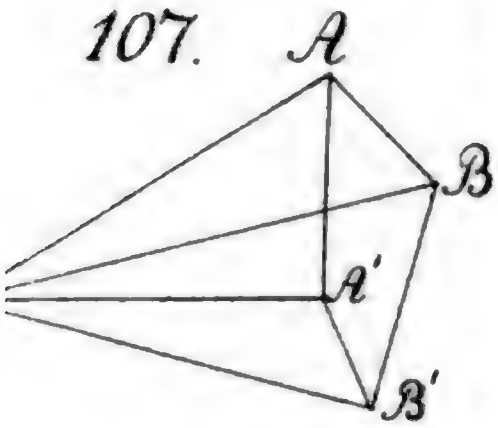
99.



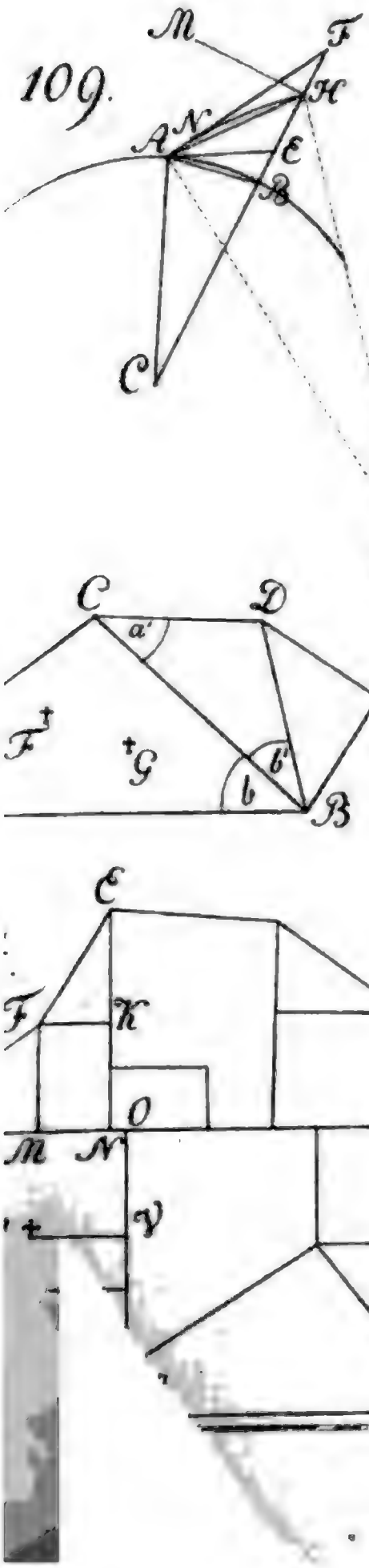
02.



107.



109.



Zach'schen Corresp. ꝛc., in Zach's Nachrichten von der Aufnahme von Thüringen u.s.w. S. 112 sqq. u.a.m. Für gute Köpfe wird aber wahrscheinlich auch das hier Gesagte schon völlig ausreichen.

Bestimmung der geographischen Breiten der Oerter auf der Erde.

§. 182.

Allgemeiner Begriff von Polhöhe, Aequatorhöhe und geographischer Breite.

(Fig. 128.)

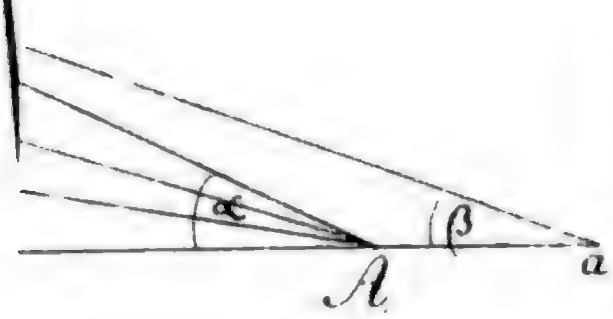
Der Begriff von der geographischen Breite der Oerter auf der Erde wird jetzt überall in bessern Schulen erklärt, und in allen geographischen Büchern auseinandergesetzt. Ich werde daher nur kurz davon handeln, und vorzüglich das erläutern, was die Astronomie zu Bestimmungen der Art vermag.

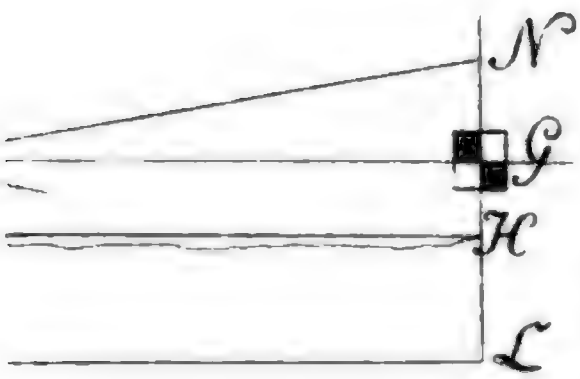
Es stelle (Fig. 128.) SCN die Erdachse, N den Nordpol und S den Südpol derselben vor. Gedenkt man sich die Erdachse bis an das Himmelsgewölbe verlängert, so wird der Punkt P den Nordpol am Himmel in Beziehung auf die Umdrehungsachse der Erde bezeichnen. EQ und eine durch dieselbe gelegte, in Gedanken ebenfalls bis an den Himmel erweiterte, Ebene bedeutet den Aequator der Erde. Jeder Punkt im Aequatorkreis ist von seinem Pol N oder S um einen Bogen von 90^0 entfernt.

Ist A ein Ort auf der Erdoberfläche, und SEAN

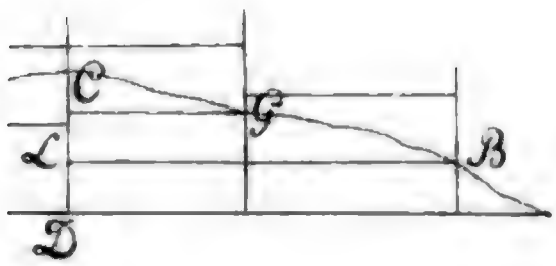
Tab XII

16.

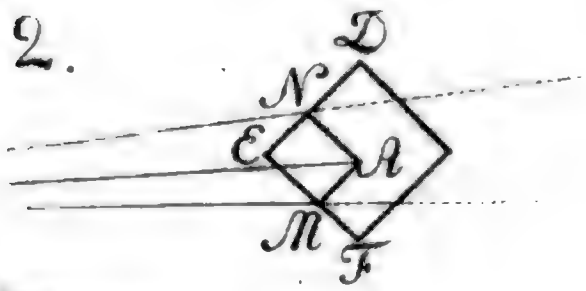


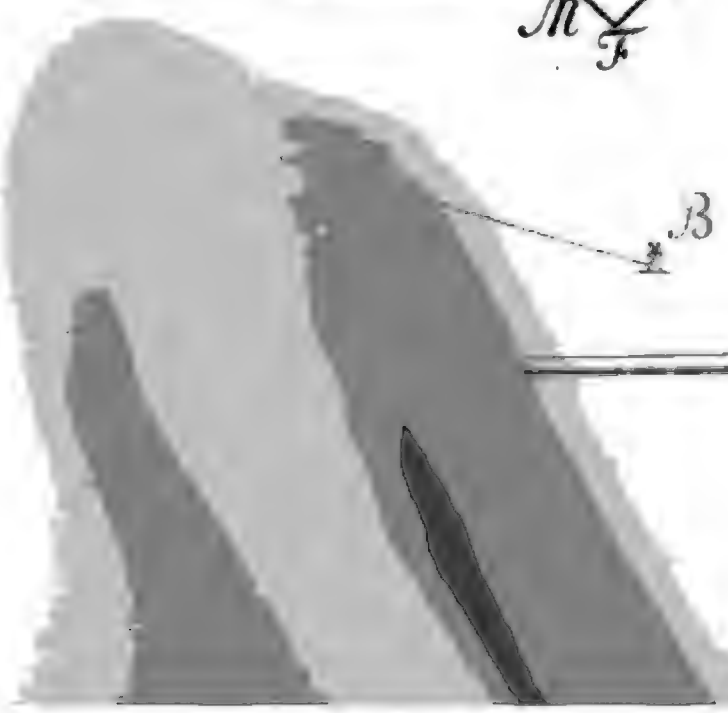


).

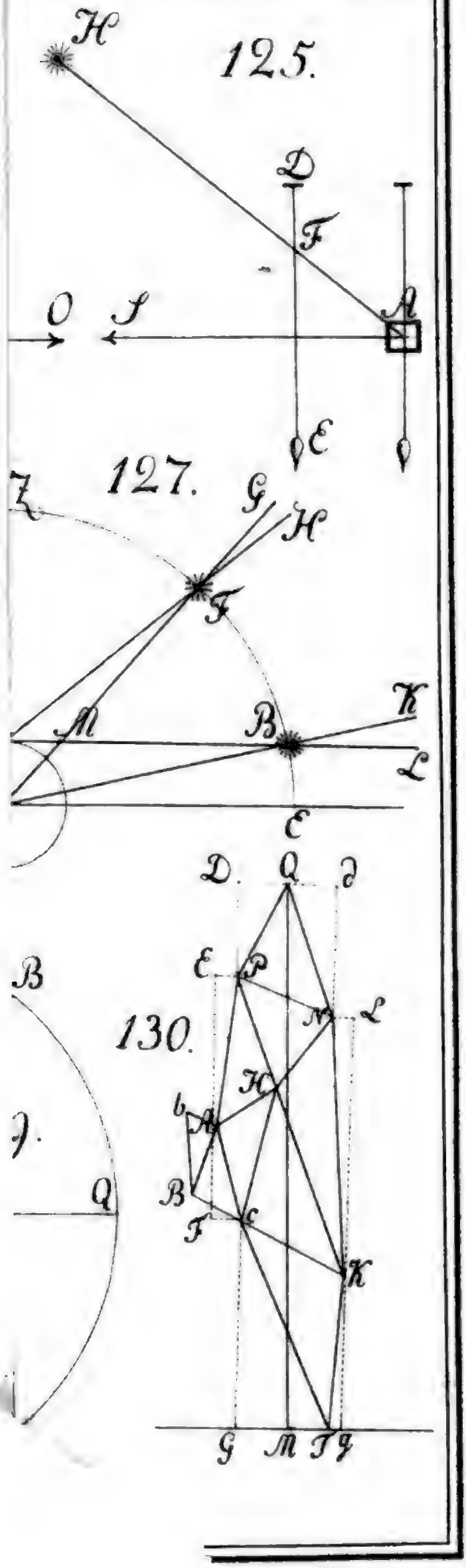


2.





Tab. XIII



gen, auch mit Zuziehung verschiedener Circumpolarsterne, vermindern bisweilen auch wohl gänzlich vertilgen. Wenn verschiedene Bestimmungen einer Breite auch noch durch andere Methoden, als die eben angezeigte, unter einander immer ganz oder doch bis auf Zehntel einer Sekunde harmoniren, so kann man wohl auf eine Genauigkeit bis auf 1″ fest vertrauen. Als v. Zach nach einer zweiten Methode, wobei die Zenithdistanzen des Polarsterns bei seiner obern und untern Kulmination gemessen, und seine Abweichung (Deklination) als bekannt angenommen wurde, die Breite von Seeberg bestimmte, so fand er sie durch 800 Beobachtungen = 50° 56′ 7″, 58 bis 50° 56′ 7″, 74; durch beobachtete Zenithdistanzen eines andern Fixsterns Atair fand er dieselbe = 50° 56′ 8″, 33, durch Zenithdistanzen der Sonne = 50° 56′ 8″, 3. Das Mittel aus allen Bestimmungen gäbe also die Seeberger Breite = 50° 56′ 7″, 9 nahe = 50° 56′ 8″. Eine frühere Bestimmung mit einem 7zölligen Sextant wich von jener um 5″ ab.

§. 184.

Zweite Methode der Polhöhenbestimmung aus Kulminationshöhen der Sterne, Sonne, und ihrer Abweichung. (Fig. 128.)

Es bedeute in unsrer Figur H die Sonne oder einen Fixstern beim Kulminiren oder Durchgang durch die Mittagsebene von A, so ist für den Beobachtungsort A seine Höhe B′CH. Ist H die Sonne, und wird ihre Höhe bei A gemessen, so bedarf der wirklich observirte Höhenwinkel einer Verbesserung wegen der Höhenparallaxe der Sonne (n. §. 179.) und außerdem noch einer zweiten wegen der Refraction wie jede andere Sternhöhe, um den gesuchten Winkel B′CH zu erhal-

zed by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

APR SEP 04 1972